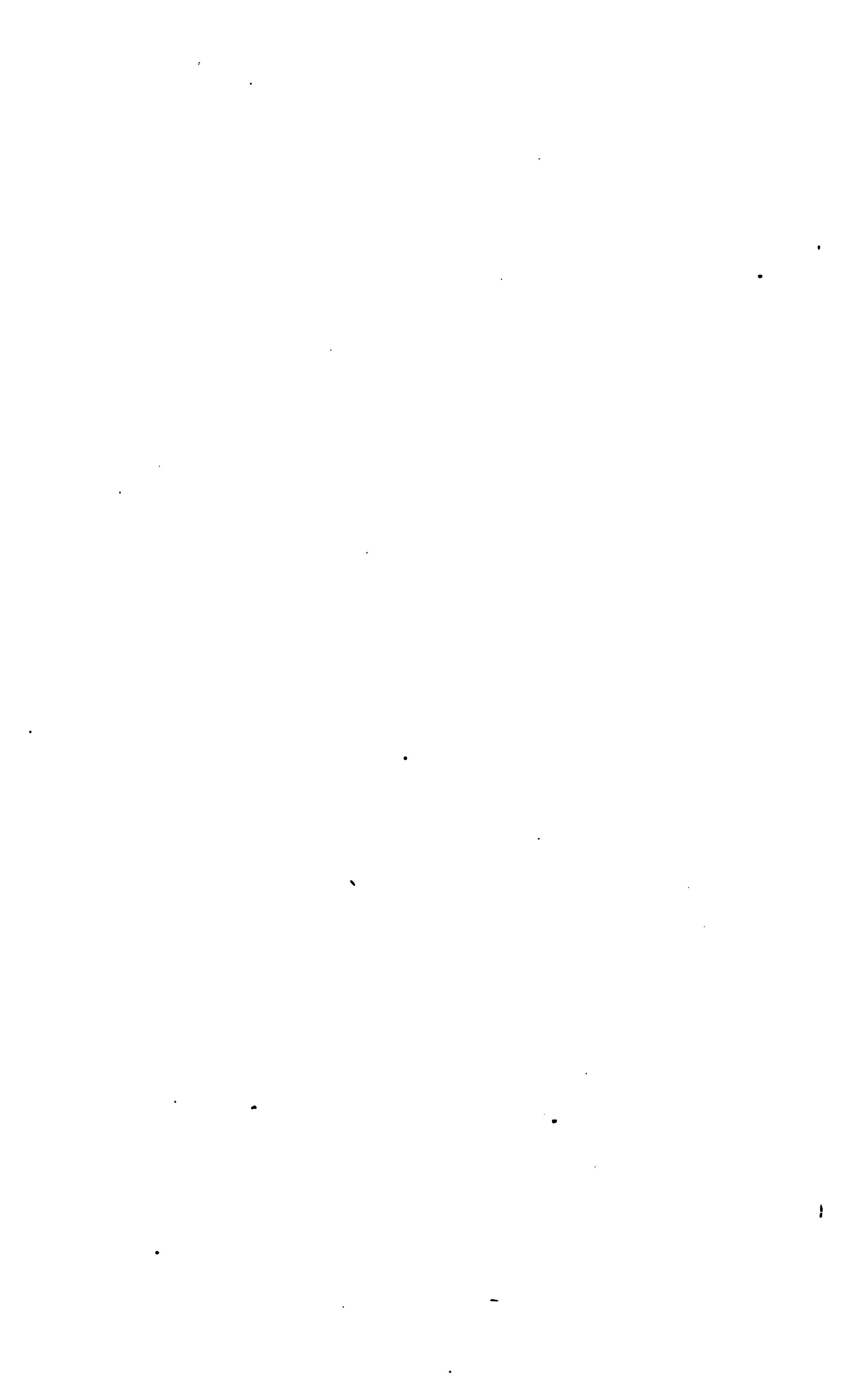








SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

SIEBZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXX. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1874. — HEFT I BIS V.

(Mit 1 Tafel.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

Farrar Fund,
May 7. – July 24.
1874.

INHALT.

may 7

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. BAND. I. HEFT.

Jahrgang 1874. — Juni.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

SIEBZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXX. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1874. — HEFT I BIS V.

(Mit 1 Tafel.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

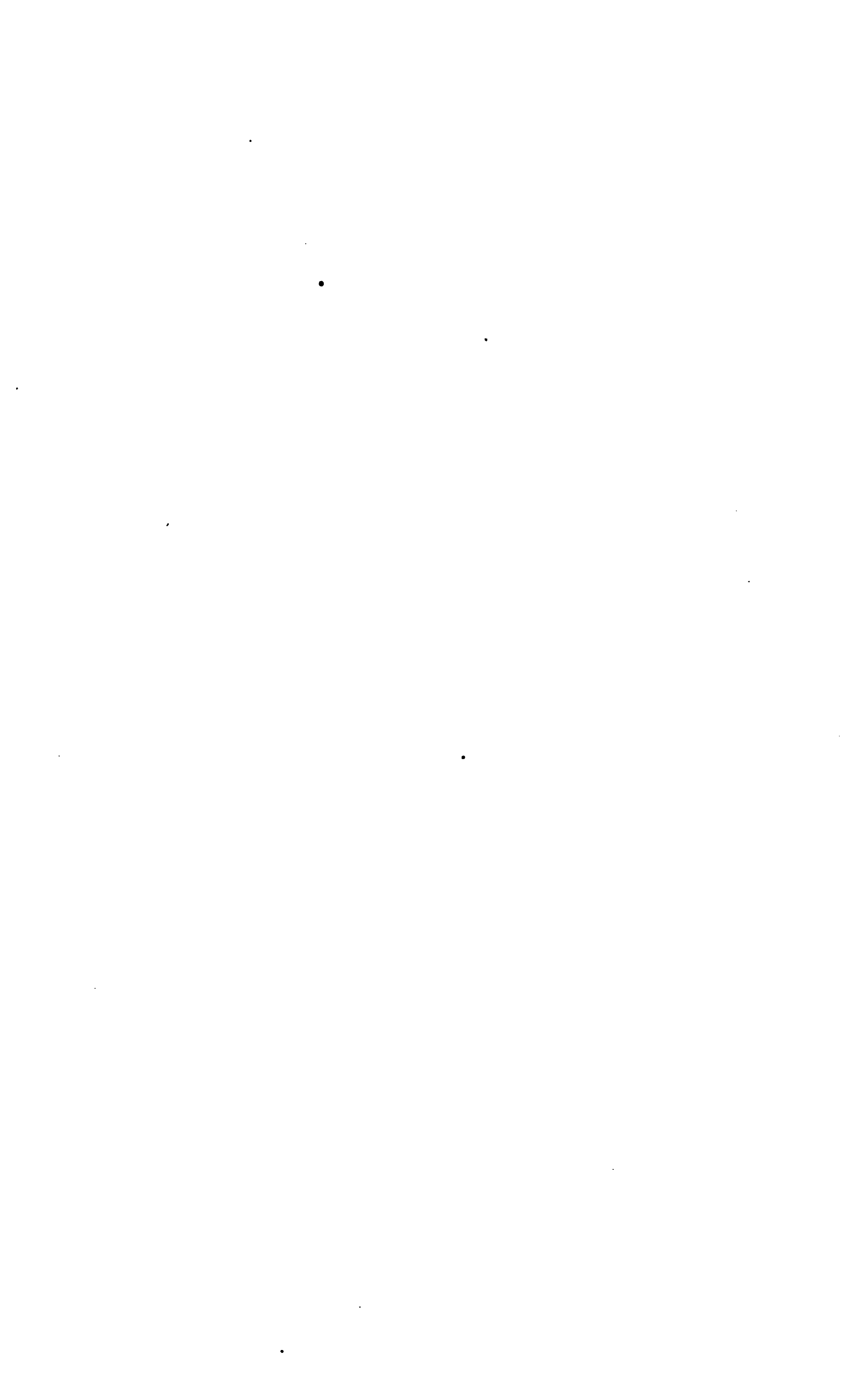
IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

Farrar Fund,
May 7. – July 24.
1874.

INHALT.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. BAND. I. HEFT.

Jahrgang 1874. — Juni.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

INHALT

des 1. Heftes (Juni 1874) des 70. Bandes, II. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 70 kr. = 14 Ngr.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

6.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie Mechanik, Meteorologie und Astronomie.



XV. SITZUNG VOM 11. JUNI 1874.

Der Secretär liest einen Erlass des h. Curatoriums vom 1. Juni l. J., wodurch die Akademie in Kenntniss gesetzt wird, dass die Centralgesellschaft für Bienenzucht und Entomologie zu Paris in der Zeit vom 15. September bis 11. October 1874 eine Ausstellung von schädlichen und nützlichen Insecten veranstalten wird, mit welcher gleichzeitig die Abhaltung eines wissenschaftlichen Congresses in Aussicht genommen ist. Die k. Akademie wird ersucht, einen oder mehrere Fachmänner zu bezeichnen, welche die k. k. österr. Regierung bei diesem Congresse zu vertreten hätten.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über die verschiedene Erregbarkeit functionell verschiedener Nervmuskelapparate.“ I. Abtheilung, von Herrn Prof. Dr. Alex. Rollett in Graz.

„Dodekas neuer Cladoceren nebst einer kurzen Übersicht der Cladocerenfauna Böhmens“, von Herrn Wilh. Kurz, Gymnasial-Professor in Deutschbrod.

„Über eine neue Kraftmaschine, Seitendruck-Maschine, getrieben von comprimirter Luft, Dampf und Wasser, überhaupt von allen ausdehnsam und tropfbar flüssigen Körpern“, von Herrn Jos. Litzer, Ingenieur zu Losenstein in Ober-Österreich.

Herr C. Eugen Lehmann in Düsseldorf übersendet eine autographirte Abhandlung: „Die Gesetze der Individualität der Planeten unseres Sonnensystems.“

Herr Prof. Dr. A. Winckler überreicht eine Abhandlung: „Über die unbestimmte Integration einer Gattung transcendenter Functionen.“

Herr Prof. Dr. Jul. Wiesner legt eine, im pflanzenphysiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit des Herrn Emil Schumacher aus Luzern vor, betitelt: „Beiträge zur Morphologie und Biologie der Hefe.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Anno XXVII, Sess. 4ª. Roma, 1874; 4°.

Akademie der Wissenschaften, kgl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. März 1874. Berlin; 8°.

American Chemist. Vol. IV, Nr. 11. Philadelphia, 1874; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 15—17. Wien, 1874; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1989—1995. (Bd. 83. 21—24; Bd. 84. 1—3.) Kiel, 1874; 4°.

Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1876. Berlin, 1874; 8°.

Comitato, R., Geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1874. Nr. 1 & 2. Roma; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXVIII, Nrs. 20—21. Paris, 1874; 4°.

Gesellschaft der Wissenschaften, Oberlausitzische: Neues Lausitzisches Magazin. L. Band, 2. Heft. Görlitz, 1873; 8°.

— k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Bd. XVII (neuer Folge VII), Nr. 5. Wien, 1874; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Bd., Nr. 11. Wien, 1874; 4°.

— für Salzburger Landeskunde: Mittheilungen. XIII. Vereinsjahr 1873. Salzburg; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 21—23. Wien, 1874; 4°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 11. Graz, 1874; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrg. 1874. Nr. 8—9. Wien; 4°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Ergänzungsheft Nr. 37. Gotha, 1874; 4°.

Moniteur scientifique du Dteur Quesneville. 390e Livraison. Paris, 1874; 4°.

Nature. Nrs. 238—240, Vol. X. London, 1874; 4°.

Panstenographikon. Zeitschrift für Kunde der stenographischen Systeme aller Nationen. I. Bd., 2. Lieferung. Leipzig, 1869; 8°.

Revista de la Universidad de Madrid. 2ª Epoca. Tomo II, Nr. 5—6; Tome III, Nr. 1. Madrid, 1873 & 1874; 4°.

Revista de Portuga e Brazil. II° Vol. Nr. 2—3. Lisboa, 1874; 4°.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger.“ III° Année, 2me Série, Nrs. 47—49. Paris, 1874; 4°.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Anno 1874, Disp. 3a—4a. Palermo; 4°.

Société Linnéenne du Nord de la France: Bulletin mensuel. 3e Année. 1874. Nrs. 23—24. Amiens; 8°.

— Botanique de France: Bulletin. Tome XXIe. 1874. Comptes rendus des séances 1. Paris; 8°.

— Géologique de France: Bulletin. 3e Série, Tome IIe. 1874, Nr. 2. Paris; 8°.

— de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux: Mémoires et Bulletins. Année 1873, 3me—4m Fasc. Paris & Bordeaux; 8°.

Society, The Asiatic of Bengal: Journal. 1873. Part I, Nrs. 2—3; Part II, Nr. 3. Calcutta; 8°. — Proceedings. 1873, Nrs. 5—9. Calcutta; 8°. — *Bibliotheca Indica*. Old Series. Nr. 232; New Series. Nrs. 260, 277, 279, 280—282, 285, 286, 288. Calcutta, 1872 & 1873; 8° & 4°.

Verein, Entomologischer, in Berlin: Berliner Entomologische Zeitschrift. XVII. Jahrgang (1873), 3. & 4. Vierteljahrsheft; XVIII. Jahrgang (1874), 1. & 2. Vierteljahrsheft. Berlin, 1874; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 21—23. Wien, 1874; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang, 8. & 9. Heft. Wien, 1874; 4°.

Über die Bessel'schen Functionen.

Von **Leop. Gegenbauer** in Krems.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. März 1874.)

Setzt man:

$$1.)\qquad (1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}=\sum^{n} C_n^{\nu}(x)\,.\,\alpha^n,$$

so ist:

$$2.)\ C_n^{\nu}(x)=2^n\frac{\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(n)\Pi(\nu-1)}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{1!(n+\nu-1)}\frac{x^{n-2}}{2^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!(n+\nu-1)(n+\nu-2)}\frac{x^{n-4}}{2^4}\cdots\cdots\right]$$

Aus dieser Definition der Functionen $C_n^{\nu}(x)$ kann man folgende Differentialgleichung ableiten:

$$3.)\ (1-x^2)\left[C_n^{\nu}(x)\right]''-(2\nu+1)x\left[C_n^{\nu}(x)\right]'+n(n+2\nu)\,C_n^{\nu}(x)=o.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}$ und berücksichtigt, dass:

$$4.)\qquad \left[C_n^{\nu}(x)\right]'=2\nu C_{n-1}^{\nu+1}(x)$$

ist, so erhält man:

$$5.)\ \left[(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}C_{n-1}^{\nu+1}\,.\,(x)\right]'=-\frac{n(n+2\nu)}{2\nu}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}C_n^{\nu}(x).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der aus ihr unmittelbar folgenden:

$$6.)\qquad \left[(1-x^2)^{\frac{2\nu+3}{2}} C_{n-2}^{\nu+2}(x)\right]'' = -\frac{(n-1)(n+2\nu+1)}{2(\nu+1)}(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}} C_{n-1}^{\nu+1}(x)$$

so erhält man:

$$7.)\qquad \left[(1-x^2)^{\frac{2\nu+3}{2}} C_{n-2}^{\nu+2}(x)\right]'' = \frac{n(n-1)(n+2\nu+1)(n+2\nu)}{4\nu(\nu+1)}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_{n}^{\nu}(x).$$

Bedenkt man, dass:

$$8.)\qquad C_0^{\nu+n}(x) = 1$$

ist, so sieht man sofort, dass man schliesslich zu folgender Formel gelangt:

$$9.)\qquad \left[(1-x^2)^{\frac{2n+2\nu-1}{2}}\right]^{(n)} = (-1)^n \frac{\Pi(n)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2n+2\nu-1)}{2^n\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^{\nu}(x).$$

Hat man eine Function $\varphi(x)$, welche so beschaffen ist, dass $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, ... $\varphi^{(n-1)}(x)$ innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ endlich und stetig bleiben, so ist:

$$10.)\qquad \int_{-1}^{+1}\varphi(x).\left[(1-x^2)^{\frac{2n+2\nu-1}{2}}\right]^{(n)}.\,dx = (-1)^n\int_{-1}^{+1}\varphi^{(n)}(x).(1-x^2)^{\frac{2n+2\nu-1}{2}}.\,dx,$$

oder wegen Gleichung 9.):

$$11.)\quad \int_{-1}^{+1} \varphi(x).(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}.C_n^\nu(x).dx = \frac{2^n\Pi(n+\nu-1)\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)\Pi(\nu-1)\Pi(2n+2\nu-1)}\int_{-1}^{+1}\varphi^{(n)}(x).(1-x^2)^{\frac{2n+2\nu-1}{2}}.dx.$$

Multiplicirt man die Gleichung 5.) mit $C_m^\nu(x).dx$ und integrirt von $x=-1$ bis $x=+1$, so erhält man:

$$12.)\quad 4\nu^2\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}C_{m-1}^{\nu+1}(x).C_{n-1}^{\nu+1}(x)\,dx = n(n+2\nu)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}C_m^\nu(x)C_n^\nu(x).dx.$$

Schreibt man dagegen in 5.) m für n, multiplicirt sodann mit $C_n^\nu(x)dx$ und integrirt zwischen denselben Grenzen, so erhält man:

$$13.)\quad 4\nu^2\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu+1}{2}}C_{m-1}^{\nu+1}(x).C_{n-1}^{\nu+1}(x).dx = m(m+2\nu)\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}C_m^\nu(x)\,C_n^\nu(x)\,dx.$$

Aus den Gleichungen 12.) und 13.) folgt sofort, dass:

$$14.)\quad \int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}}C_m^\nu(x).C_n^\nu(x).dx = 0$$

ist, wenn m von n verschieden ist. Den Werth dieses Integrales für $m=n$ erhält man, wenn man in der Gleichung 11.) $\varphi(x)=C_n^\nu(x)$ setzt und berücksichtigt, dass:

15.) $$\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\frac{2n+2\nu-1}{2}} dx = \frac{2^{2n+2\nu}\left[\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)\right]^2}{\Pi(2n+2\nu)}$$

ist. Man findet nämlich:

16.) $$\int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \left[C_n^\nu(x)\right]^2 . dx = \frac{2^{2\nu-1}\Pi(n+2\nu-1)}{(n+\nu)\,\Pi(n)} \left[\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)}\right]^2.$$

Durch die Gleichungen 14.) und 16.) ist die Entwickelung einer Function $\varphi(x)$, welche von $x=-1$ bis $x=+1$ endlich und stetig bleibt, nach den Functionen $C_n^\nu(x)$ gegeben. Es folgt nämlich aus diesen Gleichungen, dass wenn

17.) $$\varphi(x) = \sum^n A_n \,.\, C_n^\nu(x)$$

gesetzt wird, die Coëfficienten A_n durch folgende Gleichung bestimmt sind:

18.) $$A_n = \frac{(n+\nu)\Pi(n)}{2^{2\nu-1}\,\Pi(n+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 . \int_{-1}^{+1} \varphi(x) \,.\, (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} C_n^\nu(x) \,.\, dx.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nun zur Entwickelung der Function $\rho^{-\nu}J_{(\rho)}^\nu$ für ein Argument, welches die Entfernung zweier Puncte darstellt, über.

Die Function $\rho^{-\nu}J_{(\rho)}^\nu$ genügt der Differentialgleichung:

19.) $$y'' + \frac{2\nu+1}{\rho} y' + y = 0.$$

Ist nun:

20.) $$\rho = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos\varphi}$$

so erhält man für diese Function folgende partielle Differentialgleichung:

21). $$\frac{\partial^2 y}{\partial \rho_1^2} + \frac{2\nu + 1}{\rho_1} \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \frac{2\nu \operatorname{cotang} \varphi}{\rho_1^2} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + y = o.$$

Setzt man nun:

22.) $$\rho^{-\nu} J^{\nu}_{(\rho)} = \sum_0^{\infty} B_n \, . \, C^{\nu}_n(\cos\varphi)$$

wo B_n nur mehr eine Function von ρ_1 und ρ_2 ist, und beachtet, dass $C^{\nu}_n(\cos\varphi)$ der Differentialgleichung

23.) $$z'' + 2\nu \operatorname{cotang} \varphi \, . \, z' + n(n + 2\nu)\, z = o$$

genügt, so erhält man zur Bestimmung von B_n folgende lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

24.) $$z'' + \frac{2\nu + 1}{\rho_1} z' + \left(1 - \frac{n(n + 2\nu)}{\rho_1^2}\right) z = o.$$

Aus dieser Gleichung erhält man sofort, wenn man bedenkt, dass $\rho^{-\nu} J^{\nu}_{(\rho)}$ für $\rho_1 = o$ nicht unendlich gross wird, für B_n die Formel:

25.) $$B_n = a_n \rho_1^{-\nu} J^{n+\nu}_{(\rho_1)}.$$

Man hat also:

26.) $$\rho^{-\nu} J^{\nu}_{(\rho)} = \rho_1^{-\nu} \sum_0^{\infty} a_n \, . \, J^{n+\nu}_{(\rho_1)} \, . \, C^{\nu}_n(\cos\varphi)$$

Da nun ρ bezüglich ρ_1 und ρ_2 symmetrisch ist, so hat man auch:

$$27.)\qquad \rho^{-\nu} J^{\nu}_{(\rho)} = \rho_2^{-\nu} \sum_0^\infty b_n . J^{n+\nu}_{(\rho_2)} . C^{\nu}_n(\cos\varphi).$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt, da die Entwickelung nach den Functionen $C^{\nu}_n(\cos\varphi)$ nur auf eine einzige Weise möglich ist:

$$28.)\qquad a_n . \rho_1^{-\nu} J^{n+\nu}_{(\rho_1)} = b_n . \rho_2^{-\nu} . J^{\nu+n}_{(\rho_2)}.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn:

$$29.)\qquad a_n = c_n . \rho_2^{-\nu} J^{n+\nu}_{(\rho_2)};\ b_n = c_n . \rho_1^{-\nu} J^{n+\nu}_{(\rho_1)}$$

ist. Man hat demnach die Gleichung:

$$30.)\qquad \rho^{-\nu} J^{\nu}_{(\rho)} = (\rho_1\rho_2)^{-\nu} \sum_0^\infty c_n . J^{n+\nu}_{(\rho_1)} . J^{n+\nu}_{(\rho_2)} . C^{\nu}_n(\cos\varphi).$$

Berücksichtigt man die oben für die Coëfficienten einer nach den Functionen $C^{\nu}_n(\cos\varphi)$ fortschreitenden Entwickelung aufgestellte Formel, so erhält man:

$$31.)\qquad c_n(\rho_1\rho_2)^{-\nu} J^{n+\nu}_{(\rho_1)} . J^{n+\nu}_{(\rho_2)} = \frac{(n+\nu)\,\Pi(n)}{2^{2\nu-1}\Pi(n+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 . \int_0^\pi \rho^{-\nu} J^{\nu}_{(\rho)} . C^{\nu}_n(\cos\varphi) \sin^{2\nu}\varphi . d\varphi.$$

Transformiren wir nun das auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Integral mit Hilfe der Transformationsformel 11.) und beachten, dass:

$$32.)\qquad \frac{\partial^n(\rho^{-\nu} J^{\nu}_{(\rho)})}{\partial(\cos\varphi)^n} = (\rho_1\rho_2)^n \rho^{-(n+\nu)} J^{n+\nu}_{(\rho)}$$

ist, so erhalten wir:

$$33.)\qquad c_n(\rho_1\rho_2)^{-(n+\nu)} J^{n+\nu}_{(\rho_1)} J^{n+\nu}_{(\rho_2)} = \frac{2^{n-2\nu+1}\,\Pi(n+\nu)}{\Pi(\nu-1)\,\Pi(2n+2\nu-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 . \int_0^{\pi} \rho^{-(n+\nu)} . J^{n+\nu}_{(\rho)} \sin^{2n+2\nu}\varphi \, . \, d\varphi.$$

Setzt man nun in dieser Gleichung $\rho_1 = \rho_2 = o$ und bedenkt, dass für $z = o$

$$34.)\qquad z^{-\mu} J^{\mu}_{(z)} = \frac{1}{2^{\mu}\Pi(\mu)}$$

wird, so erhält man, da

$$35.)\qquad \frac{\Pi(n+\nu-1)\Pi(2\nu-1)\Pi\left(\frac{2n+2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2n+2\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} = \frac{\Pi(\nu-1)}{2^{2n}}$$

ist, folgende Gleichung:

$$36.)\qquad c_n = 2^{\nu}\Pi(\nu-1)(n+\nu).$$

Man hat also schliesslich die Entwickelung:

$$37.)\qquad \rho^{-\nu} J^{\nu}_{(\rho)} = 2^{\nu}\Pi(\nu-1)(\rho_1\rho_2)^{-\nu}\sum_{0}^{\infty}{}^{n}(n+\nu)J^{n+\nu}_{(\rho_1)}.J^{n+\nu}_{(\rho_2)}.C^{\nu}_{n}(\cos\varphi).$$

Ist ν eine ganze Zahl, so ist die Function $\rho^{-\nu}Y^{\nu}_{(\rho)}$ ebenfalls ein particuläres Integral der Differentialgleichung 21.). Man gelangt daher sofort zu folgender Gleichung:

$$38.)\qquad \rho^{-\nu}Y^{\nu}_{(\rho)} = \rho_1^{-\nu}\sum_{0}^{\infty}{}^{n} a'_n.J^{n+\nu}_{(\rho_1)}.C^{\nu}_{n}(\cos\varphi).$$

Da die Function $\rho^{-\nu}Y^{\nu}_{(\rho)}$ für $\rho=0$ unendlich gross wird, so muss man, um eine für alle φ gültige Entwickelung zu haben, voraussetzen, dass ρ_1 und ρ_2 von einander verschieden sind, und zwar wird hier angenommen, dass $\rho_1<\rho_2$ ist. Der Schluss, den wir bei der Entwickelung von $\rho^{-\nu}J^{\nu}_{(\rho)}$ wegen der Symmetrie von ρ bezüglich ρ_1 und ρ_2 gemacht haben, ist nun hier nicht mehr erlaubt, da ρ_1 und ρ_2 verschiedenen Bedingungen unterworfen sind. Wir erhalten jedoch sofort den Werth von a'_n, wenn wir wieder die Formeln 18.) und 11.) anwenden und sodann $\rho_1=o$ setzen.

Man findet durch das angegebene Verfahren:

$$39.)\qquad a'_n = 2^{n+\nu}\Pi(\nu-1)(n+\nu).(-\rho_2)^n\frac{d^n(\rho_2^{-\nu}Y^{\nu}_{(\rho_2)})}{d(\rho_2^{\,2})^n}$$

Da nun:

$$40.)\qquad \frac{d^n(\rho_2^{-\nu}Y^{\nu}_{(\rho_2)})}{d(\rho_2^{\,2})^n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\rho_2^{-(n+\nu)}Y^{n+\nu}_{(\rho_2)}$$

ist, so verwandelt sich diese Gleichung in:

41.) $$a'_n = 2^\nu \Pi(\nu - 1)(n + \nu)\rho_2^{-\nu} Y^{n+\nu}_{(\rho_2)}.$$

Man hat also die Entwickelung:

42.) $$\rho^{-\nu} Y^{\nu}_{(\rho)} = 2^\nu \Pi(\nu - 1)(\rho_1\rho_2)^{-\nu} \sum_0^\infty {}^n (n + \nu) J^{n+\nu}_{(\rho_1)} \,.\, Y^{n+\nu}_{(\rho_2)} C^{\nu}_n (\cos\varphi).$$

Setzt man in den Gleichungen 37.) und 42.) $\nu = 0$, so erhält man die schon von C. Neumann und Heine bewiesenen Formeln:

43.) $$J^0_{(\rho)} = J^0_{(\rho_1)} J^0_{(\rho_2)} + 2 \sum_1^\infty {}^n J^n_{(\rho_1)} J^n_{(\rho_2)} \cos n\varphi,$$

44.) $$Y^0_{(\rho)} = J^0_{(\rho_1)} Y^0_{(\rho_2)} + 2 \sum_1^\infty {}^n J^n_{(\rho_1)} Y^n_{(\rho_2)} \cos n\varphi.$$

Durch Specialisirung der Gleichungen 37.) und 42.) erhält man auch noch leicht folgende Formeln:

45.) $$J^{\nu}_{(\rho_1+\rho_2)} = \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1\rho_2}\right)^\nu \frac{2^{\nu+1}\Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)} \sum_0^\infty {}^n (-1)^n \frac{\Pi(n + 2\nu - 1)}{\Pi(n)} (n + \nu) J^{n+\nu}_{(\rho_1)} J^{n+\nu}_{(\rho_1)}.$$

46.) $$Y^{\nu}_{(\rho_1+\rho_2)} = \left(\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1\rho_2}\right)^\nu \frac{2^{\nu+1}\Pi(\nu)}{\Pi(2\nu)} \sum_0^\infty {}^n (-1)^n \frac{\Pi(n + 2\nu - 1)}{\Pi(n)} (n + \nu) J^{n+\nu}_{(\rho_1)} Y^{n+\nu}_{(\rho_2)}.$$

47.) $$J^{\nu}_{(\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2})} = \left(\frac{\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}}{\rho_1\rho_2}\right)^{\nu} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(n)} (2n+\nu) J^{2n+\nu}_{(\rho_1)} J^{2n+\nu}_{(\rho_2)}.$$

48.) $$Y^{\nu}_{(\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2})} = \left(\frac{\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2}}{\rho_1\rho_2}\right)^{\nu} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(n)} (2n+\nu) J^{2n+\nu}_{(\rho_1)} Y^{2n+\nu}_{(\rho_2)}.$$

49.) $$\rho_1^{2\nu} = \frac{2^{2\nu+1}[\Pi(\nu)]^2}{\Pi(2\nu)} \sum_0^{\infty} \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)} (n+\nu)\left[J^{n+\nu}_{(\rho_1)}\right]^2.$$

Wir kehren nun wieder zur Formel 11.) zurück und benützen dieselbe zur Herleitung von neuen Integralausdrücken für die Bessel'schen Functionen. Setzt man in dieser Formel für $\varphi(x)$ der Reihe nach die Functionen: $e^{\rho_1 xi}$, $\cos \rho_1 x$, $\sin \rho_1 x$ und berücksichtigt, dass:

50.) $$\int_{-1}^{+1} e^{\rho_1 xi} . (1-x^2)^{\frac{2\mu-1}{2}} . dx = \int_{-1}^{+1} \cos \rho_1 x . (1-x^2)^{\frac{2\mu-1}{2}} dx = 2^{\mu}\sqrt{\pi}\, \Pi\left(\frac{2\mu-1}{2}\right) \rho_1^{-\mu} J^{\mu}_{(\rho_1)}$$

ist, so erhält man sofort:

51.) $$J^{n+\nu}_{(\rho_1)} = \frac{(-i)^n \Pi(n)\Pi(2\nu-1)\rho_1^{\nu}}{2^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Pi(n+2\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} e^{\rho_1 xi} . (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} . C^{\nu}_{n(x)} . dx.$$

52.) $$J^{2n+\nu}_{(\rho_1)} = \frac{(-1)^n \Pi(2n)\Pi(2\nu-1)\rho_1^{\nu}}{2^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Pi(2n+2\nu-1)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \int_{-}^{+1} \cos \rho_1 x . (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} . C^{\nu}_{2n(x)} . dx.$$

$$53.)\quad J^{2n+\nu+1}_{(\rho_1)} = \frac{(-1)^n \Pi(2n+1)\Pi(2\nu-1)\rho_1^{\nu}}{2^{\nu}\sqrt{\pi}\,\Pi(2n+2\nu)\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}$$

$$\int_{-1}^{+1} \sin\rho_1 x \,.\, (1-x^2)^{\frac{2\nu-1}{2}} \,.\, C^{\nu}_{2n+1}(x)\,.\,dx.$$

Aus der Gleichung 51.) ersieht man, dass die Entwickelung der Function $e^{\rho_1 x i}$ nach den Functionen $C^{\nu}_n(x)$ durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$54.)\quad e^{\rho_1 x i} = 2^{\nu}\Pi(\nu-1)\rho_1^{-\nu}\sum_0^{\infty}{}^{n}\, i^n (n+\nu)\, J^{n+\nu}_{(\rho_1)} \,.\, C^{\nu}_n(x).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = 0$ und schreibt 2ν für ν so verwandelt sich dieselbe in:

$$55.)\quad \rho_1^{2\nu} = 2^{2\nu+1}\sum_0^{\infty}{}^{n} \frac{\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n)}(n+\nu)\,.\,J^{2n+2\nu}.$$

Vergleicht man die durch die Gleichungen 49.) und 55.) gegebenen Entwickelungen der Potenz $\rho_1^{2\nu}$ miteinander, so sieht man, dass die Coëfficienten der ersteren Entwickelung denen der letzteren proportional sind, indem sie sich von denselben nur durch den Factor $\frac{[\Pi(\nu)]^2}{\Pi(2\nu)}$ unterscheiden.

Über die unbestimmte Integration einer Gattung transcendenter Functionen.

Von dem w. M. Dr. **Anton Winckler.**

Ganz den Elementen der Integralrechnung angehörend sind die folgenden Formeln fast ausschliesslich das Ergebniss des Verfahrens der theilweisen Integration, angewendet auf Differentialausdrücke, welche ausser algebraischen noch trigonometrische oder exponentielle Functionen in bestimmten Verbindungen enthalten. Die Wirksamkeit jenes Verfahrens zeigen u. A. die in den Lehrbüchern fortlebenden mehr oder weniger allgemeinen Fälle der Instit. calc. integr. von Euler; aber sie erstreckt sich weiter auch auf die bis jetzt fast gar nicht oder doch nur in ihren einfachsten Formen betrachteten unbestimmten Integrale von Functionen der genannten Art, und führt, wie sich zeigen wird, oft auch bei Integralen zum Ziele, welche aus der Umkehrung von Differentialformeln entstanden, keine directe Herleitung ihres bekannten Werthes, sondern nur eine Verification desselben durch Differentiation zu gestatten scheinen.

1.

Wird auf das Integral

$$\int \frac{x^m e^{kx}}{(ax+b)^n} dx$$

die theilweise Integration nach der Formel

$$\int z\,dy = zy - \int y\,dz$$

angewendet, indem man

$$z = x^m e^{kx}, \quad dy = \frac{dx}{(ax+b)^n}$$

setzt, so ergibt sich:

$$zy - \int y\,dz =$$

$$-\frac{1}{(n-1)a} \cdot \frac{x^m e^{kx}}{(ax+b)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)a} \int \frac{(kx+m)x^{m-1} e^{kx}}{(ax+b)^{n-1}} . dx$$

oder, da

$$kx+m = \frac{k}{a} \cdot (ax+b) + \frac{am-bk}{a}$$

ist, und daher das Integral in zwei Theile zerlegt werden kann, die Gleichung:

$$\int \frac{x^m e^{kx}}{(ax+b)^n} . dx =$$

$$-\frac{1}{(n-1)a} \cdot \frac{x^m e^{kx}}{(ax+b)^{n-1}} + \frac{k}{(n-1)a^2} \int \frac{x^{m-1} e^{kx}}{(ax+b)^{n-2}} . dx$$

$$+ \frac{am-bk}{(n-1)a^2} \int \frac{x^{m-1} e^{kx}}{(ax+b)^{n-1}} . dx$$

Ist nun n eine positive ganze Zahl und grösser als 1, so kann durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung das Integral auf ein anderes von der Form

$$\int \frac{x^l e^{kx}}{ax+b} . dx$$

reducirt werden, welches, wenn l ebenfalls eine ganze Zahl und positiv ist, sich, wie leicht zu sehen, auf den Integrallogarithmus zurückführen lässt.

In dem besondern Fall jedoch, wenn $am = bk$, also $b = a \cdot \frac{m}{k}$ ist, verschwindet das zweite Integral auf der rechten Seite und erhält man, wenn zugleich $2n$ für n gesetzt wird:

$$\int \frac{x^m e^{kx}}{(kx+m)^{2n}} . dx =$$

$$-\frac{1}{(2n-1)k} . \frac{x^m e^{kx}}{(kx+m)^{2n-1}} + \frac{1}{(2n-1)k} \int \frac{x^{m-1} e^{kx}}{(kx+m)^{2n-2}} . dx$$

Sind nun m und n positive ganze Zahlen und ist $m \geqq n$, so kann das Integral immer durch wiederholte Anwendung dieser Formel auf $\int x^{m-n} e^{kx} dx$ reducirt, also in endlicher Form gefunden werden.

Für $n = 1$ erhält man

$$\int \frac{x^m e^{kx}}{(kx+m)^2} dx = -\frac{x^m e^{kx}}{k(kx+m)} + \frac{1}{k} \int x^{m-1} e^{kx} dx$$

daher, wenn auch $m = 1$, das bekannte Beispiel:

$$\int \frac{x e^{kx}}{(kx+1)^2} . dx = \frac{k e^{kx}}{kx+1}$$

und wenn $m = 2$ ist:

$$\int \frac{x^2 e^{kx}}{(kx+2)^2} dx = \frac{e^{kx}}{k} \left[-\frac{x^2}{kx+2} + \frac{x}{k} - \frac{1}{k^2} \right]$$

2.

Auf ähnliche Weise lässt sich, wenn p irgend eine Function von x bezeichnet und $\frac{dp}{dx} = p'$, $\frac{d^2 p}{dx^2} = p''$ gesetzt wird, der Werth des Integrals

$$\int \frac{p(p+p'')\, dx}{(p \sin x + p' \cos x)^2}$$

durch Anwendung der theilweisen Integration finden.

Sind nämlich u, v Functionen von x, so besteht offenbar die folgende Gleichung:

$$\int \frac{v}{u^2} dx = -\frac{v}{uu'} + \int \frac{1}{u} . d . \frac{v}{u'}$$

von welcher wiederholt Gebrauch gemacht werden wird, und aus welcher, wenn

$$u = p \sin x + p' \cos x\,,\quad u' = (p+p'')\cos x\,,\quad v = p(p+p'')$$

gesetzt wird, für das vorliegende Integral der Ausdruck:

$$-\frac{p}{(p\sin x + p'\cos x)\cos x} + \int \frac{1}{p\sin x + p'\cos x} \,.\, d\,.\frac{p}{\cos x}$$

folgt. Da nun das letztere Integral durch

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x$$

ausgedrückt werden kann, so gelangt man zu dem Resultat:

$$\int \frac{p(p+p'')\,dx}{(p\sin x + p'\cos x)^2} = \frac{p'\sin x - p\cos x}{p\sin x + p'\cos x} \quad \ldots (1)$$

Hieraus ergibt sich sogleich eine analoge Formel, wenn man $\frac{\pi}{2} - x$ für x setzt, wodurch p in q, also p' in $-q'$ und p'' in q'' übergeht. Man erhält:

$$\int \frac{q(q+q'')\,dx}{(q'\sin x - q\cos x)^2} = \frac{q\sin x + q'\cos x}{q\cos x - q'\sin x} \quad \ldots (2)$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass diese Gleichung auch direct auf dem vorhin befolgten Wege erhalten wird. Diese beiden Resultate sind, wie ich glaube, nicht ohne Interesse, wesshalb einige Beispiele folgen mögen.

Man findet, wenn x^a in (1) für p und in (2) für q gesetzt wird, die Gleichungen:

$$\int \frac{x^2 + a(a-1)}{(x\sin x + a\cos x)^2} \,.\, dx = \frac{a\sin x - x\cos x}{x\sin x + a\cos x}$$

$$\int \frac{x^2 + a(a-1)}{(a\sin x - x\cos x)^2} \,.\, dx = \frac{x\sin x + a\cos x}{x\cos x - a\sin x}$$

Diese gehen für $a = 1$ über in die folgenden:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x + \cos x)^2} = \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x + \cos x}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{(\sin x - x\cos x)^2} = \frac{x\sin x + \cos x}{x\cos x - \sin x}$$

welche aus dem besondern Grunde hervorgehoben zu werden verdienen, weil, wie Herr Hermite in dem kürzlich erschienenen 1. Theil seines schönen Werkes: Cours d'analyse de l'école polytechnique (p. 260) bemerkt, bis jetzt kein Verfahren bekannt ist, diese beiden Gleichungen direct herzuleiten und die Differentiation das einzige Mittel sei, sich von ihrer Richtigkeit zu überzeugen.

Wird ferner in den Formeln (1) und (2) für p und q der Ausdruck

$$e^{\frac{x^{a+1}}{(a+1)b}}$$

gesetzt, so ergibt sich:

$$\int \frac{b^2 + ab\,x^{a-1} + x^{2a}}{(b\sin x + x^a\cos x)^2}\,dx = \frac{x^a\sin x - b\cos x}{b\sin x + x^a\cos x}$$

$$\int \frac{b^2 + ab\,x^{a-1} + x^{2a}}{(b\cos x - x^a\sin x)^2}\,dx = \frac{x^a\cos x + b\sin x}{b\cos x - x^a\sin x}$$

Setzt man endlich in (1) und (2) für p und q den Ausdruck

$$e^{\frac{e^{ax}}{ab}}$$

so ergeben sich die beiden Formeln:

$$\int \frac{b^2 + ab\,e^{ax} + e^{2ax}}{(b\sin x + e^{ax}\cos x)^2}\,.\,dx = \frac{e^{ax}\sin x - b\cos x}{b\sin x + e^{ax}\cos x}$$

$$\int \frac{b^2 + ab\,e^{ax} + e^{2ax}}{(b\cos x - e^{ax}\sin x)^2}\,.\,dx = \frac{e^{ax}\cos x + b\sin x}{b\cos x - e^{ax}\sin x}$$

Alle diese Formeln sind, wie man sieht, einfach Resultate der theilweisen Integration.

3.

Dieses Verfahren führt auch zur Bestimmung des Integrals

$$\int \frac{\frac{1}{p}(p+p'')\cos^2 x}{(p\sin x+p'\cos x)^2}\,.\,dx$$

Denn, setzt man in der Gleichung

$$\int \frac{v}{u^2}\,dx = -\frac{v}{uu'} + \int \frac{1}{u}\,.\,d\,.\,\frac{v}{u'}$$

wieder:

$$u = p\sin x + p'\cos x \quad \text{und} \quad v = \frac{1}{p}(p+p'')\cos^2 x$$

so ergibt sich für das Integral der Ausdruck

$$-\frac{\cos x}{p(p\sin x+p'\cos x)} + \int \frac{1}{p\sin x+p'\cos x}\,.\,d\,.\,\frac{\cos x}{p}$$

worin nach näherer Ausführung der letztere Theil in

$$-\int \frac{dx}{p^2}$$

übergeht. Man hat daher das folgende Resultat:

$$\int \frac{\frac{1}{p}(p+p'')\cos^2 x}{(p\sin x+p'\cos x)^2}\,dx = -\frac{\cos x}{p(p\sin x+p'\cos x)} - \int \frac{dx}{p^2} \quad \ldots(1)$$

wozu sich ein analoges finden lässt, wenn man $\frac{\pi}{2} - x$ für x setzt; denn geht durch diese Substitution p in q, also p' in $-q'$ und p'' in q'' über, so folgt unmittelbar:

$$\int \frac{\frac{1}{q}(q+q'')\sin^2 x}{(q'\sin x - q\cos x)^2}\,dx = -\frac{\sin x}{q(q'\sin x - q\cos x)} - \int \frac{dx}{q^2} \quad \ldots(2)$$

Übrigens kann diese Gleichung, wie die erstere, direct durch theilweise Integration gefunden werden, was nicht näher gezeigt zu werden braucht.

Hieraus geht hervor, dass die beiden hier betrachteten Integrale, wenn p und q rationale Functionen sind, immer und in vielen Fällen auch dann noch gefunden werden können, wenn p und q irrational sind.

Für $p = q = (ax+b)^n$ findet man z. B. die Formeln:

$$\int \frac{[(ax+b)^2 + n(n-1)a^2] \cos^2 x \, . \, dx}{(ax+b)^{2n} [(ax+b) \sin x + na \cos x]^2} =$$

$$\frac{(ax+b) \sin x - (n-1) a \cos x}{(2n-1) a (ax+b)^{2n-1} [(ax+b) \sin x + na \cos x]},$$

$$\int \frac{[(ax+b)^2 + n(n-1)a^2] \sin^2 x \, . \, dx}{(ax+b)^{2n} [(ax+b) \cos x - na \sin x]^2} =$$

$$\frac{(ax+b) \cos x + (n-1) a \sin x}{(2n-1) a (ax+b)^{2n-1} [(ax+b) \cos x + na \sin x]}$$

In dem besondern Fall, wenn $n = 1$ ist, folgt hieraus:

$$\int \frac{a \, dx}{[(ax+b) \operatorname{tang} x + a]^2} = \frac{\operatorname{tang} x}{(ax+b) \operatorname{tang} x + a}$$

$$\int \frac{a \, dx}{[(ax+b) \operatorname{cotg} x - a]^2} = \frac{\operatorname{cotg} x}{(ax+b) \operatorname{cotg} x - a}$$

Die erste dieser beiden Gleichungen kommt ebenfalls an der angeführten Stelle des Werkes von H. Hermite vor; wie man sieht, ist sie allerdings einer directen Herleitung fähig.

In den Gleichungen (1) und (2) werde ferner e^{ax} für p und q gesetzt. Man erhält dann:

$$\int \frac{e^{-2ax} . dx}{(\operatorname{tang} x + a)^2} = \frac{e^{-2ax}}{2a(1+a^2)} \cdot \frac{\operatorname{tang} x - a}{\operatorname{tang} x + a}$$

$$\int \frac{e^{-2ax} . dx}{(\operatorname{cotg} x - a)^2} = \frac{e^{-2ax}}{2a(1+a^2)} \cdot \frac{\operatorname{cotg} x + a}{\operatorname{cotg} x - a}$$

Auch ergeben sich, wenn man für p und q den Ausdruck e^x+e^{-x} setzt, die Formeln:

$$\int\frac{dx}{[(e^x+e^{-x})\,tang\,x+e^x-e^{-x}]^2}=\frac{e^{-x}(tang\,x-1)}{4[(e^x+e^{-x})\,tang\,x+e^x-e^{-x}]}$$

$$\int\frac{dx}{[(e^x+e^{-x})\,cotg\,x-e^x+e^{-x}]^2}=\frac{e^{-x}(cotg\,x+1)}{4[(e^x+e^{-x})\,cotg\,x-e^x+e^{-x}]}$$

welche hiernach, wie alle vorhergehenden, durch die einfachsten Hilfsmittel der Rechnung erhalten werden können.

4.

Es bedarf in manchen Fällen nicht einmal der theilweisen Integration, sondern nur einer leichten Umformung des Ausdrucks unter dem Zeichen, um die Werthe anscheinend complicirter Integrale zu erhalten. Einen bemerkenswerthen Fall dieser Art bildet das Integral

$$\int\frac{p(p^2-pp''+2p'^2)\cos x}{[p\sin x-p'\cos x+p^2]^2}\,.dx$$

Setzt man:

$$u=p\sin x-p'\cos x+p^2\,,\quad v=p(p^2-pp''+2p'^2)\cos x$$

und berechnet wieder

$$u'=2p'\sin x+(p-p'')\cos x+2pp'$$

so folgt:

$$p^2u'=2p^2p'\sin x+p^2(p-p'')\cos x+2p^3p'$$

also

$$v-p^2u'=-2p^2p'\sin x+2pp'^2\cos x-2p^3p'$$

oder

$$v-p^2u'=-2pp'u\,,\quad v=-(2pp'u-p^2u')$$

Das Integral lässt sich daher in folgender Form darstellen:

$$-\int \frac{2pp'u - p^2u'}{u^2}\,dx = -\frac{p^2}{u}$$

und man hat als Resultat die Gleichung

$$\int \frac{p(p^2 - pp'' + 2p'^2)\cos x}{[p\sin x - p'\cos x + p^2]^2}\,.\,dx = -\frac{p^2}{p\sin x - p'\cos x + p^2} \dots (1)$$

Daraus lässt sich, wenn man die vorige Rechnung nicht wiederholen will, ein analoges Integral finden, wenn $\frac{\pi}{2} - x$ für x gesetzt wird, wodurch p in q, also p' in $-q'$ und p'' in q'' übergeht. Es ist daher auch

$$\int \frac{q(q^2 - qq'' + 2q'^2)\sin x}{[q'\sin x + q\cos x + q^2]^2}\,.\,dx = -\frac{q^2}{q'\sin x + q\cos x + q^2} \dots (2)$$

Aus (1) und (2) folgt z. B.

$$\int \frac{x(x^2 + 2)\cos x}{(x\sin x - \cos x + x^2)^2}\,.\,dx = -\frac{x^2}{x\sin x - \cos x + x^2}$$

$$\int \frac{x(x^2 + 2)\sin x}{(\sin x + x\cos x + x^2)^2}\,.\,dx = -\frac{x^2}{\sin x + x\cos x + x^2}$$

Ähnlich kann man bei dem Integral

$$\int \frac{pq + (p'q - pq')\sin x\cos x}{(p\sin x + q\cos x)^2}\,.\,dx$$

verfahren. Wird nämlich

$$u = p\sin x + q\cos x\,, \quad v = pq + (p'q - pq')\sin x\cos x$$

gesetzt und

$$u' = (p' - q)\sin x + (p + q')\cos x$$

berechnet, so findet man:

$$v - u'q\cos x = pq + (q^2 - pq')\sin x\cos x - (pq + qq')\cos^2 x$$
$$= pq\sin^2 x + (q^2 - pq')\sin x\cos x - qq'\cos^2 x$$

oder, da der letztere Ausdruck als Product geschrieben werden kann:

$$v = u' q \cos x + (q \sin x - q' \cos x)(p \sin x + q \cos x)$$

Es ist daher

$$\frac{v}{u^2} dx = \frac{q \cos x . du - u d . q \cos x}{u^2} = -d . \frac{q \cos x}{u}$$

und das in Rede stehende Integral $= -\frac{q \cos x}{u} + C$, wofür man übrigens auch $\frac{p \sin x}{u} + C$ setzen kann.

Wie leicht zu sehen, ergibt sich hieraus die Formel:

$$\int \frac{pq + (p'q - pq') \sin x \cos x}{(p \sin x + q \cos x)^2} . dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{p \sin x - q \cos x}{p \sin x + q \cos x} \quad \ldots (3)$$

Man kann sie übrigens auch auf folgende Art finden.

Wird $\frac{q}{p} = tang\, z$ gesetzt, so erhält der Ausdruck unter dem Integralzeichen die Form

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2z . dx - \sin 2x . dz}{\sin^2 (x+z)}$$

Da nun

$$\sin 2z = \sin (x+z) \cos (x-z) - \cos (x+z) \sin (x-z)$$

$$\sin 2x = \sin (x+z) \cos (x-z) + \cos (x+z) \sin (x-z)$$

so folgt:

$$\sin 2z . dx - \sin 2x . dz =$$

$$\sin (x+z) \cos (x-z) . (dx - dz) - \cos (x+z) \sin (x-z) . (dx + dz)$$

$$= \sin (x+z)\, d \sin (x-z) - \sin (x-z)\, d \sin (x+z)$$

und geht das Integral über in

$$\frac{1}{2}\int\frac{\sin(x+z)\,d\sin(x-z)-\sin(x-z)\,d\sin(x+z)}{\sin^2(x+z)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(x-z)}{\sin(x+z)}$$

woraus offenbar das frühere Resultat wieder hervorgeht.

Die bis jetzt betrachteten Integrale sind so einfacher Art, dass zu ihrer Berechnung die gewöhnlichen Hilfsmittel ausreichen, und diese nicht erst nach dem bereits bekannten Resultate gewählt zu werden brauchen. So gering nun auch die Anzahl der allgemeinen Methoden der Integration ist, so besteht doch kein Zweifel, dass, wenn die letztere überhaupt möglich, immer auch ein Verfahren der directen Herleitung gefunden werden könne; aber dass dies in allen Fällen leicht gelingen werde, auch wenn der Werth des Integrals nicht zum Voraus bekannt ist, kann hieraus nicht geschlossen werden. Aus manchen verhältnissmässig einfachen Formeln scheint vielmehr hervorzugehen, dass in den Elementen der Integralrechnung gewisse, die Rechnung vereinfachende Hilfssätze erst noch zu formuliren wären [1]. So ist z. B. die Gleichung:

$$\int(p^2+q^2+pq'-p'q)\,e^{\int\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)dx}\cdot\frac{\sin x\cos x}{(p\sin x+q\cos x)^2}\cdot dx$$

$$=\frac{\left(p\int\frac{q}{p}\,e^{\int\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)dx}.dx\right).\sin x+\left(q\int\frac{p}{q}\,e^{\int\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)dx}.dx\right).\cos x}{p\sin x+q\cos x}$$

worin p und q beliebige Functionen von x bezeichnen, wie sich durch Differentiation leicht ergibt, ganz richtig, aber es ist jede andere Art ihrer Verification nicht eben so einfach. Dasselbe gilt von der Gleichung:

---

[1] Hierzu gelegentlich die Bemerkung, dass, wenn u, v, w irgend welche Functionen von x bezeichnen, immer die leicht zu verificirende Gleichung stattfindet:

$$u\int\left[\left(\frac{v}{u}\right)'\int uw\,dx\right]dx+v\int\left[\left(\frac{u}{v}\right)'\int vw\,dx\right]dx=0$$

$$\int \frac{p^2+q^2+pq'-p'q}{pq} \cdot e^{\int\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)dx} \cdot \frac{p^2 \sin^2 x+q^2 \cos^2 x}{(p \sin x+q \cos x)^2} \cdot dx$$

$$=\frac{p \sin x-q \cos x}{p \sin x+q \cos x} \cdot e^{\int\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)dx}+\int \frac{pq'-p'q}{pq} e^{\int\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)dx} \cdot dx$$

von deren Richtigkeit man sich übrigens auch durch Verbindung mit der vorigen überzeugen kann.

Es verdient bemerkt zu werden, dass noch allgemeiner die Gleichung

$$\int \frac{r \sin^2 x+s \sin x \cos x+t \cos^2 x}{(p \sin x+q \cos x)^2} \cdot dx =$$

$$\frac{\left(p\int \frac{r-\rho}{p^2}dx\right)\sin x+\left(q\int \frac{t-\rho}{q^2}dx\right)\cos x}{p \sin x+q \cos x}$$

stattfindet, wenn, der Abkürzung wegen:

$$\rho=\frac{q^2 r-pqs+p^2 t}{p^2+q^2+pq'-p'q}$$

gesetzt, die Function s der Bedingung

$$\int \frac{r-\rho}{p^2}dx-\int \frac{t-\rho}{q^2}dx=\frac{\rho}{pq}$$

oder, was dasselbe ist, der linearen Differentialgleichung

$$\rho'+\frac{q^2-p^2-pq'-p'q}{pq} \cdot \rho=\frac{q^2 r-p^2 t}{pq}$$

für gegebene p, q, r, t Genüge leistet.

5.

Das Integral

$$\int \frac{r\,dx}{(p \sin x+q \cos x)^2}$$

von welchem nunmehr die Rede sein soll, wurde im Art. 2 für die beiden Fälle $q=p'$, $r=p(p+p'')$ und $p=-q'$, $r=q(q+q'')$ durch theilweise Integration direct abgeleitet und jedesmal durch einen Bruch dargestellt, dessen Zähler und Nenner lineare Functionen von $\sin x$ und $\cos x$ sind. Wird nun die Frage allgemein nach der Zusammensetzung von r aus p und q gestellt, bei welcher jenes Integral überhaupt und zwar für jede Beschaffenheit der Functionen p und q durch einen Bruch von der bezeichneten Form ausgedrückt werden kann, bei welcher also

$$\int \frac{r\,dx}{(p\sin x+q\cos x)^2}=\frac{P\sin x+Q\cos x}{p\sin x+q\cos x} \qquad \ldots(1)$$

ist, so gelangt man zu einer Formel, in der die beiden früheren Resultate als besondere Fälle enthalten sind.

Durch Differentiation ergibt sich aus (1):

$$r(1+\tang^2 x)=(p\tang x+q)\,[(P'-Q)\tang x+P+Q']$$
$$-(P\tang x+Q)[(p'-q)\tang x+p+q'] \ldots(2)$$

und diese Gleichung kann für alle möglichen Formen von p und q nur bestehen, wenn die drei folgenden aus Vergleichung der Coëfficienten der Potenzen von $\tang x$ sich ergebenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} qP-pQ+pP'-p'P&=r\\ qP-pQ+qQ'-q'Q&=r \qquad \ldots(3)\\ q'P+p'Q-(pQ'+qP')&=0\end{aligned}$$

erfüllt werden. Um aus ihnen r durch p und q bestimmt zu erhalten, eliminire man zunächst P' und Q', was dadurch bewirkt wird, dass man die Gleichungen der Ordnung nach mit q^2, p^2, qp multiplicirt und dann addirt. Es ergibt sich die Gleichung:

$$r=(qP-pQ)\left(1+\frac{pq'-p'q}{p^2+q^2}\right) \qquad \ldots(4)$$

die man übrigens auch unmittelbar findet, wenn in (2) die Substitution $tang\, x = -\frac{q}{p}$ gemacht wird.

Wie leicht zu sehen, gehen nun die beiden ersten der Gleichungen (3), wenn darin für r der gefundene Ausdruck gesetzt wird, in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{P}{p}\right)' &= \left(\frac{P}{p} - \frac{Q}{q}\right) \cdot \frac{pq' - p'q}{p^2 + q^2} \cdot \frac{q}{p} \\ \left(\frac{Q}{q}\right)' &= \left(\frac{P}{p} - \frac{Q}{q}\right) \cdot \frac{pq' - p'q}{p^2 + q^2} \cdot \frac{p}{q} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (5)$$

über, durch deren Subtraction und wenn man der Kürze wegen

$$\rho = \frac{P}{p} - \frac{Q}{q}$$

setzt, sich die Gleichung

$$\rho' = \rho \left(\frac{q}{p} - \frac{p}{q}\right) \frac{pq' - p'q}{p^2 + q^2}$$

ergibt. Schreibt man diese in der Form

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot \frac{p'q - pq'}{pq}$$

und bemerkt, dass:

$$\int \frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} \cdot \frac{p'q - pq'}{pq} \cdot dx = log\, \frac{p^2 + q^2}{pq}$$

so folgt

$$\rho = \frac{p^2 + q^2}{pq}$$

oder also

$$qP - pQ = p^2 + q^2$$

daher aus (4):

$$r = p^2 + q^2 + pq' - p'q$$

und sofort aus (5):

$$P=q\,,\quad Q=-p$$

Der gestellten Aufgabe entspricht also, wenn p und q irgend welche Functionen von x bedeuten sollen, nur der hier gefundene Ausdruck von r, und man hat die Gleichung

$$\int\frac{p^2+q^2+pq'-p'q}{(p\sin x+q\cos x)^2}\,dx=\frac{q\sin x-p\cos x}{p\sin x+q\cos x}\qquad\ldots(6)$$

worüber noch einige Bemerkungen folgen mögen.

6.

Diese Gleichung durch Differentiation zu verificiren ist weniger einfach, als sie direct auch ohne Kenntniss des Resultates der Integration direct abzuleiten. Denn setzt man

$$\frac{q}{p}=tang\,z\,,\quad\text{also}\quad\frac{pq'-p'q}{p^2}=(1+tang^2 z)\frac{dz}{dx}$$

so ergibt sich:

$$\int\frac{p^2+q^2+pq'-p'q}{(p\sin x+q\cos x)^2}.\,dx=\int\frac{d(x+z)}{\sin^2(x+z)}=-\,cotg(x+z)$$

woraus, wie nicht näher gezeigt zu werden braucht, die in Rede stehende Gleichung hervorgeht. Auch sieht man ohne Weiteres, dass dieselbe die Gleichungen (1) und (2) des Art. 2, resp. für $q=p'$ und $p=-q'$ wieder gibt. Das Verfahren, durch welches diese beiden speciellen Gleichungen früher erhalten wurden, war jedoch ein anderes und beruhte auf der theilweisen Integration; man kann daher fragen, ob dieses Verfahren nicht auch zu der allgemeinern Gleichung (6) des vorigen Art. führen würde.

Es sei zur Abkürzung

$$u=p\sin x+q\cos x\,,\quad v=p^2+q^2+p'q-p'q$$

und man gehe wieder von der frühern Formel:

$$\int\frac{v}{u^2}\,dx=-\frac{v}{uu'}+\int\frac{1}{u}.\,d.\,\frac{v}{u'}$$

aus. Wird noch

$$\frac{1}{u} d.\frac{v}{u'} = \frac{v_1}{u'^2} dx$$

gesetzt, so folgt:

$$uv_1 = v'u' - vu''$$

worin nun

$$u' = (p'-q) \sin x + (q'+p) \cos x$$

$$u'' = (p''-2q'-p) \sin x + (q''+2p'-q) \cos x$$

und

$$v' = 2pp'+2qq'+pq''-p''q$$

ist. Mittelst dieser Ausdrücke findet man nach einigen Reductionen:

$$v'u' - vu'' =$$

$$u[p^2+q^2+3(pq'-p'q)+2p'p'+2q'q'-pp''-qq''+p'q''-p''q']$$

Es ist daher

$$v_1 = p^2+q^2+3(pq'-p'q)+2p'p'+2q'q'-pp''-qq''+p'q''-p''q'$$

oder, wenn

$$p_1 = p'-q\,, \quad q_1 = q'+p$$

gesetzt wird:

$$v_1 = p_1^2 + q_1^2 + p_1 q_1' - p_1' q_1$$

Hiernach findet folgende Gleichung statt:

$$\int \frac{p^2+q^2+pq'-p'q}{(p \sin x + q \cos x)^2} . dx =$$

$$-\frac{p^2+q^2+pq'-p'q}{(p \sin x + q \cos x)(p_1 \sin x + q_1 \cos x)} + \int \frac{p_1^2+q_1^2+p_1 q_1' - p_1' q_1}{(p_1 \sin x + q_1 \cos x)^2} . dx$$

Diese stellt eine Reductionsformel im eigentlichen Sinne dar, und lässt sich, weil das Integral, auf welches das gegebene reducirt wird, mit diesem der Art nach vollkommen über-

einstimmt, wiederholt anwenden. Da aber sowohl das gegebene, als das nach $n$maliger Anwendung dieser Formel zum Vorschein kommende Integral nach der Gleichung (6) des vorigen Art. berechnet werden kann, so gelangt man zu einer identischen Gleichung. Wird nämlich nach einander:

$$
\begin{array}{ll}
p_1 = p' - q, & q_1 = q_1' + p \\
p_2 = p_1' - q_1, & q_2 = q_1' + p_1 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
p_\nu = p'_{\nu-1} - q_{\nu-1}, & q_\nu = q'_{\nu-1} + p_{\nu-1} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
p_n = p'_{n-1} - q_{n-1}, & q_n = q'_{n-1} + p_{n-1}
\end{array}
$$

gesetzt (wobei $p_0 = p$, $q_0 = q$ ist), so hat man, weil

$$\int \frac{p_n^2 + q_n^2 + p_n q'_n - p'_n q_n}{(p_n \sin x + q_n \cos x)^2} . dx = \frac{q_n \sin x - p_n \cos x}{p_n \sin x + q_n \cos x}$$

ist, die Gleichung:

$$\frac{pq_n - p_n q}{(p \sin x + q \cos x)(p_n \sin x + q_n \cos x)} =$$

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{p_{\nu-1}^2 + q_{\nu-1}^2 + p_{\nu-1} q'_{\nu-1} - p'_{\nu-1} q_{\nu-1}}{(p_{\nu-1} \sin x + q_{\nu-1} \cos x)(p_\nu \sin x + q_\nu \cos x)}$$

welche, abgesehen von einer gewissen Ähnlichkeit mit den Formeln für gewöhnliche Partialbrüche, schon darum bemerkt zu werden verdient, weil sie zwei ganz willkürliche Functionen p und q enthält, und, soviel mir bekannt, ihrer Art nach neu ist.

Die ursprüngliche Aufgabe, das Integral auf der linken Seite der Gleichung (1) durch theilweise Integration zu finden, erhält, wie man sieht, durch diese Gleichung nicht die aus dem vorigen Art. bereits bekannte einfache und ganz allgemeine Lösung.

7.

Das vorhin mit einiger Umständlichkeit betrachtete Integral ist nur ein sehr specieller Fall des folgenden:

$$\int\left(1+\frac{pq'-p'q}{p^2+q^2}\right)f\left(\frac{p\sin x+q\cos x}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)dx$$

welches immer in endlicher Form gefunden werden kann, wenn $f(u)$ irgend eine rationale Function von u ist.

Denn setzt man wieder

$$\frac{p}{q}=tang\, z$$

so wird

$$\frac{p\sin x+q\cos x}{\sqrt{p^2+q^2}}=\sin(x+z)$$

und

$$\left(1+\frac{pq'-p'q}{p^2+q^2}\right)dx=dx+dz$$

Das Integral erscheint nun in der Form:

$$\int f[\sin(x+z)]\,d(x+z)$$

und lässt sich offenbar immer angeben, wenn $f(u)$ von der bezeichneten Beschaffenheit ist. Für $f(u)=\frac{1}{u^2}$ erhält man die Gleichung (6) des Art. 5.

Wird dagegen $f(u)=u^2$ gesetzt, so folgt:

$$\int\frac{p^2+q^2+pq'-p'q}{(p^2+q^2)^2}(p\sin x+q\cos x)^2dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(x+arctg\frac{q}{p}\right)-\frac{(p^2-q^2)\sin 2x+2pq\cos 2x}{4(p^2+q^2)}$$

Auch das Integral (3) des Art. 4 ist nur ein besonderer Fall des folgenden:

$$\int\frac{pq+(p'q-pq')\sin x\cos x}{(p\sin x+q\cos x)^2}f\left(\frac{p\sin x-q\cos x}{p\sin x+q\cos x}\right)dx$$

welches ebenfalls immer gefunden werden kann, wenn $f(u)$ eine rationale, ganze oder gebrochene Function von u bedeutet.

Dies ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass, wie dort gezeigt wurde, für $tang\, z = \frac{q}{p}$ die Gleichung:

$$\frac{pq + (p'q - pq') \sin x \cos x}{(p \sin x + q \cos x)^2} dx = \frac{1}{2} d. \frac{\sin (x - z)}{\sin (x + z)}$$

und

$$\frac{p \sin x - q \cos x}{p \sin x + q \cos x} = \frac{\sin (x - z)}{\sin (x + z)}$$

stattfindet, dass daher, wenn man zur Abkürzung

$$u = \frac{\sin (x - z)}{\sin (x + z)}$$

setzt, das Integral die einfache Form

$$\frac{1}{2} \int f(u)\, du$$

annimmt, welche rechtfertigt, was behauptet wurde.

Offenbar würde sich dasselbe ergeben, wenn man von der Substitution:

$$u = \frac{p \sin x - q \cos x}{p \sin x + q \cos x}$$

ausgehen und das in Rede stehende Integral transformiren würde.

8.

Findet sich von den bis jetzt betrachteten mehr oder weniger speciellen Integralen selbst in grösseren Werken kaum ein Beispiel, so ist dies noch mehr der Fall bei Integralen, welche zwar von derselben Gattung, aber allgemeinerer Art als jene sind, und ebenfalls sich in geschlossener Form darstellen lassen.

Aus dem folgenden, wie es scheint auch in anderen Fällen anwendbaren Satz ergeben sich mehrere hierher gehörige Resultate.

Lassen sich

$$\int r s' dx$$

und das $n$fache Integral

$$u = \int s^{c_1} s' dx \int s^{c_2} s' dx \ldots \int s^{c_{n-1}} s' dx \int s^{c_n} s' . r dx \qquad \ldots (1)$$

worin r und s Functionen von x bezeichnen, in endlicher Form ausführen, wenn c_1, $c_2, .. c_n$ positive, von Null verschiedene Zahlen bedeuten, so kann auch das Integral

$$\int u . \frac{s'}{s^a} dx \qquad \ldots (2)$$

unter der Voraussetzung, dass

$$a = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + n \qquad \ldots (3)$$

sei, in endlicher Form ausgedrückt werden.

Dies lässt sich wie folgt beweisen. Setzt man zur Abkürzung:

$$\left.\begin{aligned} u &= \int s^{c_1} \; s' . u_1 \; dx \\ u_1 &= \int s^{c_2} \; s' . u_2 \; dx \\ u_2 &= \int s^{c_3} \; s' . u_3 \; dx \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-2} &= \int s^{c_{n-1}} s' . u_{n-1} dx \\ u_{n-1} &= \int s^{c_n} \; s' . r \; dx \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (4)$$

so ergibt sich durch theilweise Integration:

$$\int u . \frac{s'}{s^a} dx = -\frac{u}{(a-1) s^{a-1}} + \frac{1}{a-1} \int \frac{du}{s^{a-1}}$$

und, da

$$du = s^{c_1} s' u_1 dx$$

ist, ebenso

$$\int u_1 \frac{s'}{s^{a-c_1-1}} dx = -\frac{u_1}{(a-c_1-2) s^{a-c_1-2}} + \frac{1}{a-c_1-2} . \int \frac{du_1}{s^{a-c_1-2}}$$

Man hat daher

$$\int u \,.\, \frac{s'}{s^a}\, dx =$$

$$-\frac{u}{(a-1)s^{a-1}}-\frac{u_1}{(a-1)(a-c_1-2)s^{a-c_1-2}}$$

$$+\frac{1}{(a-1)(a-c_1-2)}\int u_2 \,.\, \frac{s'\,dx}{s^{a-c_1-c_2-2}}$$

Auf gleiche Weise kann man mit dem auf der zweiten Seite dieser Gleichung stehenden Integral verfahren, wodurch dieses auf

$$\int \frac{du_2}{s^{a-c_1-c_2-3}}=\int u_3 \frac{s'\,dx}{s^{a-c_2-c_1-c_3-3}}$$

reducirt wird. Durch $n$malige Anwendung dieses Verfahrens erhält man die Gleichung

$$\int u \,.\, \frac{s'\,dx}{s^a}=$$

$$-\frac{u}{(a-1)s^{a-1}}-\frac{u_1}{(a-1)(a-c_1-2)s^{a-c_1-2}}$$

$$- \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad \ldots(5)$$

$$-\frac{u_{n-1}}{(a-1)(a-c_1-2)..(a-c_1-c_2-..-c_{n-1}-n)\,s^{a-c_1-c_2-..-c_{n-1}-n}}$$

$$+\frac{1}{(a-1)(a-c_1-2)..(a-c_1-c_2-..-c_{n-1}-n)}\int r \,.\, \frac{s'\,dx}{s^{a-c_1-c_2-..-c_n-n}}$$

Da nun das letztere Integral nach der in (3) gemachten Annahme sich auf $\int rs'dx$ reducirt und gefunden werden kann, ferner alle Nenner von Null verschieden sind und u, $u_1, ..u_{n-1}$ sich finden lassen, so erhellt die Richtigkeit des Satzes.

9.

Die Voraussetzungen dieses Satzes finden immer statt, wenn eine der Functionen r und s irgend eine ganze rationale Function und die andere eine ganze rationale Verbindung solcher Functionen mit

$$\sin\alpha_1 x,\ \sin\alpha_2 x, \ldots \cos\beta_1 x,\ \cos\beta_2 x, \ldots e^{\gamma_1 x},\ e^{\gamma_2 x}, \ldots$$

ist, sodann $c_1, c_2, \ldots c_n$ positive ganze Zahlen sind.

Eine bemerkenswerthe Anwendung ergibt sich, wenn

$$r = p_1 \sin x + q_1 \cos x$$

und

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c - 1\,, \quad \text{also} \quad a = nc$$

gesetzt wird, wobei p_1, q_1 und s ganze rationale Functionen von x bezeichnen und c eine über der Einheit liegende ganze Zahl vorstellen soll. Man hat dann:

$$u = p_{n+1} \sin x + q_{n+1} \cos x =$$

$$\int s^{c-1} ds \int s^{c-1} ds \ldots \int s^{c-1} ds \int s^{c-1} (p_1 \sin x + q_1 \cos x)\, ds$$

und lassen sich die Gleichungen (4) des vorigen Art. wie folgt schreiben:

$$u \quad = p_{n+1} \sin x + q_{n+1} \cos x = \int s^{c-1} (p_n \,.\, \sin x + q_n \,.\, \cos x)\, ds$$

$$u_1 \quad = p_n \,.\, \sin x + q_n \,.\, \cos x = \int s^{c-1} (p_{n-1} \sin x + q_{n-1} \cos x)\, ds$$

$$u_2 \quad = p_{n-1} \sin x + q_{n-1} \cos x = \int s^{c-1} (p_{n-2} \sin x + q_{n-2} \cos x)\, ds$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = p_2 \,.\, \sin x + q_2 \,.\, \cos x = \int s^{c-1} (p_1 \,.\, \sin x + q_1 \,.\, \cos x)\, ds$$

wenn auch unter $p_2, p_3, \ldots p_{n+1}, q_2, q_3, \ldots q_{n+1}$ ganze rationale Functionen verstanden werden, die, wenn man von der letzten dieser Gleichungen ausgeht, nach einander berechnet werden können. Dies vorausgesetzt, geht die Gleichung (5) des vorigen Art. über in die folgende:

$$\int \frac{p_{n+1} \sin x + q_{n+1} \cos x}{s^{nc}} . ds =$$

$$-\frac{p_{n+1} \sin x + q_{n+1} \cos x}{(nc-1)\, s^{nc-1}} - \frac{p_n \sin x + q_n \cos x}{(nc-1)((n-1)c-1)\, s^{(n-1)c-1}}$$

$$-\frac{p_{n-1} \sin x + q_{n-1} \cos x}{(nc-1)((n-1)c-1)((n-2)c-1)\, s^{(n-2)c-1}} - \ldots$$

$$\ldots(1)$$

$$-\frac{p_2 \sin x + q_2 \cos x}{(nc-1)((n-1)c-1)((n-2)c-1) \,.\,.(c-1)\, s^{c-1}}$$

$$+\frac{1}{(nc-1)((n-1)c-1)((n-2)c-1) \,.\,.(c-1)} \times$$

$$\times \int (p_1 \sin x + q_1 \cos x)\, ds$$

Diese Gleichung zu erhalten, ist, wie man sieht, höchst einfach; in ihr selbst aber liegt ein sehr beachtenswerthes specielles Resultat. Für den besondern Fall:

$$p_1 = 1\,, \quad q_1 = -x\,, \quad s = x\,, \quad c = 2$$

ergibt sich nämlich:

$$\begin{aligned}
p_2 &= -x^2 + 3 \,, & q_2 &= -3x \\
p_3 &= -6x^2 + 15 \,, & q_3 &= x^3 - 15x \\
p_4 &= x^4 - 45x^2 + 105 \,, & q_4 &= 10x^3 - 105x \\
p_5 &= 15x^4 - 420x^2 + 945, & q_5 &= -x^5 + 105x^3 - 945x
\end{aligned} \quad \ldots(A)$$

u. s. w., und dies sind, bis auf das Zeichen genau, resp. die Nenner und Zähler der Näherungsbrüche des nach Lambert benannten Kettenbruches

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \,.}}}$$

so dass allgemein $-\frac{q_m}{p_m}$ den m. Näherungsbruch desselben darstellt, und diese Nenner und Zähler aus dem $m-1$fachen Integral

$$\int x\,dx \int x\,dx \ldots \int x(\sin x - x\cos x)\,dx = p_m \sin x + q_m \cos x \ldots (2)$$

erhalten werden. Da dieses Integral, ebenfalls durch wiederholte theilweise Integration explicite als Function von m ausgedrückt werden kann, so lässt sich zugleich eine independente Darstellung der Näherungsbrüche von $\tang x$ finden.

Dies vorausgeschickt, verwandelt sich nun, wenn p_m und q_m, als die Nenner und Zähler dieser Näherungsbrüche, aus der Gleichung (2) berechnet werden, die Gleichung (1) in die folgende:

$$\int \frac{p_{n+1}\sin x + q_{n+1}\cos x}{x^{2n}}\,.\,dx =$$

$$-\frac{p_{n+1}\sin x + q_{n+1}\cos x}{(2n-1)\,x^{2n-1}} - \frac{p_n \sin x + q_n \cos x}{(2n-1)(2n-3)\,x^{2n-3}} \quad \ldots (3)$$

$$-\frac{p_{n-1}\sin x + q_{n-1}\cos x}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\,x^{2n-5}} - \ldots - \frac{p_2 \sin x + q_2 \cos x}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1\,.\,x}$$

$$+\frac{1}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}\cdot\int (p_1 \sin x + q_1 \cos x)\,dx$$

woraus hervorgeht, dass das linker Hand stehende Integral immer in endlicher Form ausgedrückt werden kann.

Die Gleichungen (1), (2), (3) bleiben, wenn man darin $\sin(x+\alpha)$, $\cos(x+\alpha)$, resp. für $\sin x$ und $\cos x$ setzt, in jeder andern Hinsicht durchaus ungeändert, wie aus ihrer Herleitung unmittelbar sich ergibt. Setzt man nun $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so treten $\cos x$ und $-\sin x$ an die Stelle von $\sin x$ und $\cos x$ und entsteht aus der Gleichung (3) die folgende:

$$\int \frac{p_{n+1}\cos x - q_{n+1}\sin x}{x^{2n}} . dx =$$

$$-\frac{p_{n+1}\cos x - q_{n+1}\sin x}{(2n-1)\, x^{2n-1}} - \frac{p_n \cos x - q_n \sin x}{(2n-1)(2n-3)\, x^{2n-3}}$$

$$\ldots (4)$$

$$-\frac{p_{n-1}\cos x - q_{n-1}\sin x}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\, x^{2n-5}} - \ldots - \frac{p_2 \cos x - q_2 \sin x}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1 . x}$$

$$+ \frac{1}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1} . \int (p_1 \cos x - q_1 \sin x)\, dx$$

worin die Functionen $p_1, p_2, \ldots q_1, q_2, \ldots$ dieselben wie in (3) sind. Übrigens hätte man die Gleichung (4) auch unmittelbar aus (1) dadurch erhalten können, dass man $x \sin x$ und 1 für p_1 und q_1 gewählt hätte.

Wird z. B. $n = 1$ gesetzt, so erhält man aus (3) und (4):

$$\int \frac{(3 - x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^2} . dx =$$

$$-\frac{(3 - x^2)\sin x - 3x\cos x}{x} - (2\cos x + x\sin x),$$

$$\int \frac{(3 - x^2)\cos x + 3x\sin x}{x^2} . dx =$$

$$-\frac{(3 - x^2)\cos x + 3x\sin x}{x} + 2\sin x - x\cos x$$

Nach den gemachten Bemerkungen liegt es nahe, die beiden Gleichungen (3) und (4) in eine einzige zu vereinigen, und diese zugleich nach einer andern Richtung allgemeiner zu gestalten.

Sowie man nämlich $\sin(x+\alpha)$, $\cos(x+\alpha)$ an die Stelle von $\sin x$, $\cos x$ treten lassen kann, so hindert auch nichts daran, in der Gleichung (2) die Nenner und Zähler p_m, q_m des m. Näherungsbruches von $\operatorname{tang} x$ statt jener p_1, q_1 des ersten zu Grunde zu legen und daher allgemein:

$$\int x\,dx \int x\,dx \ldots \int x\,dx \int x\,(p_m \sin(x+\alpha)+q_m \cos(x+\alpha))\,dx$$

$$= p_{m+\mu} \sin(x+\alpha) + q_{m+\mu} \cos(x+\alpha)$$

zu setzen, worin nunmehr die Anzahl der Integrationen μ beträgt, so dass für $\mu = 1, 2, 3, \ldots n$ die erforderlichen Functionen gefunden werden. Da alsdann in der Gleichung (1) die Indices der p und q um $m-1$ Einheiten vorrücken, so ergibt sich die Gleichung:

$$\int \frac{p_{m+n} \sin(x+\alpha) + q_{m+n} \cos(x+\alpha)}{x^{2n}} . dx =$$

$$- \frac{p_{m+n} \sin(x+\alpha) + q_{m+n} \cos(x+\alpha)}{(2n-1)x^{2n-1}}$$

$$- \frac{p_{m+n-1} \sin(x+\alpha) + q_{m+n-1} \cos(x+\alpha)}{(2n-1)(2n-3)\,x^{2n-3}}$$

$$- \frac{p_{m+n-2} \sin(x+\alpha) + q_{m+n-2} \cos(x+\alpha)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\,x^{2n-5}} - \ldots \qquad \ldots(5)$$

$$- \frac{p_{m+1} \sin(x+\alpha) + q_{m+1} \cos(x+\alpha)}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1 . x}$$

$$+ \frac{1}{(2n-1)(2n-3) \ldots 1} . \int (p_m \sin(x+\alpha) + q_m \cos(x+\alpha)) . dx$$

welche nun die Gleichungen (3) und (4) als specielle Fälle für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in sich enthält, und nicht nur für den Fall, dass $-\frac{q_m}{p_m}$ ein Näherungsbruch von $tang\, x$ ist, sondern allgemein gilt, welche ganze rationelle Functionen für p_m und q_m gewählt werden mögen, was übrigens rücksichtlich p_1 und q_1, ebenso auch bei (3) und (4) der Fall ist.

Man findet z. B., wenn $m = n = 2$, $p_2 = 3 - x^2$, $q_2 = -3x$ gesetzt wird, das Resultat:

$$\int \frac{dx}{x^4}[(x^4-45x^2+105)\sin(x+\alpha)+(10x^3-105x)\cos(x+\alpha)]$$

$$=\frac{1}{x^3}[(10x^2-35)\sin(x+\alpha)+(35x-x^3)\cos(x+\alpha)]$$

von dessen Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann.

Aus der Gleichung (5) ergibt sich ferner, wenn man $m=0$ und $p_0=1$, $q_0=0$ setzt und unter $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$ die in (A) bezeichneten Ausdrücke versteht, die Gleichung:

$$\int \frac{p_n \sin(x+\alpha)+q_n \cos(x+\alpha)}{x^{2n}}.dx =$$

$$-\frac{p_n \sin(x+\alpha)+q_n \cos(x+\alpha)}{(2n-1)x^{2n-1}}$$

$$-\frac{p_{n-1} \sin(x+\alpha)+q_{n-1} \cos(x+\alpha)}{(2n-1)(2n-3)x^{2n-3}}$$

$$-\frac{p_{n-2} \sin(x+\alpha)+q_{n-2} \cos(x+\alpha)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)x^{2n-5}}-\ldots$$

$$-\frac{p_1 \sin(x+\alpha)+q_1 \cos(x+\alpha)}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1.x}$$

$$-\frac{\cos(x+\alpha)}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}$$

worin, wie man sieht, die Ordnungszahl der Näherungsbrüche von $\tang x$ um eine Einheit niederiger als in (3) und (4) ist.

10.

Die Gleichung (5) des Art. 8 führt in vielen anderen Fällen zu bemerkenswerthen Resultaten, worüber in Kürze nur das Folgende angeführt werden mag.

1. Wird in jener Gleichung

$$r=p_1(e^x-e^{-x})+q_1(e^x+e^{-x})$$

ferner

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c - 1\,, \quad \text{also} \quad a = nc$$

und

$$u = p_{n+1}(e^x - e^{-x}) + q_{n+1}(e^x + e^{-x})$$

$$= \int s^{c-1} ds \int s^{c-1} ds \,.\,. \int s^{c-1} ds \int s^{c-1} [p_1(e^x - e^{-x}) + q_1(e^x + e^{-x})]\, ds$$

gesetzt, wobei p_1, q_1 und s ganze rationale Functionen von x bezeichnen und c eine über 1 liegende ganze Zahl ist, sodann die Anzahl der Integrationen n beträgt, so lässt sich das Integral

$$\int \frac{ds}{s^{nc}} [p_{n+1}(e^x - e^{-x}) + q_{n+1}(e^x + e^{-x})]$$

in geschlossener Form ausführen.

In dem besondern Fall, wenn $s = x$, $c = 2$ und $p_1 = 1$, $q_1 = -x$ gesetzt, also p_m, q_m aus dem $m-1$fachen Integral

$$\int x\,dx \int x\,dx \ldots \int x\,dx \int x[e^x - e^{-x} - x(e^x + e^{-x})]\, dx$$

$$= p_m(e^x - e^{-x}) + q_m(e^x + e^{-x})$$

berechnet werden, stellt, wie schon nach dem Vorhergehenden sich erwarten liess, $-\frac{q_m}{p_m}$ den m. Näherungsbruch des bekannten Kettenbruches

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 + \cfrac{x^2}{5 + \ldots}}}$$

dar. Man erhält z. B. aus der Gleichung (5) des Art. 8 für $n = 1$ die Formel:

$$\int \frac{dx}{x^2} [(x^2 + 3)(e^x - e^{-x}) - 3x(e^x + e^{-x})] =$$

$$\frac{1}{x} [-3(e^x - e^{-x}) + x(e^x + e^{-x})]$$

2. Zu einer allgemeinern Gattung findbarer Integrale führt ferner auch die Annahme

$$r = x^b, \quad s = p \sin(x+\alpha) + q \cos(x+\alpha)$$

wenn b eine positive ganze Zahl bedeutet und p, q ganze rationale Functionen sind. Die in der Gleichung (5) des Art. 8 vorkommenden Integrale u, $u_1, \ldots$ sind dann ebenfalls ausführbar, wenn unter c_1, $c_2, \ldots$ positive ganze Zahlen verstanden werden.

3. Wird in jener Gleichung

$$r = \frac{1}{\sin(x+\alpha)}, \quad s = a \sin(x+\alpha) - (ax+b)\cos(x+\alpha)$$

und $n=1$, $c_1=1$ gesetzt, so ergibt sich die Formel:

$$\int (ax+b)\sin(x+\alpha) \, . \, \frac{[3a^2-(ax+b)^2]\sin(x+\alpha) - 3a(ax+b)\cos(x+\alpha)}{[a\sin(x+\alpha)-(ax+b)\cos(x+\alpha)]^2} \, dx$$

$$= \frac{(ax+b)^2}{2a} - \frac{[3a^2-(ax+b)^2]\sin(x+\alpha) - 3a(ax+b)\cos(x+\alpha)}{a\sin(x+\alpha)-(ax+b)\cos(x+\alpha)}$$

welche übrigens, wie die Formeln (1) und (2) der Art. 2 und 3 nur ein besonderer Fall der leicht sich unmittelbar ergebenden Gleichung:

$$\int \left(\frac{p}{t}\right)^n \frac{p''t-pt''}{(p't-pt')^2} \, . \, dx$$

$$= -\left(\frac{p}{t}\right)^n \cdot \frac{1}{p't-pt'} + n\int \left(\frac{p}{t}\right)^{n-1} \frac{dx}{t^2}$$

ist, in der p und t beliebige Functionen von x bezeichnen.

11.

Das $n$fache Integral

$$u=\int_a^x s^c s' dx \int_a^x s^c s' dx \dots \int_a^x s^c s' dx \int_a^x s^c s' F(x) dx \qquad \dots(1)$$

von welchem hier öfter die Rede ist, kann durch ein einfaches, analog wie dies für den Fall $s=x$, $c=0$ bekannt ist, ausgedrückt werden.

Es sei

$$s^{c+1}=z\,, \qquad s^c s' dx = \frac{dz}{c+1}$$

und es folge hieraus $z=\alpha$ für $x=a$. Ferner sei

$$F(x)=\psi^{(n)}(z)$$

Man hat dann

$$u=\frac{1}{(c+1)^n}\int_\alpha^z dz \int_\alpha^z dz \dots \int_\alpha^z dz \int_\alpha^z \psi^{(n)}(z)\, dz$$

oder also:

$$(c+1)^n . u =$$

$$\psi(z)-\psi(\alpha)-(z-\alpha)\psi'(\alpha)-\frac{(z-\alpha)^2}{2!}\psi''(\alpha)-\dots-\frac{(z-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\psi^{(n-1)}(\alpha)$$

Da der rechts stehende Ausdruck der Rest der n ersten Glieder der Taylor'schen Reihe ist, so folgt hieraus:

$$u=\frac{1}{(c+1)^n\,(n-1)!}\int_\alpha^z (z-\sigma)^{n-1}\psi^{(n)}(\sigma)\, d\sigma$$

Wird nun der Werth, welchen s für $x=a$ erhält, mit s_0 bezeichnet, also

$$\alpha = s_0^{c+1}$$

gesetzt und angenommen, aus der Gleichung $s^{c+1}=\sigma$ folge

$$x=\lambda(\sigma)$$

so findet man

$$u = \frac{1}{(c+1)^n (n-1)!} \cdot \int_{s_0^{c+1}}^{s^{c+1}} (s^{c+1} - \sigma)^{n-1} F(\lambda(\sigma))\, d\sigma \qquad \ldots (2)$$

welches nun die verlangte Darstellung des Integrals (1) ist.

In dem besondern Fall, wenn $s = x$ ist, ergibt sich, wenn an Stelle der Variabeln σ eine andere t nach der Gleichung

$$\sigma = t^{c+1}, \quad d\sigma = (c+1) t^c\, dt$$

gesetzt wird:

$$u = \frac{1}{(c+1)^{n-1} (n-1)!} \int_a^x t^c (x^{c+1} - t^{c+1})^{n-1} F(t)\, dt$$

Es ist daher

$$\int_a^x x^c\, dx \int_a^x x^c\, dx \ldots \int_a^x x^c\, dx \int_a^x x^c F(x)\, dx =$$

$$\frac{1}{(c+1)^{n-1} (n-1)!} \cdot \int_a^x t^c (x^{c+1} - t^{c+1})^{n-1} F(t)\, dt \qquad \ldots (3)$$

wobei das Integral linker Hand ein $n$faches ist.

Wird

$$F(x) = p_0 \sin(x+\alpha) + q_0 \cos(x+\alpha)$$

gesetzt, und versteht man unter p_0, q_0 ganze rationale Functionen von x, unter c aber eine positive ganze Zahl, so lässt sich jenes Integral in der Form $p_n \sin(x+\alpha) + q_n \cos(x+\alpha)$ denken, worin p_n, q_n wieder ganze Functionen sein werden.

Aus der Gleichung

$$p_n \sin(x+\alpha) + q_n \cos(x+\alpha) =$$

$$\int_a^x x^c\, dx \int_a^x x^c\, dx \ldots \int_a^x x^c\, dx \int_a^x x^c (p_0 \sin(x+\alpha) + q_0 \cos(x+\alpha))\, dx \qquad \ldots (4)$$

und aus der durch Differentiation folgenden

$$(p'_n - q_n) \sin x + \alpha) + (p_n + q'_n) \cos(x+\alpha) =$$

$$x^c \int_a^x x^c\,dx \ldots \int_a^x x^c\,dx \int_a^x x^c (p_0 \sin(x+\alpha) + q_0 \cos(x+\alpha))\,dx$$

$$= x^c (p_{n-1} \sin(x+\alpha) + q_{n-1} \cos(x+\alpha))$$

ergeben sich, wenn man einmal $\alpha = 0$ und dann $\alpha = \frac{\pi}{2}$ setzt, die Gleichungen:

$$p_n \sin x + q_n \cos x =$$

$$\int_a^x x^c\,dx \int_a^x x^c\,dx \ldots \int_a^x x^c\,dx \int_a^x x^c (p_0 \sin x + q_0 \cos x)\,dx,$$

$$\ldots (5)$$

$$p_n \cos x - q_n \sin x =$$

$$\int_a^x x^c\,dx \int_a^x x^c\,dx \ldots \int_a^x x^c\,dx \int_u^x x^c (p_0 \cos x - q_0 \sin x)\,dx$$

und

$$p'_n - q_n = x^c p_{n-1}, \quad p_n + q'_n = x^c q_{n-1} \qquad \ldots (6)$$

sodann aus den beiden letztern:

$$p_n^2 + q_n^2 + p_n q'_n - p'_n q_n = x^c (p_n q_{n-1} - p_n q_{n-1}) \qquad \ldots (7)$$

Ferner können die Integrale in (5) mittelst der Gleichung (3) durch einfache ausgedrückt werden. Denkt man sich in p_0, q_0 statt x die Variable t gesetzt, ohne diese Veränderung durch neue Zeichen anzudeuten, so folgt:

$$p_n \sin x + q_n \cos x =$$

$$\frac{1}{(c+1)^{n-1}(n-1)!} \int_a^x t^c (x^{c+1} - t^{c+1})^{n-1} (p_0 \sin t + q_0 \cos t)\,dt$$

$$\ldots (8)$$

$$p_n \cos x - q_n \sin x =$$

$$\frac{1}{(c+1)^{n-1}(n-1)!} \int_a^x t^c (x^{c+1} - t^{c+1})^{n-1} (p_0 \cos t - q_0 \sin t)\,dt$$

woraus p_n, q_n als rationale Functionen nach erfolgter Integration durch Vergleichung der Coëfficienten von $\sin x$ und $\cos x$ erhalten werden können.

12.

Für ein Beispiel sei

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 0, \quad a = 0, \quad c = 1.$$

Da

$$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x$$

so geht die erste der Gleichungen (5) des vorigen Art. über in

$$p_n \sin x + q_n \cos x =$$

$$\int x\, dx \int x\, dx \ldots \int x\, dx \int x (\sin x - x \cos x)\, dx$$

wenn man, wie bisher immer geschehen ist, alle Integrationsconstanten Null setzt. Diese Gleichung stimmt mit jener (2) des Art. 9 überein, und es bedeuten daher p_n, q_n dieselben auf den Kettenbruch für $\operatorname{tang} x$ sich beziehenden Functionen wie dort. Aus (8) folgt daher:

$$\left.\begin{aligned} p_n \sin x + q_n \cos x &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \int_0^x t (x^2 - t^2)^{n-1} \sin t \, dt \\ p_n \cos x - q_n \sin x &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \int_0^x t (x^2 - t^2)^{n-1} \cos t \, dt \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

und es können somit p_n, q_n nach vollzogener Integration explicite auf die am Schlusse des vorigen Art. bezeichnete Weise auch aus (1) gefunden werden.

Im vorliegenden Fall ist ferner die oben erhaltene Gleichung (7) die folgende:

$$p_n^2 + q_n^2 + p_n q'_n - p'_n q_n = x (p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})$$

Da nun nach einem bekannten Satz der Lehre von den Kettenbrüchen aus der Gleichung

$$\frac{q_n}{p_n} = \cfrac{-b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots - \cfrac{b_n}{a_n}}}}$$

folgt:

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = b_1 b_2 \ldots b_n$$

und da im vorliegenden Falle

$$b_1 = x, \quad b_2 = b_3 = \ldots = b_n = x^2$$

ist, so erhält man

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = x^{2n-1} \qquad \ldots(2)$$

folglich:

$$p_a^2 + q_n^2 + p_n q'_n - p'_n q_n = x^{2n} \qquad \ldots(3)$$

Werden also, wie bisher unter p_n, q_n die rein rationalen Theile der aus (1) folgenden Integrale

$$\left.\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\int_0^x t(x^2-t^2)^{n-1} \cos(t-x)\,dt \\ q_n &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\int_0^x t(x^2-t^2)^{n-1} \sin(t-x)\,dt \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(4)$$

verstanden, so genügen diese Theile der Gleichung (2).

Wie bekannt, findet auch die Gleichung

$$\frac{q_n}{p_n} = \frac{a_n q_{n-1} - b_n q_{n-2}}{a_n p_{n-1} - b_n p_{n-2}}$$

statt, aus welcher

$$a_n(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}) = b_n(p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2})$$

folgt. Mit Rücksicht auf (2) und wenn man bemerkt, dass $a_n = 2n-1$ ist, hat man also auch:

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (2n-1)\,x^{2n-3} \qquad \ldots(5)$$

Die rationalen Theile der aus (4) in diese Gleichung eingesetzten Integrale müssen daher derselben ebenfalls genügen.

Es sei noch bemerkt, dass die Gleichung (6) des Art. 5 bei der jetzigen Bedeutung von p und q und weil die vorhin erhaltene Gleichung (3) stattfindet, in die folgende:

$$\int \frac{x^{2n}\,dx}{(p_n \sin x + q_n \cos x)^2} = \frac{q_n \sin x - p_n \cos x}{p_n \sin x + q_n \cos x}$$

übergeht, welche ebenfalls im ersten Bande des Werkes von Hermite (p. 360) jedoch ohne Herleitung mitgetheilt ist, bezüglich deren der Herr Verfasser auf den noch nicht erschienenen zweiten Band verweist.

13.

Die Möglichkeit, auf dem Wege der theilweisen Integration ein Integral auszuführen, lässt sich in einem Falle nachweisen, welcher von weit allgemeinerer Art als der im Art. 8 betrachtete ist. Es findet nämlich auch der folgende Satz statt.

Bezeichnen $r_1, r_2, \ldots r_m$ und s Functionen von x und $c_1, c_2, \ldots c_n$ von Null verschiedene positive ganze Zahlen, wofür jedes einzelne der in

$$v_1 = \int s^{c_1} s'\,dx \int s^{c_2} s'\,dx \ldots \int s^{c_{n-1}} s'\,dx \int s^{c_n} s' r_1\,dx$$

$$v_2 = \int s^{c_1} s'\,dx \int s^{c_2} s'\,dx \ldots \int s^{c_{n-1}} s'\,dx \int s^{c_n} s' r_2\,dx$$

. . . .

$$v_m = \int s^{c_1} s'\,dx \int s^{c_2} s'\,dx \ldots \int s^{c_{n-1}} s'\,dx \int s^{c_n} s' r_m\,dx$$

enthaltenen 1, 2, .. $n$fachen Integrale, sowie auch die Integrale der aus ihnen und je einem Factor von der Form $s^b s'\,dx$ gebildeten Producte gefunden werden können, wenn b irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, so lässt sich auch das Integral

$$\int v_1 v_2 \ldots v_m \cdot \frac{s'}{s^a}\,dx\,, \quad a = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + n$$

immer dann finden, wenn $c_1, c_2, .. c_n$ insgesammt entweder einander gleich oder ungerade Zahlen sind.

Der Beweis ergibt sich durch wiederholte theilweise Integration. Zunächst erhält man:

$$\int v_1 v_2 \ldots v_m \cdot \frac{s'}{s^a} dx = -\frac{v_1 v_2 \ldots v_m}{(a-1)s^{a-1}} + \frac{1}{a-1}\int \frac{d \cdot v_1 v_2 \ldots v_m}{s^{a-1}} \ldots (1)$$

und es werden sich, wenn man den Ausdruck unter dem Zeichen des Integrals rechter Hand entwickelt, m Glieder ergeben, wovon jedes den Factor $\frac{s' dx}{s^{a-c_1-1}}$ enthält. Wendet man nun auf jedes dieser Glieder wieder die theilweise Integration in der Art an, dass der genannte Factor integrirt, der andere aber differentiirt wird, so ergeben sich, da durch die Differentation der letzteren und zwar bei dem einen der Factor $s^{c_2} s'$, bei dem andern $s^{c_1} s'$ frei wird, aus den Integralen jener m Glieder andere, unter deren Zeichen resp. die Factoren

$$\frac{s' dx}{s^{a-2c_1-2}} \quad \text{und} \quad \frac{s' dx}{s^{a-c_1-c_2-2}}$$

vorkommen, worin, wie man sieht, die Exponenten von s resp. um (c_1+1) und (c_2+1) kleiner als in dem frühern Nenner s^{a-c_1-1} sind. Durch Anwendung der theilweisen Integration auf diese neuen Glieder entstehen, wenn dabei die angegebenen Factoren integrirt, die anderen dagegen differentiirt werden, weitere Integrale, unter deren Zeichen resp. die Factoren:

$$\frac{s' dx}{s^{a-3c_1-3}}, \quad \frac{s' dx}{s^{a-2c_1-c_2-3}}$$

und

$$\frac{s' dx}{s^{a-2c_1-c_2-3}}, \quad \frac{s' dx}{s^{a-c_1-c_2-c_3-3}}$$

erscheinen, in welchen die Exponenten von s wieder um (c_1+1), (c_2+1), (c_3+1) kleiner als früher sind. Wenn man in dieser Weise fortfährt, und immer das Augenmerk auf die Exponenten der im Nenner auftretenden Potenzen von s richtet, wird man zu einer Anzahl von Integralen gelangen, welche bei

aller sonstigen Verschiedenheit, doch rücksichtlich jener Potenzen sich unter eine gemeinschaftliche Form bringen lassen. In dem rechts der Gleichung (1) stehenden Integral wird nämlich bei jeder partiellen Integration der Exponent von s im Nenner um eine der Zahlen (c_1+1), (c_2+1), (c_3+1),.. vermindert, so dass derselbe, nachdem das bezeichnete Verfahren auf jenes Integral mehrfach wiederholt angewendet worden ist, die Form:

$$b_\mu = a - [\alpha_1(c_1+1) + \alpha_2(c_2+1) + \ldots + \alpha_\mu(c_\mu+1)] \quad \ldots (2)$$

annehmen wird, wenn die α positive ganze Zahlen von der Beschaffenheit bezeichnen, dass

$$m \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_\mu$$

und $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu$ die Anzahl der auf

$$\int \frac{d.v_1 v_2 \ldots v_m}{s^{a-1}}$$

applicirten theilweisen Integrationen ist. Die Integrale, auf welche letzteres hierdurch reducirt wird, sind daher von der Form

$$\int u . \frac{s' dx}{s^{b_\mu}}$$

wobei u durch Differentiation der v erhalten werden kann und ein Product von m Factoren darstellt.

Es ist nun zu zeigen, dass unter den Voraussetzungen des Satzes b_μ bei keinem jener Integrale $+1$ werden, sondern immer theils zu Null, theils zu einer negativen ganzen Zahl gemacht werden kann, dass also die in den v vorkommenden Potenzen von s, welche nach und nach durch Differentiation von dem Integralzeichen frei werden, immer hinreichen, den Exponenten a zu erschöpfen, ohne dass bei fortgesetzter theilweiser Integration einmal $\log s$ auftritt.

Für den ersten in dem vorangestellten Satz bezeichneten Fall, dass

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n \doteq c,$$

ist

$$a = nc + n = n(c+1)$$

und hat man also aus (2):

$$b_\mu = (c+1)[n-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu)]$$

Da nun nach der Voraussetzung alle c von Null verschieden sind, so kann, wie aus dieser Gleichung folgt, b_μ nicht $=+1$ werden. Da ferner bei allen aus der $n$maligen Anwendung der partiellen Integration hervorgehenden Theilintegralen $b_\mu = 0$ wird, also unter dem Zeichen keine Potenz von s im Nenner mehr vorkommt, und diese Integrale, ebenfalls nach der Voraussetzung, findbar sind, so ist für den Fall einander gleicher c der Satz bewiesen.

Ebenso leicht ergibt sich der Beweis für den zweiten Fall, in welchem $c_1, c_2, \ldots c_n$ insgesammt ungerade Zahlen sind. Denn hier ist in der Gleichung (2):

$$\alpha_1(c_1+1)+\alpha_2(c_2+1)+\ldots+\alpha_\mu(c_\mu+1) = 2h$$

sowie auch

$$a = c_1+c_2+\ldots+c_n+n$$

$$= (c_1+1)+(c_2+1)+\ldots+(c_n+1) = 2k$$

eine gerade Zahl und hat man:

$$b_\mu = 2k-2h$$

woraus folgt, dass auch in diesem Fall b_μ nicht $=+1$ werden kann.

Bei allen Theilintegralen, welche aus der $n$mal wiederholten partiellen Integration dadurch entstanden sind, dass immer nur eine der Functionen $v_1, v_2, \ldots v_n$ der Differentiation unterzogen wurde, bei welchen also $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 1$ ist, wird offenbar $b_\mu = 0$. Nach der Voraussetzung sind also jene Integrale findbar.

Bei allen übrigen Integralen wird nach $n$maliger theilweiser Integration b_μ im Allgemeinen nicht Null, aber man kann diese Operation noch weiter und zwar so lange fortsetzen, also $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu$ so gross werden lassen, dass durch die in den v vom Integralzeichen nach und nach frei werdenden Potenzen von s der Exponent b_μ durchgehend negativ wird, jene Inte-

grale also insgesammt in solche übergehen, welche nach der Voraussetzung gefunden werden können, da sie von der Form

$$\int s^b \, s' \, u \, dx$$

sind, worin u ein Product von 1, 2,. .$n$fachen Integralen ist, welche in v_1, $v_2, \ldots v_m$ vorkommen. Hierdurch ist Alles bewiesen, was behauptet wurde.

14.

Werden die Functionen r_1, $r_2, \ldots r_m$ einander gleich gesetzt, so wird $v_1 = v_2 = \ldots = v_m$ und ergibt sich für diesen Fall das Folgende.

Wenn jedes der in:

$$v = \int s^{c_1} s' \, dx \int s^{c_2} s' \, dx \ldots \int s^{c_{n-1}} s' \, dx \int s^{c_n} s' . r \, dx$$

enthaltenen 1, 2,. .$n$fachen Integrale, sowie auch die Integrale der aus ihnen und je einem Factor von der Form $s^b s' dx$ gebildeten Producte gefunden werden können, sofern b irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet, so lässt sich auch das Integral

$$\int v^m . \frac{s'}{s^a} dx \,, \qquad a = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + n$$

immer dann finden, wenn c_1, $c_2, \ldots c_n$ positiv und von Null verschieden, insgesammt entweder einander gleich oder ungerade Zahlen sind.

Obgleich die Anwendbarkeit dieses und des vorhergehenden Satzes von mehreren Voraussetzungen abhängt, so bleibt sie doch keineswegs auf sehr specielle Fälle beschränkt. Denn auch hier (wie im Art. 8) finden jene Voraussetzungen immer statt, wenn r und s Functionen von der im Eingang des Art. 9 bezeichneten Beschaffenheit sind.

Für einen sehr einfachen Fall dieser Art werde z. B. angenommen, die Functionen r_1, $r_2, \ldots r_m$ des vorigen Art. ergeben sich insgesammt aus dem Ausdruck:

$$p_1 \sin x + q_1 \cos x = \varphi(x)$$

worin p_1, q_1 ganze rationale Functionen von x bezeichnen, wenn man darin $a_1 x$, $a_2 x$, . . $a_m x$ für x setzt; es sei also:

$$r_1 = \varphi(a_1 x), \quad r_2 = \varphi(a_2 x), \ldots r_m = \varphi(a_m x)$$

Wird ausserdem

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = c, \quad \text{und} \quad A_\mu = \frac{1}{a_\mu^{n(c+1)}}$$

gesetzt, und unter c eine der Zahlen 1, 2.. verstanden, so ist

$$v_1 = A_1 f(a_1 x) = \int x^c dx \int x^c dx \ldots \int x^c dx \int x^c \varphi(a_1 x) dx$$

$$v_2 = A_2 f(a_2 x) = \int x^c dx \int x^c dx \ldots \int x^c dx \int x^c \varphi(a_2 x) dx$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$v_m = A_m f(a_m x) = \int x^c dx \int x^c dx \ldots \int x^c dx \int x^c \varphi(a_m x) dx$$

und folgt aus dem vorigen Art., dass das Integral:

$$\int \frac{f(a_1 x) f(a_2 x) \ldots f(a_m x)}{x^{2n}} dx$$

immer gefunden werden kann.

Der specielle, aber bemerkenswerthe Fall dieses Resultates, welcher für $c = 1$, $p_1 = 1$, $q_1 = 0$, $m = 2$ erhalten wird, ist, meines Wissens, allein bekannt und von Herrn Hermite a. a. O. (p. 360), jedoch ohne Beweis, angeführt. Demselben entspricht, weil

$$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x$$

ist, und wenn man wieder, wie im Art. 9, mit p_n und $-q_n$ den Nenner und Zähler des n. Näherungsbruches des früher für $\tan x$ angegebenen Kettenbruches bezeichnet, die Gleichung:

$$\begin{aligned} f(x) = p_n \sin x + q_n \cos x = \\ \int x\,dx \int x\,dx \ldots \int x\,dx \int x(\sin x - x \cos x)\,dx \end{aligned} \quad \ldots (1)$$

wobei die Anzahl der Integrationen $n-1$ beträgt.

Für diesen Fall ergibt sich also, dass das Integral

$$\int \frac{f(a_1 x) f(a_2 x)}{x^{2n}} dx$$

gefunden werden kann.

Übrigens verdient bemerkt zu werden, dass auch noch ein hierzu analoges Resultat stattfindet. Setzt man nämlich $p_1 = 0$, $q_1 = x$, so ist für dieselbe Bedeutung von p_n, q_n, weil

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x$$

ist:

$$f(x) = p_n \cos x - q_n \sin x = \int x \, dx \int x \, dx \ldots \int x (x \sin x + \cos x) \, dx \ldots (2)$$

und folgt, dass auch hier das Integral

$$\int \frac{f(a_1 x) f(a_2 x)}{x^{2n}} dx$$

sich immer finden lässt. Wie die in (1) und (2) eingeführten Functionen $f(x)$ in Form einfacher Integrale ausgedrückt werden können, ist aus Art. 12, Gleichung (1) bekannt.

15.

Der Satz des Art. 8 lässt sich nicht nur, wie vorhin geschehen, sondern in einer ganz andern Richtung beträchtlich verallgemeinern.

Es werde der Kürze wegen

$$u = \frac{d . s_1 d . s_2 . . d . s_{n-1} d . s_n r}{dx^n} \quad \ldots (1)$$

und

$$v = \int \frac{dx}{s_1} \int \frac{dx}{s_2} \ldots \int \frac{dx}{s_{n-1}} \int \frac{dx}{s_n} . t \quad \ldots (2)$$

gesetzt und angenommen, die Functionen $s_1, s_2, \ldots s_n, t$ von x seien so beschaffen, dass die in v vorkommenden $1, 2, 3, \ldots n$fachen Integrale insgesammt ausgeführt werden können, und dass dies namentlich auch bei

$$\int r t \, dx$$

der Fall sei. Unter diesen Voraussetzungen kann das Integral

$$\int u\,v\,dx$$

in endlicher Form gefunden werden. Dies lässt sich leicht auf folgende Art zeigen. Es sei:

$$\left.\begin{aligned}
v &= \int \frac{dx}{s_1} v_1\,, & u &= \frac{d\,.\,s_1 u_1}{dx}\\
v_1 &= \int \frac{dx}{s_2} v_2\,, & u_1 &= \frac{d\,.\,s_2 u_2}{dx}\\
v_2 &= \int \frac{dx}{s_3} v_3\,, & u_2 &= \frac{d\,.\,s_3 u_3}{dx}\\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots\\
v_{n-1} &= \int \frac{dx}{s_n}\,.\,t\,, & u_{n-1} &= \frac{d\,.\,s_n r}{dx}
\end{aligned}\right\} \ldots(3)$$

und man wende auf das bezeichnete Integral das Verfahren der theilweisen Integration n mal nach einander in der Weise an, dass die v differentiirt, die u dagegen integrirt werden. Es ergibt sich dabei

$$\int u\,v\,dx = s_1 u_1 v - \int u_1 v_1 dx$$

$$\int u_1 v_1 dx = s_2 u_2 v_1 - \int u_2 v_2 dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int u_{n-2} v_{n-2} dx = s_{n-1} u_{n-1} v_{n-2} - \int u_{n-1} v_{n-1} dx$$

$$\int u_{n-1} v_{n-1} dx = s_n\, r\, v_{n-1} - \int r\,t\,dx$$

und hat man also:

$$\begin{aligned}
\int u\,v\,dx = \\
s_1 u_1 v - s_2 u_2 v_1 + s_3 u_3 v_3 - \ldots + (-1)^{n-2} s_{n-1} u_{n-1} v_{n-2} + (-1)^{n-1} r v_{n-1}\\
+ (-1)^n \int r\,t\,dx
\end{aligned} \qquad \ldots(4)$$

In dieser sehr allgemeinen Formel ist jene (5) des Art. 8 als besonderer Fall enthalten; sie ergibt sich daraus, wenn man

$$\frac{1}{s_1} = s^{c_1} s', \quad \frac{1}{s_2} = s^{c_2} s', \ldots \frac{1}{s_n} = s^{c_n} s'$$

und

$$u = \frac{s'}{s^a}, \quad a = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + n$$

setzt, wodurch man aus (3) nach einander auch $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ finden kann.

Wird dagegen

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 1$$

gesetzt, wofür

$$v = v, \quad v_1 = v', \quad v_2 = v'', \ldots v_{n-1} = v^{(n-1)}$$

und $t = v^{(n)}$ sich ergibt, und nimmt man zugleich an, es sei:

$$u = z^{(m)}, \quad u_1 = z^{(m-1)}, \quad u_2 = z^{(m-2)}, \ldots u_{n-1} = z^{(m-n+1)}$$

wofür $r = z^{(m-n)}$ folgt, so erhält man aus (4) die Gleichung

$$\int v z^{(m)} dx =$$
$$v z^{(m-1)} - v' z^{(m-2)} + \ldots + (-1)^{(n-1)} v^{(n-1)} z^{(m-n)} + (-1)^n \int v^{(n)} z^{(m-n)} dx$$

die bekanntlich Joh. Bernouilli zugeschrieben wird, und die, wie man sieht, nur ein besonderer Fall von (4) ist.

Ein anderer bemerkenswerther Fall der Gleichung (4) entspricht den Annahmen $u = s' f^{(n)}(s)$ und

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = \frac{1}{s'}$$

wofür

$$u_1 = s' f^{(n-1)}(s), \quad u_2 = s' f^{(n-2)}(s), \ldots u_{n-1} = s' f'(s), \quad r = s' f(s)$$

und

$$v_1 = s' v', \quad v_2 = \frac{s' d \,.\, s' v'}{dx}, \quad v_3 = \frac{s' d \,.\, s' d \,.\, s' v'}{dx^2}, \ldots$$

also

$$v = \int s' dx \int s' dx \ldots \int s' dx \int s' t \, dx$$

erhalten wird.

$$\int u\,v\,dx$$

in endlicher Form gefunden werden. Dies lässt sich leicht auf folgende Art zeigen. Es sei:

$$\left.\begin{array}{llll}
v &= \int \frac{dx}{s_1} v_1\,, & u &= \frac{d\,.\,s_1 u_1}{dx} \\
v_1 &= \int \frac{dx}{s_2} v_2\,, & u_1 &= \frac{d\,.\,s_2 u_2}{dx} \\
v_2 &= \int \frac{dx}{s_3} v_3\,, & u_2 &= \frac{d\,.\,s_3 u_3}{dx} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
v_{n-1} &= \int \frac{dx}{s_n}\,.\,t\,, & u_{n-1} &= \frac{d\,.\,s_n r}{dx}
\end{array}\right\} \ldots (3)$$

und man wende auf das bezeichnete Integral das Verfahren der theilweisen Integration n mal nach einander in der Weise an, dass die v differentiirt, die u dagegen integrirt werden. Es ergibt sich dabei

$$\int u\;v\;dx = s_1 u_1 v - \int u_1 v_1 dx$$

$$\int u_1 v_1 dx = s_2 u_2 v_1 - \int u_2 v_2 dx$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\int u_{n-2} v_{n-2} dx = s_{n-1} u_{n-1} v_{n-2} - \int u_{n-1} v_{n-1} dx$$

$$\int u_{n-1} v_{n-1} dx = s_n\; r\, v_{n-1} - \int r\,t\,dx$$

und hat man also:

$$\int u\,v\,dx = \qquad \ldots (4)$$

$$s_1 u_1 v - s_2 u_2 v_1 + s_3 u_3 v_3 - \ldots + (-1)^{n-2} s_{n-1} u_{n-1} v_{n-2} + (-1)^{n-1} r v_{n-1}$$

$$+ (-1)^n \int r\,t\,dx$$

In dieser sehr allgemeinen Formel ist jene (5) des Art. 8 als besonderer Fall enthalten; sie ergibt sich daraus, wenn man

$$\frac{1}{s_1} = s^{c_1} s', \quad \frac{1}{s_2} = s^{c_2} s', \ldots \frac{1}{s_n} = s^{c_n} s'$$

und

$$u = \frac{s'}{s^a}, \quad a = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + n$$

setzt, wodurch man aus (3) nach einander auch $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$ finden kann.

Wird dagegen

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 1$$

gesetzt, wofür

$$v = v, \quad v_1 = v', \quad v_2 = v'', \ldots v_{n-1} = v^{(n-1)}$$

und $t = v^{(n)}$ sich ergibt, und nimmt man zugleich an, es sei:

$$u = z^{(m)}, \quad u_1 = z^{(m-1)}, \quad u_2 = z^{(m-2)}, \ldots u_{n-1} = z^{(m-n+1)}$$

wofür $r = z^{(m-n)}$ folgt, so erhält man aus (4) die Gleichung

$$\int v z^{(m)}\, dx =$$

$$v z^{(m-1)} - v' z^{(m-2)} + \ldots + (-1)^{(n-1)} v^{(n-1)} z^{(m-n)} + (-1)^n \int v^{(n)} z^{(m-n)}\, dx$$

die bekanntlich Joh. Bernouilli zugeschrieben wird, und die, wie man sieht, nur ein besonderer Fall von (4) ist.

Ein anderer bemerkenswerther Fall der Gleichung (4) entspricht den Annahmen $u = s' f^{(n)}(s)$ und

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = \frac{1}{s'}$$

wofür

$$u_1 = s' f^{(n-1)}(s), \quad u_2 = s' f^{(n-2)}(s), \ldots u_{n-1} = s' f'(s), \quad r = s' f(s)$$

und

$$v_1 = s' v', \quad v_2 = \frac{s' d \,.\, s' v'}{dx}, \quad v_3 = \frac{s' d \,.\, s' d \,.\, s' v'}{dx^2}, \ldots$$

also

$$v = \int s' dx \int s' dx \ldots \int s' dx \int s' t\, dx$$

erhalten wird.

Aus (4) ergibt sich hiermit eine Gleichung, durch welche

$$\int f^{(n)}(s) \cdot s' v \, dx$$

auf

$$\int f(s) \cdot s' t \, dx$$

reducirt wird.

Über eine Erweiterung der Lehre von den Kugelfunctionen und die hierbei entspringenden Entwicklungsarten einer Function in unendliche Reihen.

Von Dr. **H. Frombeck**,

Privatdocenten für Mathematik an der k. k. Wiener Universität.

(Vorgelegt in der Sitzung am 26. März 1874.)

A. Vorbemerkungen.

Das Problem, welches den folgenden Ausführungen zu Grunde liegt, nöthigt für's erste zu einer Kritik des bekannten Satzes: „man kann eine Function nur auf Eine Art in Cosinus- oder Sinusreihen auflösen." Aus dem Umstande, dass die Function vollkommen willkürlich gewählt, ihr Begriff also im weitesten Sinne gefasst werden darf, folgt sofort die widersprechende Natur jenes Satzes. In der That, sei einmal die zu verwandelnde Function $F(x)$

$$\begin{aligned}&= \varphi(x) \text{ zwischen } 0 \text{ und } a,\\ &= f(x) \text{ von } x=a \text{ bis } x=b, \text{ endlich}\\ &= \psi(x) \text{ für } b<x<\pi,\end{aligned}$$

ein anderesmal seien aber dieselben Bestimmungen nur mit Zuhilfenahme anderer willkürlicher Begrenzungen a' und b' gegeben, so hat man bekanntlich

$$\Sigma \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx \int_0^a \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, ny\, \varphi(y)\, dy\Bigg\}$$

$$+\Sigma \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx \int_a^b \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, ny\, f(y)\, dy\Bigg\}$$

$$+\Sigma \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} nx \int_b^\pi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, ny\, \psi(y)\, dy\Bigg\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\varphi(x) \text{ für alle } x \text{ zwischen } 0 \text{ und } a,$$

$$= \frac{\pi}{2} f(x) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad x \quad \text{„} \quad a \quad \text{„} \quad b,$$

$$= \frac{\pi}{2}\psi(x) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad x \quad \text{„} \quad b \quad \text{„} \quad \pi.$$

Hier beweist zunächst die Unabhängigkeit der Grössen a und b, φ, f und ψ, dass die Reihenentwicklung zwischen 0 und π nur möglich ist, wenn auch allgemein die Reihe

$$\Sigma \left\{ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx \int_a^b \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} ny\, f(y)\, dy \right\}$$

für sich $\frac{\pi}{2} f(x)$ zur Summe gibt für $a<x<b$, und verschwindet, wenn $x>a$ und $<b$ ist. Also besteht die Eindeutigkeit der Entwicklung in allen Punkten mit Ausnahme der Coëfficientenbegrenzung, welche willkürlich bleibt, wie die zu entwickelnde Function. Man kann hiernach die Doppelgleichung

$$\frac{2}{\pi}\Sigma \left\{ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx \int_a^b \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} ny\, f(y)\, dy \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Sigma \left\{ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx \int_{a'}^{b'} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} ny\, f(y)\, dy \right\} = f(x)$$

insoweit beliebig ansetzen, als die Intervalle a und b, a' und b' nicht völlig auseinanderliegen und als x den beiden Intervallen gemeinsam angehört. Es deckt diese Überlegung den Fehler des apagogischen Beweises auf, der für die Ausschliesslichkeit der Begrenzungen 0 und π gewöhnlich vorgebracht wird. Wenn es, wie die Entwicklung unter Zuhilfenahme jener Grenzen selbst lehrt, Reihen mit beliebigen und zwar kleineren Giltigkeitsintervallen gibt als 0 und π, so kann ihre Subtraction nur für die gemeinschaftlichen Werthe der Intervalle verschwinden. Die Annahme einer zwischen 0 und π von Null nicht verschiedenen Reihendifferenz postulirt also bereits das zu beweisende Resultat.

Man kann sich, nachdem das allgemeine Resultat aus einem speciellen Falle gewonnen ist, auf die kürzeste Weise direct von seiner Richtigkeit überzeugen. Von den Integralen der Reihen zwischen a und b bleibt als für die Reihensumme entscheidend der erlangten Bestimmung zufolge nur übrig die jedesmalige Integration zwischen den unendlich nahen Grenzen $x-0$ und $x+0$. Wenden wir hier den Maximum-Minimumsatz an, so erhalten wir in der Grenze

$$\left\{\begin{matrix}\frac{b-a}{2}\\ 0\end{matrix} \pm \left(\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} b - \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} a\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} x \right.$$

$$\left. \pm \frac{1}{2}\left(\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2b - \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} 2a\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} 2x \pm \ldots \right\} f(x),$$

wo $b = x+0$, $a = x-0$. Die eingeklammerten Reihen, welche den einfachsten Fall der allgemeinen Summirung, $f(x) = 1$, darstellen und leicht in Aggregate einfacherer Reihen zerfällt werden können, reduciren sich für $a < x < b$, wie es sein muss, auf $\frac{\pi}{2}$ und verschwinden im übrigen. Dass diese Bestimmung theoretisch auch für den Grenzfall gilt, wo $a = x = b$, erkennt man leicht, wenn man die Differenzen $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} nb - \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} na$ in die Producte $\pm 2 \sin n \frac{b-a}{2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n \frac{b+a}{2}$ umsetzt. Schreibt man, um den Grenzfall zu fixiren, für $\frac{2}{n} \sin n \frac{b-a}{2}$ einfach dx, $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nx$ für $\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n \frac{b+a}{2}$ so entsteht die Form $0.\infty$

$$dx \Sigma \left\{\begin{matrix}\cos^2\\ \sin^2\end{matrix} nx\right\},$$

aus welcher die Nothwendigkeit eines Werthes >0 zu entnehmen ist. Ein ähnliches Raisonnement erlauben die den periodischen Reihen coordinirten und äquivalenten Fourier'schen Integrale

$$\frac{\pi}{2} f(x) = \int_0^\infty \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} ux \int_a^b \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} uy f(y)\, dy = f(x)\, dx \int_0^\infty \begin{matrix}\cos^2\\ \sin^2\end{matrix} ux\, du.$$

Der Nutzen solcher Betrachtungen wird auffälliger, wenn man von dem bestimmenden Einflusse singulärer sowohl wie continuirlicher Orte der Divergenz in viel complicirteren Bildungen eine deutliche Anschauung gewinnen will; der Maximum-Minimumsatz ist überdies befähigt, in manchen schwierigeren Fällen das Resultat selbst in exacter Weise darzustellen. Was die periodischen Reihen betrifft, auf welche die Behandlung allgemeinerer Aufgaben stets zurückzugreifen hat, so verlangt es ihre fundamentale Bedeutung, ihre unveränderliche Modular- oder Normalform festzustellen. Sie erscheint als der Ausdruck der Reduction einer verschwindenden Modularreihe $\Sigma \cos nx$ auf das Integral $\int_0^\infty \cos xu\, du = 0$ und zieht durch successive Differentiation andere Äquivalenzen nach sich, deren keine irgend welche annähernde numerische Berechnung zulässt; ihr Beweis aber liegt in der willkürlichen Integration, wodurch sie in numerische Gleichungen übergeht, und wonach sie die Anwendung aller übrigen Operationen gestattet. Auf solchem Wege wird sie dann schliesslich in die Äquivalenzformel der periodischen Reihen und Fourier'schen Integrale selbst übergeführt. Man kann nun umgekehrt nach der periodischen Reihe und dem Doppelintegral selbst fragen, die mit der Normalreihe identisch sind. Auf dieses Problem möge, weil es für das folgende von einigem Interesse ist, mit wenig Worten eingegangen werden.

Es möge von der bekannten Entwicklung der Cotangente ausgegangen werden

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{\pi - z} - \frac{1}{2\pi - z} - \frac{1}{3\pi - z} - \dots$$
$$+ \frac{1}{\pi + z} + \frac{1}{2\pi + z} + \frac{1}{3\pi + z} + \dots \quad -\infty < z < +\infty.$$

Man kann hiernach die Cotangente auch als Summe unendlich vieler unbegrenzter Integrale darstellen, wie folgt

$$\frac{1}{2}\cot\frac{z}{2} = \int_0^\infty \sin zu\, du - \int_0^\infty \sin(2\pi - z)\,u\, du$$
$$+ \int_0^\infty \sin(2\pi + z)\,u\, du - \dots$$

und diese Entwicklung zeigt wieder die Existenz einer periodischen Reihe an mit unbegrenzten Integrationen und dem Integrale $\int_0^\infty \sin zu\, du$ als Function. Ein Coëfficient der Reihe hat die Form

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin yu \sin ny\, du\, dy = 1,$$

also besitzt die Reihe identische Coëfficienten 1 und man findet das Resultat

$$\frac{1}{2}\cot\frac{z}{2} = \sum_0^\infty \sin nz.$$

Integrirt man diese mit $\sin nz\, dz$ multiplicirte Gleichung, so ergibt sich

$$\int_0^\pi \cot\frac{z}{2}\sin nz\, dz = \pi;$$

wenn man aber für z einmal $x+y$, sodann $x-y$ setzt, hierauf addirt und subtrahirt und wieder integrirt, so erfolgt

$$\int_0^\pi \frac{\sin y \cos nx}{\cos x - \cos y}\, dx = \pi \sin ny,$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin x \sin nx}{\cos y - \cos x}\, dx = \pi \cos ny.$$

Diese Gleichungen lösen die gestellte Aufgabe; man findet ferner die Ausdrücke

$$\pi^2 \sin ny = \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin y \sin z}{(\cos x - \cos y)(\cos x - \cos z)} \sin nz\, dx\, dz,$$

$$\pi^2 \cos ny = \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin^2 x \cos nz}{(\cos y - \cos x)(\cos z - \cos x)}\, dx\, dz,$$

welche für die Coëfficienten der Reihen

$$\Sigma \cos nx \cos ny, \quad \Sigma \sin nx \sin ny$$

einzutreten haben. Fügt man diesen Bestimmungen die analogen Formeln

$$\pi^2 \sin ny = 4\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{yz\sin nz}{(y^2-x^2)(z^2-x^2)}\,dx\,dz,$$

$$\pi^2 \cos ny = 4\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{x^2\cos nz}{(y^2-x^2)(z^2-x^2)}\,dx\,dz$$

bei, so entspringen für die Reihensummen die Identitäten

$$\int\limits_0^\infty \cos ux \cos uy\,du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin^2 z\,dz}{(\cos z-\cos y)(\cos z-\cos x)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{z^2\,dz}{((2n\pi\pm x)^2-z^2)(y^2-z^2)} = 0,$$

$$\int\limits_0^\infty \sin ux \sin uy\,du = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\sin x \sin y\,dz}{(\cos x-\cos z)(\cos y-\cos z)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{(2n\pi\pm x)\,y\,dz}{((2n\pi\pm x)^2-z^2)(y^2-z^2)} = 0.$$

Die Methode, diese Identitäten zu bestätigen, besteht in der Zerlegung der Differentialausdrücke in Partialbrüche. Hierbei zeigt sich, dass, wie es sein muss, im Falle $y=x$ beiderseits Divergenz eintritt; in der ersten Formel ist im mittleren Ausdrucke der Summand $\frac{1}{2}$ nothwendig, den Werthen der Coëfficienten entsprechend, welche je nach der Integrationenfolge gleich

$$0,\ \cos y,\ \cos 2y, \ldots$$

oder gleich

$$\frac{1}{2},\ 0,\ 0 \ldots$$

gefunden werden. Hiermit ist die Reduction in der gewünschten Weise erledigt; sie ist wichtig, weil sie den Zusammenhang der periodischen Reihenlehre mit den discontinuirlichen Integralen darlegt. Für unseren gegenwärtigen Zweck sind die letzteren

insofern von Bedeutung, als sie einen Grenzfall des uns fortan vorliegenden Problemes darstellen:
„die auf Grund der Integration der Differentialausdrücke mit dem Nenner

$$(\cos x - \cos y)^{\mu}, \quad 0 \leqq \mu < 1,$$

entspringenden Entwicklungen einer Function in unendliche Reihen anzugeben.“

Indem wir zur Behandlung dieses Problemes schreiten, welches im speciellen Falle $\mu = \frac{1}{2}$ mit der Lehre von den Kugelfunctionen zusammentrifft, erwähnen wir schon hier, dass der Fall $\mu = 0$ auf die gewöhnlichen periodischen Reihen zurückführen wird, während die Fälle $\mu \geqq 1$ ihrer unaufhebbaren Divergenz halber von der Betrachtung ausgeschlossen bleiben. Es bildet einen Hauptzweck der Untersuchung, welche wir vornehmen, den wichtigsten Fall, die Kugelfunctionen, in ihrer allgemeinsten Bedeutung zu erfassen und mancherlei Unklarheit, ja wohl auch Unrichtigkeit, welche eine falsche Beschränkung der periodischen Reihenlehre verschuldet hat, nach Möglichkeit aufzuheben.

B. Die Coëfficienten von $(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\mu}$.

Für alle Hauptprobleme der bestimmten Integralrechnung werden immer Dirichlet's Arbeiten mustergiltig sein, nicht blos der Ergebnisse wegen, welche der Meister selbst in ihnen niedergelegt, sondern auch durch die überaus zweckmässige Wahl der Hilfsgrössen, welche vielfach zu neuen Untersuchungen anregen und bei allen verwandten Aufgaben nicht ohne grossen Nachtheil bei Seite gesetzt werden. Entsprechend seiner Behandlungsweise in der Lehre von den Kugelfunctionen entwickeln wir den Ausdruck

$$R = (1 + 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\mu}, \quad \alpha = e^{\psi i}$$

als complexe Zahl. Wir erhalten, wenn $\psi < \gamma$

$$R = \frac{\cos\mu\psi}{2^{\mu}(\cos\psi - \cos\gamma)^{\mu}} + i\frac{\sin\mu\psi}{2^{\mu}(\cos\psi - \cos\gamma)^{\mu}} = G + Hi,$$

wenn $\psi > \gamma$

$$R' = \frac{\cos\mu(\pi-\psi)}{2^\mu(\cos\gamma-\cos\psi)^\mu} + i\frac{\sin\mu(\pi-\psi)}{2^\mu(\cos\gamma-\cos\psi)^\mu} = G'+H'i,$$

wobei immer $0 < {\gamma \atop \psi} < \pi$ vorausgesetzt werden möge. Wird nun R und R' nach Potenzen von α in Reihen entwickelt, so wird man allerdings nur auf Eine Weise annehmen können

$$R = \Sigma P_n \alpha^n, \quad R' = \Sigma P'_n \alpha_n,$$

indem nach der Theorie der periodischen Reihen

$$P_n = P'_n =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\mu\psi\cos n\psi}{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]^\mu}d\psi + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\cos\mu(\pi-\psi)\cos n\psi}{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]^\mu}d\psi =$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin\mu\psi\sin n\psi}{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]^\mu}d\psi + \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin\mu(\pi-\psi)\sin n\psi}{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]^\mu}d\psi;$$

nicht das gleiche wird aber von den R äquivalenten Theilen der complexen Zahlen $G+Hi$, $G'+H'i$ gelten. Diese werden auf unendlich viele Arten in Cosinus- und Sinusreihen aufgelöst werden können. Zwar besitzen unter diesen nicht alle Fälle die gleiche Wichtigkeit; die folgenden aber werden immerhin unsere Beachtung verdienen

$$G = \Sigma p^1_n \cos n\psi, \quad p^1_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\mu\psi\cos n\psi}{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]^\mu}d\psi,$$

$$= \Sigma q^1_n \sin n\psi, \quad q^1_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\cos\mu\psi\sin n\psi}{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]^\mu}d\psi;$$

$$-H = \Sigma p^3_n \cos n\psi, \quad p^3_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin\mu\psi\cos n\psi}{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]^\mu}d\psi,$$

$$= \Sigma q^3_n \sin n\psi, \quad q^3_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\gamma \frac{\sin\mu\psi\sin n\psi}{[2(\cos\psi-\cos\gamma)]^\mu}d\psi;$$

$$G' = \cos\mu\pi\,\Sigma\, \overset{2}{p}_n \cos n\psi \qquad \overset{2}{p}_n = \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\cos\mu\psi\cos n\psi}{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]^\mu}\,d\psi,$$

$$+\sin\mu\pi\,\Sigma\,\overset{4}{p}_n\cos n\psi;$$

$$= \cos\mu\pi\,\Sigma\,\overset{2}{q}_n\sin n\psi \qquad \overset{4}{p}_n = \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin\mu\psi\cos n\psi}{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]^\mu}\,d\psi;$$

$$+\sin\mu\pi\,\Sigma\,\overset{4}{q}_n\sin n\psi;$$

$$H' = \sin\mu\pi\,\Sigma\,\overset{2}{p}_n\cos n\psi \qquad \overset{2}{q}_n = \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\cos\mu\psi\sin n\psi}{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]^\mu}\,d\psi,$$

$$-\cos\mu\pi\,\Sigma\,\overset{4}{p}_n\cos n\psi;$$

$$= \sin\mu\pi\,\Sigma\,\overset{2}{q}_n\sin n\psi \qquad \overset{4}{q}_n = \frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi \frac{\sin\mu\psi\sin n\psi}{[2(\cos\gamma-\cos\psi)]^\mu}\,d\psi.$$

$$-\cos\mu\pi\,\Sigma\,\overset{4}{q}_n\sin n\psi;$$

Man findet vor allem die Relationen

$$\overset{2}{p}_n(\gamma) = (-1)^n \left\{\cos\mu\pi\,\overset{1}{p}_n(\pi-\gamma) + \sin\mu\pi\,\overset{3}{p}_n(\pi-\gamma)\right\},$$

$$\overset{4}{p}_n(\gamma) = (-1)^n \left\{\sin\mu\pi\,\overset{1}{p}_n(\pi-\gamma) - \cos\mu\pi\,\overset{3}{p}_n(\pi-\gamma)\right\};$$

$$\overset{2}{q}_n(\gamma) = (-1)^{n+1} \left\{\cos\mu\pi\,\overset{1}{q}_n(\pi-\gamma) + \sin\mu\pi\,\overset{3}{q}_n(\pi-\gamma)\right\},$$

$$\overset{4}{q}_n(\gamma) = (-1)^{n+1} \left\{\sin\mu\pi\,\overset{1}{q}_n(\pi-\gamma) - \cos\mu\pi\,\overset{3}{q}_n(\pi-\gamma)\right\},$$

woraus sich $\overset{1}{p}_n$, $\overset{3}{p}_n$, $\overset{1}{q}_n$ und $\overset{3}{q}_n$ in ähnlicher Weise isoliren lassen und woher noch

$$(-1)^n G' = \Sigma\,\overset{1}{p}_n(\pi-\gamma)\cos n\psi$$

$$= -\Sigma\,\overset{1}{q}_n(\pi-\gamma)\sin n\psi,$$

$$(-1)^n H' = \Sigma\,\overset{3}{p}_n(\pi-\gamma)\cos n\psi$$

$$= -\Sigma\,\overset{3}{q}_n(\pi-\gamma)\sin n\psi$$

folgt. Man bedarf demnach nur der Kenntniss der Integrale $\overset{1}{p}_n$, $\overset{3}{p}_n$, $\overset{1}{q}_n$, $\overset{3}{q}_n$, auf die wir uns denn auch im Folgenden zunächst beschränken wollen.

Eine erste Anwendung gestatten diese Integrale, wenn sie mit $\alpha^n = \cos n\delta + i \sin n\delta$ multiplicirt werden. Addirt man die Producte und berücksichtigt die Gleichungen

$$\frac{1}{2} + \alpha \cos \psi + \alpha^2 \cos 2\psi + \ldots = \frac{1}{2} \frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha \cos \psi + \alpha^2},$$

$$\alpha \sin \psi + \alpha^2 \sin 2\psi + \ldots = \frac{\alpha \sin \psi}{1-2\alpha \cos \psi + \alpha^2},$$

so erhält man das Resultat, dass die reellen Theile von

$$\frac{1-\alpha^2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos \mu\psi \, d\psi}{(1-2\alpha \cos \psi + \alpha^2)(\cos \psi - \cos \gamma)^\mu},$$

$$\frac{1-\alpha^2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\sin \mu\psi \, d\psi}{(1-2\alpha \cos \psi + \alpha^2)(\cos \psi - \cos \gamma)^\mu}$$

die imaginären Theile von

$$\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos \mu\psi \sin \psi \, d\psi}{(1-2\alpha \cos \psi + \alpha^2)(\cos \psi - \cos \gamma)^\mu},$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\sin \mu\psi \sin \psi \, d\psi}{(1-2\alpha \cos \psi + \alpha^2)(\cos \psi - \cos \gamma)^\mu}$$

bezüglich mit $\frac{\cos \mu\delta}{(\cos \delta - \cos \gamma)^\mu}$ und $\frac{\sin \mu\delta}{(\cos \delta - \cos \gamma)^\mu}$ zusammenfallen für $0 < \delta < \gamma$, für $\gamma < \delta < \pi$ verschwinden. Wenn $\mu = \frac{1}{2}$, so kann man diese Folgerungen der Theorie durch unbestimmte Integrationen auf folgende Weise bestätigen. Zuvörderst im ersten Integrale setze man $\sin \frac{\psi}{2} = \sigma \sin \frac{\gamma}{2}$, dann ist

$$\frac{1-\alpha^2}{\pi} \int_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} \cdot \frac{1}{(1-\alpha)^2 + 4\alpha \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \sigma^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\alpha}{\sqrt{1-2\alpha \cos \gamma + \alpha^2}},$$

und dieser Ausdruck gibt $\dfrac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sqrt{2(\cos\delta-\cos\gamma)}}$ für $\delta<\gamma$, Null für $\delta>\gamma$; ausserdem findet man

$$\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{\psi}{2}\,d\psi}{(\cos\delta-\cos\psi)\sqrt{\cos\psi-\cos\gamma}}=0,\ \delta<\gamma,$$

$$=-\frac{\pi}{2\sin\frac{\delta}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\delta}},\ \delta>\gamma.$$

An das erste Integral schliesst sich das vierte; hierin ersetze man

$$\frac{\alpha\sin\psi\sin\frac{\psi}{2}}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}\ \text{durch}\ \frac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{\overline{1-\alpha}^2\cos\frac{\psi}{2}}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}$$

und beachte die Bestimmung

$$\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sqrt{\cos\psi-\cos\gamma}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}};$$

es entspringt hiermit der Werth

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{1-\alpha}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}=\frac{1}{2}+i\,\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sqrt{2(\cos\delta-\cos\gamma)}},\ \delta<\gamma,$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sqrt{2(\cos\gamma-\cos\delta)}},\ \gamma<\delta;$$

und die Formel

$$\int_0^\gamma \frac{\sin\frac{\psi}{2}\sin\psi\,d\psi}{(\cos\delta-\cos\psi)\sqrt{\cos\psi-\cos\gamma}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}},\ \delta<\gamma,$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left\{1-\sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\delta}}\right\},\ \gamma<\delta.$$

Das dritte Integral wird durch die Substitution

$$\cos\frac{\psi}{2} = \sigma\cos\frac{\gamma}{2}$$

bestimmt; im zweiten hat man noch vorher die Gleichungen

$$\frac{\alpha\sin\psi\cos\frac{\psi}{2}}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2} = -\frac{1}{2}\sin\frac{\psi}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{\overline{1+\alpha}^2\sin\frac{\psi}{2}}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2},$$

$$\int_0^\gamma \frac{\sin\frac{\psi}{2}\,d\psi}{\sqrt{\cos\psi-\cos\gamma}} = \sqrt{2}\,l\tan\frac{\pi+\gamma}{4}$$

zu Hilfe zu nehmen. Dann bleibt in beiden das Integral

$$\frac{1-\alpha^2}{\pi}\int_1^{\sec\frac{\gamma}{2}} -\frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}}\cdot\frac{1}{(1+\alpha)^2-4\alpha\cos^2\frac{\gamma}{2}\cdot\sigma^2};$$

der äquivalente Werth

$$-\frac{1-\alpha}{\pi\sqrt{4\alpha\cos^2\frac{\gamma}{2}-\overline{1+\alpha}^2}}\left\{\frac{\pi}{2}-\text{arc tan}\frac{\sqrt{\cos\gamma-\cos\delta}}{\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}}\right\}$$

liefert im reellen, bez. imaginären Theile die gewünschten Ausdrücke 0 oder $\frac{\frac{\sin\delta}{\cos 2}}{\sqrt{\cos\delta-\cos\gamma}}$, im übrigen ergeben sich zwei Ergänzungsformeln, nämlich

$$\int_0^\gamma \frac{\sin\frac{\psi}{2}\,d\psi}{(\cos\psi-\cos\delta)\sqrt{\cos\psi-\cos\gamma}}$$

$$= \frac{\sec\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\delta}}\left\{\pi-2\,\text{arc tan}\frac{\sqrt{\cos\gamma-\cos\delta}}{\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}}\right\}\quad \gamma \gtrless \delta$$

$$= -i\,\frac{2\sec\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\cos\delta-\cos\gamma}}\,\text{arctan}\,i\,\frac{\sqrt{\cos\delta-\cos\gamma}}{\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}},$$

$$\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{\psi}{2}\sin\psi\, d\psi}{(\cos\psi-\cos\delta)\sqrt{\cos\psi-\cos\gamma}}$$

$$=2\sqrt{2}\, l\tan\frac{\pi+\gamma}{4}+i\frac{2\cos\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\cos\delta-\cos\gamma}}\operatorname{arc\,tan} i\frac{\sqrt{\cos\delta-\cos\gamma}}{\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}} \qquad \gamma \gtrless \delta$$

$$=2\sqrt{2}\, l\tan\frac{\pi+\gamma}{4}+\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\cos\gamma-\cos\delta}}\left\{\pi-2\operatorname{arc\,tan}\frac{\sqrt{\cos\gamma-\cos\delta}}{\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\delta}{2}}\right\}.$$

Von Interesse sind hier die Annahmen $\delta=\pi$; aus den Grenzübergängen rechter Hand gehen die geforderten Werthe bekannter Integrale hervor. Solche und ähnliche Specialisirungen sind sehr gut geeignet, die Sicherheit des Rechnens mit eliminirbaren Discontinuitäten erkennen zu lassen. Wir wollen jetzt wieder zum allgemeinen Falle μ zurückkehren, und die angesetzten periodischen Reihen nach den Argumenten γ und δ integriren und differenziren.

C. Integration der Reihen nach γ und Differentiation nach δ.

Wenn eine periodische Reihe nach irgend welchem Argument integrirt wird, nachdem sie vorher mit einer willkürlichen Function multiplicirt worden, so wird dadurch ihr Wesen so lange nicht geändert, als alle Integrationen endlich und stetig bleiben. Es kommt also unter dieser Voraussetzung die Convergenz der integrirten Reihe nicht weiter in Frage. Wir haben im Vorhergehenden periodische Reihen kennen gelernt, welche entweder für $\gamma<\delta<\pi$ oder $0<\delta<\gamma$ verschwinden. Solche Reihen bleiben gleich Null, wenn man sie nach γ zwischen α und β integrirt, wobei

$$\alpha<\beta<\delta, \text{ bez. } \delta<\alpha<\beta$$

ist. Es bedarf keines weiteren Beweises, dass man ohne Verzug wird die Gleichungen ansetzen können

$$\Sigma \cos n\delta \int_{\alpha}^{\beta} p_n^1 F(\gamma)\, d\gamma = \Sigma \sin n\delta \int_{\alpha}^{\beta} q_n^1 F(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \cos \mu\delta \int_{\alpha,\,\delta,\,\beta}^{\beta} \frac{F(\gamma)\, d\gamma}{(\cos\delta - \cos\gamma)^{\mu}},$$

$$\Sigma \cos n\delta \int_{\alpha}^{\beta} p_n^3 F(\gamma)\, d\gamma = \Sigma \sin n\delta \int_{\alpha}^{\beta} q_n^3 F(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \sin \mu\delta \int_{\alpha,\,\delta,\,\beta}^{\beta} \frac{F(\gamma)\, d\gamma}{(\cos\delta - \cos\gamma)^{\mu}};$$

$$\Sigma \cos n\delta \int_{\alpha}^{\beta} p_n^2 F(\gamma)\, d\gamma = \Sigma \sin n\delta \int_{\alpha}^{\beta} q_n^2 F(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \cos \mu\delta \int_{\alpha}^{\alpha,\,\delta,\,\beta} \frac{F(\gamma)\, d\gamma}{(\cos\gamma - \cos\delta)^{\mu}},$$

$$\Sigma \cos n\delta \int_{\alpha}^{\beta} p_n^4 F(\gamma)\, d\gamma = \Sigma \sin n\delta \int_{\alpha}^{\beta} q_n^4 F(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \sin \mu\delta \int_{\alpha}^{\alpha,\,\delta,\,\beta} \frac{F(\gamma)\, d\gamma}{(\cos\gamma - \cos\delta)^{\mu}}.$$

Die Formeln sind ohne den überflüssigen Factor $2^{-\mu}$ angesetzt. Eine bemerkenswerthe Eigenschaft besitzen die dritten Ausdrücke rechter Hand insofern, als sie durch Differentiation nach δ einen willkürlichen Factor von $F(\gamma)$, etwa $f(\gamma)$ zu isoliren erlauben. Wie man sogleich erkennt, löst diese Überlegung die Aufgabe, eine Function $f(\gamma)$ mit Zuhilfenahme der Integrale p_n und q_n in unendliche, convergente Reihen zu verwandeln. Der Beweis dieses Satzes erfordert indessen noch einige Specialisirungen. Als allgemeines Resultat der Differentiation erhält man nämlich leicht

$$\frac{d}{d\delta}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\delta\int_{\delta}^{\beta}\frac{F(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu}}\right\}$$

$$=\mp\mu\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\mu\delta\int_{\delta}^{\beta}\frac{F(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu}}+\mu\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\delta\int_{\delta}^{\beta}\frac{F(\gamma)\sin\delta\,d\gamma}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu+1}}$$

$$-\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\delta\,\mathrm{Lim}\frac{F(\gamma)}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu}},\ (\gamma=\delta),$$

$$\frac{d}{d\delta}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\delta\int_{\alpha}^{\delta}\frac{F(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu}}\right\}$$

$$=\mp\mu\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\mu\delta\int_{\alpha}^{\delta}\frac{F(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu}}-\mu\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\delta\int_{\alpha}^{\delta}\frac{F(\gamma)\sin\delta\,d\gamma}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu+1}}$$

$$+\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\delta\,\mathrm{Lim}\frac{F(\gamma)}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu}}\ (\gamma=\delta).$$

Soll demnach die Differentiation den verlangten Erfolg haben, so müssen zunächst die Limitenausdrücke einen endlichen Werth haben, mit andern Worten, $F(\gamma)$ muss einen Factor $\varphi(\gamma)$ besitzen, der für $\gamma=\delta$ verschwindet und mit $[\pm(\cos\delta-\cos\gamma)]^{-\mu}$ einen gegebenen Ausdruck erzeugt. Es sei also

$$F(\gamma)=\varphi(\gamma)\cdot f(\gamma),\ \ \mathrm{Lim}\,\varphi(\gamma)=0,\ \ \gamma=\delta,$$

und $f(\gamma)$ willkürlich. Zweitens möge die Grenze untersucht werden, welcher sich die Operation nähert, wenn die festen Grenzen β und α mit δ zusammenfallen. Dann verschwinden die mit $\mp\mu\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\mu\delta$ multiplicirten Integrale; aber auch die darauffolgenden Integrale verschwinden, weil das Differential $d\gamma\frac{F(\gamma)\sin\delta}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu+1}}$ in Folge von $F(\gamma)=\varphi(\gamma)f(\gamma)$ an der Grenze $\gamma=\delta$ unendlich klein bleibt. Somit bleibt unter den gemachten Voraussetzungen nur übrig

$$\frac{d}{d\delta}\operatorname{Lim}\frac{\cos}{\sin}\mu\delta\int_{\delta}^{\beta}\frac{F(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu}}$$

$$=-\frac{\cos}{\sin}\mu\delta\operatorname{Lim}\frac{\varphi(\gamma)}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu}}\cdot f(\delta),\ \beta=\delta,\ \gamma=\delta,$$

$$\frac{d}{d\delta}\operatorname{Lim}\frac{\cos}{\sin}\mu\delta\int_{\alpha}^{\delta}\frac{F(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu}}$$

$$=\frac{\cos}{\sin}\mu\delta\operatorname{Lim}\frac{\varphi(\gamma)}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu}}\cdot f(\delta),\ \alpha=\delta,\ \gamma=\delta.$$

Es empfiehlt sich selbstverständlich für $\varphi(\gamma)$ den einfachsten Fall auszuwählen; als solcher bietet sich die Function der festen Grenzen α und β dar

$$\varphi(\gamma)=[\sin(\beta-\gamma)]^{\mu}$$

oder

$$\varphi(\gamma)=[\sin(\gamma-\alpha)]^{\mu},$$

und es sind in aller Strenge die folgenden Limitenbestimmungen auszuführen

$$\operatorname{Lim}\left\{\frac{\sin\delta\sin(\beta-\overline{\beta-\varepsilon})}{\cos\delta-\cos(\delta+\varepsilon)}\right\}^{\mu}_{\varepsilon=0}=1,$$

$$\operatorname{Lim}\left\{\frac{\sin\delta\sin(\alpha+\varepsilon-\alpha)}{\cos(\delta-\varepsilon)-\cos\delta}\right\}^{\mu}_{\varepsilon=0}=1.$$

Eine Ausnahme erleidet diese Betrachtung in den beiden Fällen $\delta=0$ und $\delta=\pi$; zufolge des Umstandes, dass hier $\cos\delta-\cos\gamma$ in der zweiten Dimension verschwindet, muss die Dimension von $\psi(\gamma)$ verdoppelt werden. Man hat wieder

$$\operatorname{Lim}\left\{\frac{\sin^2\varepsilon}{\cos\delta-\cos(\delta+\varepsilon)}\right\}^{\mu}=$$

$$\operatorname{Lim}\left\{\frac{\sin^2\varepsilon}{\cos(\delta-\varepsilon)-\cos\delta}\right\}^{\mu}=2^{\mu},$$

gelangt also alles in allem zu vier Formeln, und zwar

$$\frac{d}{d\delta}\,\mathrm{Lim}\,{\cos\atop\sin}\,\mu\delta\int_{\delta}^{\beta}\frac{\sin^{\mu}(\beta-\gamma)\,f(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu}}$$

$$=-{\cos\atop\sin}\,\mu\delta\,\frac{f(\delta)}{\sin^{\mu}\delta},\quad\beta=\delta;$$

$$\frac{d}{d\delta}\,\mathrm{Lim}\,{\cos\atop\sin}\,\mu\delta\int_{\alpha}^{\delta}\frac{\sin^{\mu}(\gamma-\alpha)\,f(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu}}$$

$$=\quad{\cos\atop\sin}\,\mu\delta\,\frac{f(\delta)}{\sin^{\mu}\delta},\quad\alpha=\delta;$$

$$\frac{d}{d\delta}\,\mathrm{Lim}\cos\mu\delta\int_{\delta}^{\pi}\frac{\sin^{2\mu}\gamma\,f(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu}}$$

$$=-2^{\mu}\cos\mu\pi f(\pi),\quad\delta=\pi,$$

$$\frac{d}{d\delta}\,\mathrm{Lim}\cos\mu\delta\int_{0}^{\delta}\frac{\sin^{2\mu}(\gamma)\,f(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu}}$$

$$=\quad 2^{\mu}f(0),\quad\delta=0.$$

Es erhebt sich nun die Frage, ob die Operation $\frac{d}{d\delta}$ unter gleichen Umständen auf die den modificirten Integralen äquivalenten Cosinus- und Sinusreihen übertragen werden darf. Dass hier volle Freiheit herrscht, geht aus den einleitenden Bemerkungen zur Genüge hervor, wonach differenzirte periodische Reihen ihren Normalcharakter im wesentlichen beibehalten. Fügen wir schliesslich die Bemerkung hinzu, dass im allgemeinen Falle δ wegen der Grenzlage dieses Werthes die Summen der Reihen blos zur Hälfte, in den speciellen Fällen $\delta=0$ und $\delta=\pi$ ganz in Rechnung zu bringen sind, so haben wir alle Beweismomente für die Aufstellung der Fundamentalformeln erschöpft und erhalten als solche das folgende System

$$\Sigma\, n \sin n\delta \int_{\alpha}^{\delta} p_n^1 \sin^{\mu}(\delta-\gamma)\, f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= -\Sigma\, n \cos n\delta \int_{\alpha}^{\delta} q_n^1 \sin^{\mu}(\delta-\gamma)\, f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= -\Sigma\, n \sin n\delta \int_{\delta}^{\beta} p_n^2 \sin^{\mu}(\gamma-\delta)\, f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \quad \Sigma\, n \cos n\delta \int_{\delta}^{\beta} q_n^2 \sin^{\mu}(\gamma-\delta)\, f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos \mu\delta}{\sin^{\mu}\delta} \cdot f(\delta),$$

$$\Sigma\, n \sin n\delta \int_{\alpha}^{\delta} p_n^3 \sin^{\mu}(\delta-\gamma)\, f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= -\Sigma\, n \cos n\delta \int_{\alpha}^{\delta} q_n^3 \sin^{\mu}(\delta-\gamma)\, f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= -\Sigma\, n \sin n\delta \int_{\delta}^{\beta} p_n^4 \sin^{\mu}(\gamma-\delta)\, f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \quad \Sigma\, n \cos n\delta \int_{\delta}^{\beta} q_n^4 \sin^{\mu}(\gamma-\delta)\, f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{\sin \mu\delta}{\sin^{\mu}\delta} \cdot f(\delta); \quad \delta < \beta < \pi, \quad \alpha < \delta < \pi.$$

$$\Sigma\, (-1)^n n \int_{\alpha}^{\pi} q_n^1 \sin^{2\mu}(\gamma)\, f(\gamma)\, d\gamma = 2^{\mu} \cos \mu\pi\, f(\pi),$$

$$\Sigma\, n \int_{0}^{\beta} q_n^2 \sin^{2\mu}(\gamma)\, f(\gamma)\, d\gamma = 2^{\mu} f(0),$$

$$\Sigma (-1)^n n \int_\alpha^\pi q_n^3 \sin^{2\mu}(\gamma) f(\gamma)\, d\gamma = 2^\mu \sin \mu\pi f(\pi),$$

$$\Sigma n \int_0^\beta q_n^4 \sin^{2\mu}(\gamma) f(\gamma)\, d\gamma = 0.$$

Ehe wir weiter gehen, wollen wir nachweisen, dass der Fall $\mu = 0$ die gewöhnlichen periodischen Reihen darstellt. Hier kommen blos die Integrale p_n^1, q_n^1, p_n^2, q_n^2 in Betracht und zwar hat man

$$p_n^1 = \frac{2}{n\pi} \sin n\gamma, \qquad p_n^2 = -\frac{2}{n\pi} \sin n\gamma,$$

$$q_n^1 = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\gamma), \quad q_n^2 = \frac{2}{n\pi} [\cos n\gamma - (-1)^n].$$

Also lauten die obigen Reihen im gegenwärtigen Falle

$$\frac{2}{\pi} \Sigma \sin n\delta \int_\alpha^\delta f(\gamma) \sin n\gamma\, d\gamma, =$$

$$\frac{2}{\pi} \Sigma \sin n\delta \int_\delta^\beta f(\gamma) \sin n\gamma\, d\gamma \; =$$

$$\frac{2}{\pi} \Sigma \cos n\delta \int_\alpha^\delta (\cos n\gamma - 1) f(\gamma)\, d\gamma =$$

$$\frac{2}{\pi} \Sigma \cos n\delta \int_\delta^\beta \{\cos n\gamma - (1)^n\} f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \frac{1}{2} f(\delta),$$

den bekannten Bestimmungen entsprechend, indem, wie es die Theorie der periodischen Reihen verlangt, gleichzeitig die Normalreihen

$$\frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\delta} f(\gamma)\,d\gamma\ .\ \Sigma\cos n\delta$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\beta} f(\gamma)\,d\gamma\ .\ \Sigma(-1)^n\cos n\delta$$

verschwinden.

Die gewonnenen Entwicklungen erlauben nun, andere abzuleiten, welche die Coëfficienten $P_n = P'_n$ des Radicals $(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)^{-\mu} = R$ selbst enthalten. Wir hatten für die letzteren die Formeln

$$\begin{aligned} P_n = P'_n = &\quad \overset{1}{p}_n + \cos\mu\pi\,\overset{2}{p}_n + \sin\mu\pi\,\overset{4}{p}_n \\ &= -\overset{3}{q}_n + \sin\mu\pi\,\overset{2}{q}_n - \cos\mu\pi\,\overset{4}{q}_n. \end{aligned}$$

Unterwerfen wir diese der Integration nach γ und bilden die entsprechenden Reihen, so finden wir, dass

$$\begin{aligned} &\Sigma\cos n\delta\int_{\alpha}^{\beta} P_n\sin^{\mu}[\varepsilon(\gamma-\delta)]\,f(\gamma)\,d\gamma \\ &= \cos\mu\delta\int_{\alpha,\delta,\beta}^{\beta}\frac{\sin^{\mu}[\varepsilon(\gamma-\delta)]\,f(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu}} \\ &+ \cos\mu(\pi-\delta)\int_{\alpha}^{\alpha,\delta,\beta}\frac{\sin^{\mu}[\varepsilon(\gamma-\delta)]\,f(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Sigma\sin n\delta\int_{\alpha}^{\beta} P'_n\sin^{\mu}[\varepsilon(\gamma-\delta)]\,f(\gamma)\,d\gamma \\ &= -\sin\mu\delta\int_{\alpha,\delta,\beta}^{\beta}\frac{\sin^{\mu}[\varepsilon(\gamma-\delta)]\,f(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu}} \\ &+ \sin\mu(\pi-\delta)\int_{\alpha}^{\alpha,\delta,\beta}\frac{\sin^{\mu}[\varepsilon(\gamma-\delta)]\,f(\gamma)\,d\gamma}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu}};\quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Die obere Gleichung werde entweder mit $\sin\mu(\pi-\delta)$ oder $\sin\mu\delta$, die untere dem entsprechend entweder mit $\cos\mu(\pi-\delta)$ oder $-\cos\mu\delta$ multiplicirt und hierauf subtrahirt; hiermit fallen entweder die ersten oder die letzten Glieder rechter Hand weg und es bleibt

$$\Sigma \sin[\mu\pi-(\mu+n)\delta]\int_{\alpha}^{\beta} P_n \sin^{\mu}(\gamma-\delta) f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \sin\mu\pi \int_{\alpha,\,\delta,\,\beta}^{\beta} \frac{\sin^{\mu}(\gamma-\delta) f(\gamma)\, d\gamma}{(\cos\delta-\cos\gamma)^{\mu}},$$

$$\Sigma \sin(\mu+n)\delta \int_{\alpha}^{\beta} P_n \sin^{\mu}(\delta-\gamma) f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \sin\mu\pi \int_{\alpha}^{\alpha,\,\delta,\,\beta} \frac{\sin^{\mu}(\delta-\gamma) f(\gamma)\, d\gamma}{(\cos\gamma-\cos\delta)^{\mu}}.$$

Nimmt man ganz in der früheren Weise jetzt wieder in der ersten Formel β, in der zweiten α gleich δ, und differenzirt wie vorhin nach δ, so entspringt das doppelte Endresultat

$$\Sigma(\mu+n)\cos[\mu\pi-(\mu+n)\delta]\int_{\alpha}^{\delta} P_n \sin^{\mu}(\delta-\gamma) f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \frac{1}{2}\sin\mu\pi \frac{f(\delta)}{\sin^{\mu}\delta},$$

$$\Sigma(\mu+n)\cos(\mu+n)\delta \int_{\delta}^{\beta} P_n \sin^{\mu}(\gamma-\delta) f(\gamma)\, d\gamma$$

$$= \frac{1}{2}\sin\mu\pi \frac{f(\delta)}{\sin^{\mu}\delta};$$

$$\Sigma(\mu+n)\int_{\alpha}^{\pi} (-1)^n P_n \sin^{2\mu}(\gamma) f(\gamma)\, d\gamma = 2^{\mu}\sin\mu\pi f(\pi),$$

$$\Sigma(\mu+n)\int_{0}^{\beta} P_n \sin^{2\mu}(\gamma) f(\gamma)\, d\gamma = 2^{\mu}\sin\mu\pi f(0).$$

Die letzte Gleichung stellt uns, wenn ausserdem $\beta = \pi$, $\mu = \frac{1}{2}$ gesetzt wird, den bekannten Fall der Dirichlet'schen Functionsentwicklung vor. Ihr tritt in der vorliegenden Darstellung der Theorie der Fall der vorletzten Gleichung $\alpha = 0$, entsprechend der Symmetrie der Grenzen 0 und π zur Seite. Überhaupt können, wie dies von Haus aus einleuchtend ist, die Formeln mit den Begrenzungen δ und β aus denen mit den Begrenzungen α und δ bei der Willkürlichkeit von δ durch einfache Transformation gewonnen werden.

Man wird behaupten können, dass die vorstehend entwickelten Gleichungen das vollständige System der Entwicklungen nach den Coëfficienten P_n enthalten und wir gehen hiermit sogleich zur sphärischen Ausbreitung willkürlicher Functionswerthe und deren äquivalente Reihenformen über.

D. Übergang zur Kugeloberfläche.

Es lässt sich im Vorhinein entnehmen, dass die Discontinuitätsverhältnisse bei der Einführung zweier variabler Argumente andere sein werden, als in dem eben behandelten Falle. Entsprechend unserer allgemeinen Anschauung, wonach ein Problem erst dann als erledigt zu betrachten ist, wenn die ihm zu Grunde liegenden Formen $\frac{0}{0}$ oder $0.\infty$ vollständig entwickelt und die willkürlichen Momente des Problems scharf hervorgehoben sind, verlassen wir hier das Raisonnement Dirichlet's, welches die sphärische Ausbreitung als den Fall einfacher Coordinatenverschiebung behandelt und gehen auf die Bedingungen $\gamma \gtrless \delta$ zurück, indem wir die Begrenzungen der Argumente ϑ' und φ' ermitteln, welche ihnen Genüge leisten. Wenn also

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi' - \varphi)$$

den Cosinus der sphärischen Distanz der Punkte $\vartheta\varphi$ und $\vartheta'\varphi'$ vorstellt, wo $\vartheta\varphi$ fest, $\vartheta'\varphi'$ beweglich sind, so handelt es sich darum, alle $\vartheta'\varphi'$ zu bestimmen, welche $\cos\gamma \lesseqgtr \cos\delta$ machen, also innerhalb oder ausserhalb eines um $\vartheta\varphi$ mit dem Radius δ beschrie-

benen Kreises liegen. Dabei werden ϑ, φ und $\vartheta'\varphi'$ auf irgend einen Anfangspunkt bezogen und die Aufgabe der Grenzenbestimmung reducirt sich auf die Ermittlung der Berührungspunkte, welche die Kreise ϑ' um den Anfangspunkt mit dem Kreise δ um $\vartheta\varphi$ besitzen können. Zwei Hauptfälle müssen hier vor allem unterschieden werden.

I. Fall $\delta < \vartheta$. Dieser Annahme wird entsprochen durch die Werthe $0 < \vartheta' < \vartheta - \delta$ und, wie dies durchgängig der Fall ist, willkürliche φ'; hierbei ist $\gamma > \delta$, daher eine äussere Berührung im Punkte $\vartheta' = \vartheta - \delta$, $\varphi' = \varphi$ vorhanden, wofür $\gamma = \delta$. Im Unterfalle

1) $$\vartheta + \delta > \pi,$$

genügen $\gamma > \delta$ auch alle $\delta + \vartheta < \vartheta' < \pi$ mit dem Grenzwerthe $\vartheta' = \delta + \vartheta$, $\varphi' = \varphi$. Andererseits genügt man $\gamma < \delta$, wenn

2) $$\vartheta + \delta > \pi, \quad 2\pi - \vartheta - \delta < \vartheta' < \pi$$

und trifft den Kreis δ im Punkte der inneren Berührung

$$\vartheta' = 2\pi - \vartheta - \delta, \quad \varphi' = \pi + \varphi.$$

II. Ist $\delta > \vartheta$, so kehren sich die Verhältnisse um. Allgemein kann nur die Bedingung $\gamma < \delta$ befriedigt werden durch

$$0 < \vartheta' < \delta - \vartheta$$

mit der Grenzlage $\vartheta' = \delta - \vartheta$, $\varphi' = \pi + \varphi$. Gleichfalls $\gamma < \delta$ wird erfüllt, wenn überdies

3) $$\vartheta + \delta > \pi, \quad 2\pi - \vartheta - \delta < \vartheta' < \pi$$

und diese Ungleichungen gehen in die Gleichungen $\gamma = \delta$, $\vartheta' = 2\pi - \vartheta - \delta$ nur für den speciellen Werth $\varphi' = \pi + \varphi$ über. Endlich hat man die letzte Coincidenz

4) $$\gamma > \delta, \quad \vartheta + \delta < \pi, \quad \vartheta + \delta < \vartheta' < \pi;$$
$$\gamma = \delta, \quad \vartheta + \delta = \pi, \quad \varphi' = \varphi.$$

Es erübrigt, die Ausnahmefälle anzugeben. Solche treten ein für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, welche das sphärische Problem auf das unter *C.* betrachtete zurückführen. Denn alsdann wird

$\cos\gamma = \pm\cos\vartheta'$ blos von einem Argumente abhängig. Die obigen Grenzfälle des ϑ' bedeuten Deckungen der ganzen oder Theilkreise, sind also nicht mehr an isolirte Werthe φ' gebunden, sondern lassen es willkürlich. Sodann bleibt $\vartheta = \delta$ zu beachten; wenn der Kreis δ durch den Anfangspunkt geht, fallen die allgemeinen Fälle I. und II. $0 < \vartheta' < \pm(\vartheta - \delta)$ weg. Ausnahmen anderer Art bilden die Fälle $\delta = 0$ und $\delta = \pi$, welchen zwei unendlich kleine Kreise um $\vartheta\varphi$ und dessen Gegenpunkt entsprechen; hiefür werden die Bestimmungen I., 2., 3., $\delta = 0$ und II. 1., 4. $\delta = \pi$ illusorisch. Es wird sich zeigen, dass diese Ausnahmefälle auch Änderungen in den Discontinuitätsverhältnissen zur Folge haben.

Gehen wir nun auf die zu reducirenden Reihen über, so empfiehlt es sich, statt der Integrale p, q mit ungeradem oberen Index einfach J_1, statt der übrigen J_2 einzuführen und die Betrachtung beschränkt sich allem früheren zufolge, auf die vier Fälle

$$\Sigma \frac{\cos}{\sin} n\delta \int_{\alpha}^{(\vartheta-\delta)} d\vartheta' \int d\varphi' J_2 F(\vartheta', \varphi'),\ \delta < \vartheta,\ \delta + \vartheta \gtreqless \pi; \quad (R_1)$$

$$\Sigma \frac{\cos}{\sin} n\delta \int_{(\delta+\vartheta)}^{\beta} d\vartheta' \int d\varphi' J_2 F(\vartheta', \varphi'),\ \delta \gtreqless \vartheta,\ 0 < \delta + \vartheta < \beta < \pi; \quad (R_2)$$

$$\Sigma \frac{\cos}{\sin} n\delta \int_{\alpha}^{(\delta-\vartheta)} d\vartheta' \int d\varphi' J_1 F(\vartheta', \varphi'),\ 0 < \alpha < \delta - \vartheta,\ \delta + \vartheta \gtreqless \pi; \quad (R_3)$$

$$\Sigma \frac{\cos}{\sin} n\delta \int_{(2\pi-\delta-\vartheta)}^{\beta} d\vartheta' \int d\varphi' J_1 F(\vartheta', \varphi'),\ \delta \gtreqless \vartheta,\ 0 < 2\pi - \delta - \vartheta < \beta \lessgtr \pi. \quad (R_4)$$

Nach φ' ist hierin zwischen willkürlichen Grenzen φ_1 und φ_2 zu integriren, wobei aber für die Integrale von J_2

$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$$

für die Integrale von J_1

$$\varphi_1 < \pi + \varphi < \varphi_2$$

sein muss. Die eingeklammerten Grenzen für ϑ' sind als feste zu betrachten, nach welchen die Operation $\frac{d}{d\delta}$ nicht vorgenommen werden darf. Die letztere nun reducirt die obigen Reihen in ähnlicher Weise auf $F(\delta, \vartheta, \varphi)$, wie unter C. Jedoch sind die Grenzbestimmungen $\frac{0}{0}$ wesentlich andere wie früher. Vorerst erhebt sich die Frage, ob die φ unendlich nahen Grenzen φ_1 und φ_2, welche als für die Reihe entscheidend übrigbleiben und selbstverständlich gerade wie ϑ' von δ abhängen, einen endlichen Derivationsfactor liefern. Aus

$$\begin{aligned}\cos\delta &= \cos\vartheta\cos(\delta-\vartheta\pm\varepsilon)\mp\sin\vartheta\sin(\delta-\vartheta\pm\varepsilon)\cos(\varphi'-\varphi)\\ &= \cos\vartheta\cos(\delta+\vartheta\pm\varepsilon)\pm\sin\vartheta\sin(\delta+\vartheta\pm\varepsilon)\cos(\varphi'-\varphi)\end{aligned}$$

ergibt sich, wenn die Unterscheidung bezüglich ϑ bei Seite gesetzt wird,

$$\cos(\varphi'-\varphi) = \mp\frac{\cos\delta-\cos\vartheta\cos(\delta-\vartheta\pm\varepsilon)}{\sin\vartheta\sin(\delta-\vartheta\pm\varepsilon)},$$

$$\sin(\varphi'-\varphi)\frac{d\varphi'}{d\delta} = \pm\frac{\cos(\vartheta\pm\varepsilon)-\cos\vartheta}{\sin\vartheta\sin^2(\vartheta-\delta\pm\varepsilon)},$$

also

$$\frac{d\varphi'}{d\delta} = \pm\frac{1}{\sin(\vartheta-\delta)}\times$$

$$\sqrt{\frac{[\cos(\vartheta\pm\varepsilon)-\cos\vartheta]^2}{\sin^2\vartheta\sin^2(\vartheta-\delta\pm\varepsilon)-[\cos\delta-\cos\vartheta\cos(\vartheta-\delta\pm\varepsilon)]^2}}.$$

In der Grenze ergibt sich hieraus für $\delta>0\ \frac{d\varphi'}{d\delta}=0$, für $\delta=0$ aber erhält man $\frac{d\varphi'}{d\delta}=+\frac{\pm\sqrt{+1}}{\sin\vartheta}$ und $\sqrt{+1}$ positiv oder negativ, je nachdem $\varphi'\gtrless\varphi$; ebenso für $\delta=\pi$

$$\frac{d\varphi'}{d\delta} = -\frac{\pm\sqrt{+1}}{\sin(\vartheta-\pi)} = +\frac{\pm\sqrt{+1}}{\sin\vartheta},\quad \varphi'\gtrless\pi+\varphi.$$

Das keineswegs überraschende Resultat, dass $\frac{d\varphi'}{d\delta}$ für $\delta=0$ und $\delta=\pi$ endlich ist, wird bestätigt, wenn man die Maximal-

und Minimalwerthe aufsucht, welche im Falle $\vartheta > \delta$ der Ausdruck $\cos\varphi'-\varphi$, aufgefasst als Function von ϑ' besitzt. Man findet leicht

$$\frac{d\cos(\varphi'-\varphi)}{d\vartheta'} = 0 \text{ für } \cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta}{\cos\delta}.$$

Also bilden δ, ϑ und ϑ' in diesem Falle ein bei $\vartheta'\varphi'$ rechtwinkliges sphärisches Dreieck mit ϑ' als Tangente des Kreises δ. Der Winkel $\varphi'-\varphi$ des Dreiecks wird berechnet aus der Gleichung

$$\pm\sin(\varphi'-\varphi) = \frac{\sin\delta}{\sin\vartheta}$$

und hieraus entspringt für verschwindende δ die Gleichung der Bogenelemente und die Derivation

$$\frac{d\varphi'}{d\delta} = \frac{\pm 1}{\sin\vartheta}.$$

Hierbei ist $\delta < \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt; die analogen Maxima und Minima für $\delta > \frac{\pi}{2}$ $\vartheta > \pi - \delta$, führen gleichfalls, wie es sein muss, auf diese Formel. Man erkennt hieraus die Nothwendigkeit, den Fall $\delta = 0$, π für sich zu behandeln. Es participirt dann ersichtlich die ganze unendlich nahe Umkreisung von ϑ, φ, resp. ϑ, $\pi+\varphi$ am Resultat und man kann hieraus auf die Natur des allgemein auftretenden Reductionsfactors A (siehe unten) zurückschliessen.

Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, die Differentiationen auszuführen. Es liegen uns ausschliesslich Ausdrücke von folgender Gestalt vor

$$DJ = \frac{d}{d\delta}\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} dy\, f(x, y),$$

mit a, b, a', b' als Functionen von δ, nach denen allein die Differentiation zu geschehen hat. Demzufolge ist einfach

$$DJ = \frac{db}{d\delta}\int_{a'}^{b'} f(b, y)\,dy - \frac{da}{d\delta}\int_{a}^{b'} f(a, y)\,dy$$

$$+ \frac{db'}{d\delta}\int_{a}^{b} f(x, b')\,dx - \frac{da'}{d\delta}\int_{a}^{b} f(x, a')\,dx$$

und nach diesem Schema lauten die vier verschiedenen Integrationen nach Anwendung der Operation $\frac{d}{d\delta}$ wie folgt

$$\frac{d}{d\delta} R_1 = \frac{1}{2}\int_{\varphi-0}^{\varphi+0} d\varphi' J_2(\vartheta-\delta)\, F(\vartheta-\delta, \varphi'),$$

$$\frac{d}{d\delta} R_2 = \frac{1}{2}\int_{\varphi-0}^{\varphi+0} d\varphi' J_2(\vartheta+\delta)\, F(\vartheta+\delta, \varphi'),$$

$$\frac{d}{d\delta} R_3 = -\frac{1}{2}\int_{\pi+\varphi-0}^{\pi+\varphi+0} d\varphi' J_1(\delta-\vartheta)\, F(\delta-\vartheta, \varphi'),$$

$$\frac{d}{d\delta} R_4 = -\frac{1}{2}\int_{\pi+\varphi-0}^{\pi+\varphi+0} d\varphi' J_1(2\pi-\delta-\vartheta)\, F(2\pi-\delta-\vartheta, \varphi').$$

Unter J_2 und J_1 sind hierin die betreffenden Differentialausdrücke verstanden, in denen statt γ δ und für ϑ' die beigesetzten Werthe einzuführen sind. Diesen auf einzelne Differentiale reducirten Integrationen treten im Falle $\delta = 0$ oder π noch die folgenden der Reihe nach zur Seite

$$\frac{2}{\sin\vartheta}\,\frac{\cos}{\sin}\,\mu 0 \int_{\vartheta-0}^{\vartheta} d\vartheta' J_2(\varphi)\, F(\vartheta', \varphi),$$

$$\frac{2}{\sin\vartheta}\,\frac{\cos}{\sin}\,\mu 0 \int_{\vartheta}^{\vartheta+0} d\vartheta' J_2(\varphi)\, F(\vartheta', \varphi),$$

$$\frac{2}{\sin\vartheta}\frac{\cos}{\sin}\mu\pi\int_{\pi-\vartheta-0}^{\pi-\vartheta} d\vartheta' J_1(\pi+\varphi)\, F(\vartheta', \pi+\varphi),$$

$$\frac{2}{\sin\vartheta}\frac{\cos}{\sin}\mu\pi\int_{\pi-\vartheta}^{\pi-\vartheta+0} d\vartheta' J_1(\pi+\varphi)\, F(\vartheta', \pi+\varphi).$$

Bei der Symmetrie der gegenwärtigen acht Ausdrücke genügt es, einen zu erledigen, indem in Betreff der Zeichen kein weiterer Zweifel obwalten kann, da die sämmtlichen Limitenbestimmungen nur positive Resultate zu Tage fördern können. Die Aufgabe, welche wir noch zu lösen haben, ist eine doppelte; es müssen die Grenzbestimmungen mit Hilfe verschwindender Factoren Φ von F ausgeführt und zweitens ein Reductionsfactor A angegeben werden, welcher den Zusammenhang des gegenwärtigen mit dem sub C. behandelten vermittelt. In Betreff der Reihe R_1 bleibt demnach der Ausdruck

$$A\frac{d\varphi}{(d\cos\gamma)^{\mu}}\Phi, \quad \gamma=\delta, \quad \vartheta'=\vartheta-\delta+\varepsilon$$

zu bestimmen. Gehen wir zu diesem Zwecke von der Beziehung aus

$$\sin^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\delta+\vartheta'-\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\delta+\vartheta-\vartheta')}{\sin\vartheta\sin\vartheta'},$$

und setzen hierin

$$\vartheta'=\vartheta-\delta+\varepsilon,$$

so erhalten wir

$$\sin^2\frac{\varphi'-\varphi}{2}=\frac{\sin\left(\delta-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\vartheta\sin(\vartheta_1+\varepsilon)}=\sin\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\sin\delta}{\sin\vartheta\sin\vartheta_1},$$

also

$$\sin(\varphi'-\varphi)\frac{d\varphi'}{d\varepsilon}=\frac{\sin\delta}{\sin\vartheta\sin\vartheta_1}.$$

Wenn wir andererseits die Formel

$$\cos\gamma=\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi'-\varphi)$$

nach γ differenziren, und ϑ' constant nehmen, so ergibt sich, die Anderung $d\cos\gamma$ positiv genommen

$$\frac{d\cos\gamma}{d\varphi'} = \sin(\varphi'-\varphi)\sin\vartheta\sin\vartheta_1,$$

und wenn ϑ' variabel, φ' constant ist,

$$\frac{d\cos\gamma}{d\vartheta'} = \sin(\vartheta-\vartheta_1).$$

Aus dieser und der vorhergehenden Gleichung zusammen folgt

$$\frac{d_{\varphi'}\cos\gamma}{d\varepsilon} = \sin\delta = \frac{d_{\vartheta'}\cos\gamma}{d\varepsilon},$$

woher für $\delta = 0$ ohne weiteres

$$\frac{d_{\varphi'}\cos\gamma}{d\varepsilon^2} = \frac{d_{\vartheta'}\cos\gamma}{d\varepsilon^2} = \frac{1}{2}.$$

Die Gleichung

$$\frac{d_{\varphi'}\cos\gamma}{d\varepsilon} = \sin\delta$$

werde zur $1-\mu^{\text{ten}}$ Potenz erhoben und mit

$$\frac{d\varphi'}{d\cos\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\varepsilon\sin\delta\sin\vartheta\sin\vartheta_1}}$$

multiplicirt; hieraus entspringt, dass $\delta > 0$ vorausgesetzt, als Function Φ_1 der Ausdruck

$$[\sin(\vartheta-\delta-\vartheta')]^{\mu-\frac{1}{2}}$$

einzutreten hat, indem die Grenzbestimmung

$$\frac{d\varphi\,(\sin\varepsilon)^{\mu-\frac{1}{2}}}{(d\cos\gamma)^{\mu}} = \frac{\sqrt{2}\sin^{\frac{1}{2}-\mu}\delta}{\sqrt{\sin\vartheta\sin\vartheta_1}}$$

einen endlichen Werth liefert. Ebenso findet man

$$\Phi_2 = [\sin(\vartheta' - \delta - \vartheta)]^{\mu - \frac{1}{2}}$$

$$\Phi_3 = [\sin(\delta - \vartheta - \vartheta')]^{\mu - \frac{1}{2}}$$

$$\Phi_4 = [\sin(\delta + \vartheta + \vartheta')]^{\mu - \frac{1}{2}}.$$

Der Exponent von Φ wird doppelt so gross, wenn $\delta = 0$ oder $= \pi$; denn die Grenzgleichungen lauten jetzt

$$\frac{d\varphi\,(\sin\varepsilon)^{2\mu-1}}{(d_\varphi, \cos\gamma)^\mu} = \frac{2^\mu}{\sin\vartheta} = \frac{d\varepsilon\,(\sin\varepsilon)^{2\mu-1}}{\sin\vartheta\,(d_\vartheta, \cos\gamma)^\mu}.$$

Die beiden wichtigen Grenzbestimmungen werden leicht durch directe Entwicklung von $d\cos\gamma$ nach Potenzen von φ' und ϑ' und Substitution der obigen endlichen Ausdrücke für $\operatorname{Lim}\frac{(\varphi'-\varphi)^2}{2(\vartheta'-\vartheta)}$ und $\operatorname{Lim}\frac{\varphi'-\varphi}{\varepsilon}$ bestätigt. Um nun die gemeinschaftliche Constante A in Besitz zu nehmen, bedenken wir, dass nachdem durch den Maximum-Minimumsatz die Function F eliminirt ist, die doppelte Integration durch eine einfache nach γ ersetzt werden kann zwischen einer willkürlichen und der festen Grenze δ. Dann aber hat man wieder das in C behandelte einfachere Problem vor sich und genügt diesem durch alle Werthe $\vartheta'\varphi'$, welche unendlich nahe am Endpunkte des Radius δ liegen. Es kommt daher jetzt die unendlich kleine Kreisperipherie um den jeweiligen Ausnahmepunkt in Betracht. Der Fall $\delta = 0$ stellt dieses Verhältniss der circularen (elliptischen) Anordnung zur linearen am anschaulichsten dar. Nun wird die Integration mit quadratischen Elementen $d\vartheta' d\varphi'$ vollzogen und schränkt sich im Verhältnisse $1 : \frac{\pi}{4}$ ein, da für die restirende Quadrat- (Oblongum-) Fläche $4d\vartheta' d\varphi'$ nur die Kreis- (Ellipsen-) Fläche $\pi\, d\vartheta' d\varphi'$ in Rechnung zu ziehen ist. Damit aber erscheint für A der Werth $\frac{\pi}{4}$. In der hiermit vollzogenen Summation erhält man rechter Hand die vier Factoren $\sqrt{\frac{\sin\delta}{\sin\vartheta\sin\vartheta'}} = \operatorname{Lim}\frac{\sin\frac{\varphi'-\varphi}{2}}{\sqrt{\sin\frac{\varepsilon}{2}}}$. Man kann sie

durch entsprechende Specialisirung von $F(\vartheta', \varphi')$ entfernen und gelangt damit zur endgiltigen Feststellung der Multiplicatoren M, welche das Problem auf die eine Variable γ zurückführen, nämlich

$$M_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\vartheta' \sin(\delta+\vartheta')}{\sin(\vartheta-\vartheta')\sin(\vartheta-\delta-\vartheta')} \sin^{2\mu}(\vartheta-\delta-\vartheta'),$$

$$M_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\vartheta' \sin(\vartheta'-\delta)}{\sin(\vartheta-\vartheta')\sin(\vartheta+\delta-\vartheta')} \sin^{2\mu}(\vartheta'-\delta-\vartheta),$$

$$M_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\vartheta' \sin(\delta-\vartheta')}{\sin(\vartheta+\vartheta')\sin(\delta-\vartheta-\vartheta')} \sin^{2\mu}(\delta-\vartheta-\vartheta'),$$

$$M_4^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\vartheta' \sin(\delta+\vartheta')}{\sin(\vartheta+\vartheta')\sin(\delta+\vartheta+\vartheta')} \sin^{2\mu}(\delta+\vartheta+\vartheta').$$

Man hat jetzt die folgenden Haupt- und Ergänzungsformeln

$$\mp \Sigma n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\delta \int_{\alpha}^{\vartheta-\delta} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} J_2 M_1 F\, d\vartheta' d\varphi' = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\delta}{\sin^{\mu}\delta} F(\vartheta-\delta, \varphi),$$

$$\mp \Sigma n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\delta \int_{\delta+\vartheta}^{\beta} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} J_2 M_2 F\, d\vartheta' d\varphi' = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\delta}{\sin^{\mu}\delta} F(\delta+\vartheta, \varphi);$$

$$\pm \Sigma n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\delta \int_{\alpha}^{\delta-\vartheta} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} J_1 M_3 F\, d\vartheta' d\varphi' = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\delta}{\sin^{\mu}\delta} F(\delta-\vartheta, \pi+\varphi),$$

$$\pm \Sigma n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\delta \int_{2\pi-\delta-\vartheta}^{\beta} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} J_1 M_4 F\, d\vartheta' d\varphi' = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\mu\delta}{\sin^{\mu}\delta} F(2\pi-\delta-\vartheta, \pi+\varphi).$$

$$\Sigma n \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\vartheta' \sin^{2\mu-1}\varepsilon\,(\vartheta-\vartheta')\, J_2 F\, d\vartheta' d\varphi' = 2^{\mu+1}\pi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \mu 0\, F(\vartheta, \varphi),$$

$$\Sigma(-1)^n n \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\vartheta' \sin^{2\mu-1}\varepsilon(\vartheta+\vartheta')\, J_1 F\, d\vartheta' d\varphi' =$$

$$= 2^{\mu+1}\pi \frac{\cos}{\sin}\mu\pi\, F(\pi-\vartheta, \pi+\varphi).$$

Wie unmittelbar erhellt, können die beiden letzten Formeln in je zwei andere mit dem oberen und unteren Grenzwerthe ϑ resp. $\pi-\vartheta$ zerfällt werden, wobei $\sin\varepsilon(\vartheta\pm\vartheta')$ stets positiv sein muss.

Wir wollen jetzt den Fall $\mu=0$ vornehmen, für welchen die der allgemeinen Aufgabe zu Grunde liegenden Grenzgleichungen in Kraft bleiben. Die Multiplicatoren M verlieren den letzten Factor; wir wollen sie zur Unterscheidung mit r bezeichnen und haben sofort gemäss dem sub $C.$ bemerkten

$$\Sigma \frac{\sin}{\cos} n\delta \int_{\alpha}^{\vartheta-\delta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_1 \frac{\sin}{\cos} n\gamma\, F(\vartheta', \varphi')\, d\vartheta' d\varphi' = \frac{\pi^2}{8} F(\vartheta-\delta, \varphi),$$

$$\Sigma \frac{\sin}{\cos} n\delta \int_{\delta+\vartheta}^{\beta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_2 \frac{\sin}{\cos} n\gamma\, F(\vartheta', \varphi')\, d\vartheta' d\varphi' = \frac{\pi^2}{8} F(\delta+\vartheta, \varphi);$$

$$\Sigma \frac{\sin}{\cos} n\delta \int_{\alpha}^{\delta-\vartheta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_3 \frac{\sin}{\cos} n\gamma\, F(\vartheta', \varphi')\, d\vartheta' d\varphi' = \frac{\pi^2}{8} F(\delta-\vartheta, \varphi+\pi),$$

$$\Sigma \frac{\sin}{\cos} n\delta \int_{2\pi-\delta-\vartheta}^{\beta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r_4 \frac{\sin}{\cos} n\gamma\, F(\vartheta', \varphi')\, d\vartheta' d\varphi' = \frac{\pi^2}{8} F(2\pi-\delta-\vartheta, \pi+\varphi).$$

Neben den gewöhnlichen periodischen Reihen existiren hiernach, wie man sieht, solche von zwei Dimensionen und zwar sphärischen Charakters mit Reductionsfactoren r, welche sich im Falle $\vartheta=0$, wie es sein muss, auf 1 reduciren.

Besonders bemerkenswerth, wenn auch von geringerer Anwendung, sind hier die Fälle $\delta=0$ oder $=\pi$; paarweise verbunden lauten diese mit der äussersten Begrenzung

$$\Sigma\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta'}{\varepsilon\sin(\vartheta-\vartheta')}F(\vartheta'\,\varphi')\cos n\gamma\,d\vartheta'd\varphi'=\pi^2F(\vartheta\,\varphi),$$

$$\Sigma(-1)^n\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{\sin\vartheta'}{\varepsilon\sin(\vartheta+\vartheta')}F(\vartheta',\varphi')\cos n\gamma\,d\vartheta'd\varphi'=\pi^2F(\pi-\vartheta,\pi+\varphi)$$

und scheinen Divergenzen anzuzeigen an der Stelle $\vartheta'=\vartheta$ und $\pi-\vartheta$. Setzt man jedoch in die Summe $\cos n\gamma$ diese Werthe ϑ', so behält sie ihren verschwindenden Werth. Für $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ geht der grösste Bogen, der die Punkte $\vartheta\varphi'$ und $\vartheta\varphi$ verbindet, in den Bogen $\varphi'-\varphi$ selbst über. Für $\cos\gamma$ entsteht dann das Product $\sin\vartheta'\cos(\varphi'-\varphi)$, der Reductionsfactor verwandelt sich in den absoluten Werth der Tangente von ϑ'. Also hat man in diesem Falle, $F=\cos^2\vartheta'$ gesetzt, z. B.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\tan\vartheta'\cos^2\vartheta'\cos n\,(\text{arc}\cos\sin\vartheta'\cos\overline{\varphi'-\varphi})\,d\vartheta'd\varphi'=0;$$

ebenso für

$$F=\cos^{2p}\vartheta'\sin^q\vartheta',$$

wie man durch Entwicklung $\cos n\gamma$ nach Potenzen von $\cos\gamma$ auch direct findet.

Nimmt man dagegen $F(\vartheta,\varphi)\gtrless 0$, so gibt obige Reihe Limitenausdrücke $\infty-\infty$, so dass sich der Grenzfall $\delta=0,\pi$ zur Entwicklung sphärischer Functionen nicht eignet, ohne dass jedoch die fundamentale Voraussetzung der Convergenz der Reihen alterirt würde. Aus diesem Grunde erweist sich die Dirichlet'sche Functionsentwicklung nach Kugelfunctionen als der einfachste Fall. Um sich derselben zu nähern, führe man so wie unter *C.* statt der Integrale J_1 und J_2 die Coëfficienten P_n ein; der Weg ist dabei genau der früher eingehaltene und die Resultate folgende:

$$\Sigma(\mu+n)\cos(\mu+n)\delta\int_{\alpha}^{\vartheta-\delta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_n M_1 F d\vartheta' d\varphi' =$$

$$=\frac{\pi}{4}\frac{\sin\mu\pi}{\sin^{\mu}\delta} F(\vartheta-\delta,\varphi),$$

$$\Sigma(\mu+n)\cos(\mu+n)\delta\int_{\delta+\vartheta}^{\beta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_n M_2 F d\vartheta' d\varphi' =$$

$$=\frac{\pi}{4}\frac{\sin\mu\pi}{\sin^{\mu}\delta} F(\delta+\vartheta,\varphi);$$

$$\Sigma(\mu+n)\cos[(\mu+n)\delta-\mu\pi]\int_{\alpha}^{\delta-\vartheta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_n M_3 F d\vartheta' d\varphi' =$$

$$=\frac{\pi}{4}\frac{\sin\mu\pi}{\sin^{\mu}\delta} F(\delta-\vartheta,\pi+\varphi),$$

$$\Sigma(\mu+n)\cos[(\mu+n)\delta-\mu\pi]\int_{2\pi-\delta-\vartheta}^{\beta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} P_n M_4 F d\vartheta' d\varphi' =$$

$$=\frac{\pi}{4}\frac{\sin\mu\pi}{\sin^{\mu}\delta} F(2\pi-\delta-\vartheta,\pi+\varphi).$$

$$\Sigma(\mu+n)\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\vartheta'\sin^{2\mu-1}\varepsilon(\vartheta-\vartheta') P_n F d\vartheta' d\varphi' =$$

$$=2^{\mu+1}\pi\sin\mu\pi\, F(\vartheta,\varphi),$$

$$\Sigma(-1)^n(\mu+n)\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\vartheta'\sin^{2\mu-1}\varepsilon(\vartheta+\vartheta') P_n F d\vartheta' d\varphi' =$$

$$=2^{\mu+1}\pi\sin\mu\pi\, F(\pi-\vartheta,\pi+\varphi).$$

Die vorletzte Gleichung stellt, wenn $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$, $\mu = \frac{1}{2}$, die Entwicklung Dirichlet's dar; die Function, deren Argumente den sphärischen Gegenpunkt von ϑ, φ bilden, besitzt die in der letzten Gleichung enthaltene Entwicklung, welche auf die erstere leicht zurückgeführt wird. Als Ausnahme hat man die Fälle $\vartheta = 0$ oder π; die Integration nach φ' wird unabhängig vom Ausnahmepunkte $\vartheta = 0$ oder π und tritt unverändert auf die rechte Seite der entwickelten Formeln hinüber. Hiermit ist die Zahl der Variationen des sphärischen Problems erschöpft. Ma wird bemerken, dass unter den möglichen Combinationen einzig und allein die Annahme $\vartheta = \delta = \frac{\pi}{2}$ ohne Bedeutung ist.

XVI. SITZUNG VOM 18. JUNI 1874.

Herr Prof. Dr. Ed. Linnemann in Brünn dankt mit Schreiben vom 15. Juni für den ihm zuerkannten Ig. L. Lieben'schen Preis, und weist, den Bestimmungen des Stiftbriefes gemäss, seine österr. Staatsbürgerschaft nach.

Die Herren A. Winnecke in Strassburg und Alph. Borelly in Marseille danken, mit Schreiben vom 9. und beziehungsweise vom 14. Juni, für die ihnen zuerkannten und übersendeten Kometen-Preise.

Sir Edward Sabine, Generallieutenant und Präsident der Royal Society in London, lässt, da er selbst durch Krankheit zu schreiben verhindert ist, durch Herrn Dr. Scott der Akademie seinen Dank für die Wahl zu ihrem Ehrenmitgliede ausdrücken.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über einige bestimmte Integrale“, von Herrn Prof. L. Gegenbauer, d. Z. in Berlin.

„Über neue und ungenügend bekannte Vögel von Neu-Guinea und den Inseln der Geelvinksbai“, V. Mittheilung, von Herrn Dr. A. B. Meyer in Wien.

Herr Prof. Dr. Ed. Suess legt zwei Mittheilungen des Herrn Th. Fuchs aus Tarent vor, betitelt: 1. „Das Alter der Tertiärschichten von Malta“, und 2. „Über das Auftreten von Miocänschichten vom Charakter der sarmatischen Stufe bei Syrakus“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Annales de l'Observatoire de Moscou. Vol. I. Moscou, 1874; 4°.

Beobachtungen, Schweizer. Meteorologische. November und December 1872; Jänner, Februar & März 1873. Zürich; 4°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome L^{me}. Nr. 197. Genève, Lausanne, Paris, 1874; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXVIII, Nr. 22. Paris, 1874; 4°.

Edlund, E., Théorie des phénomènes électriques. Leipzig & Stockholm, 1874; 4°.

Erman, A., und H. Petersen, Die Grundlage der Gaussischen Theorie und die Erscheinungen des Erdmagnetismus im Jahre 1829. (Herausgegeben im Auftrage der kais. Admiralität.) Berlin, 1874; 4°.

Feistmantel, Ottokar, Das Kohlenkalkvorkommen bei Rothwaltersdorf in der Grafschaft Glatz und dessen organische Einschlüsse. 8°.

Genocchi, Angelo, Breve riposta al Signor Conte L. F. Menabrea. 4°.

Genootschap, Bataviaasch, van Kunsten en Wetenschappen: Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde. Deel XXI, Aflev. 1. Batavia, 's Hage, 1873; 8°. — Notulen. Deel XI. 1873. Nr. 2. Batavia, 8°. — *Codicum Arabicorum in Bibliotheca Soc. art. et scient., quae Bataviae floret, asservatorum Catalogum inchoatum a Doct. R. Friedrich absolvit indicibusque instruxit L. W. C. van den Berg. Bataviae & Hagae Comitis, 1873; 8°.*

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang. Nr. 24. Wien, 1874; 4°.

Instituut, Koninkl., voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië: Bijdragen. III. Volgreeks. VIII. Deel, 3e & 4e Stuk. 'S Gravenhage, 1874; 8°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 12. Graz, 1873; 4°.

Leitgeb, Hubert, Untersuchungen über die Lebermoose. I. Heft. Jena, 1874; 4°.

Menabrea, L. F., Un' ultima lettera sulle peripezie della serie di Lagrange, in riposta al prof. Angelo Genocchi. Roma, 1874; 4°.

Nachrichten über Industrie, Handel und Verkehr aus dem statistischen Departement im k. k. Handels-Ministerium. IV. Band, 2. Heft. Wien, 1874; 4°.

Nature. Nr. 241, Vol. X. London, 1874; 8°.

Nuovo Cimento. Giornale di fisica, fisica matematica, chimica e storia naturale. Serie 2ª. Tomo XI. Gennajo — Aprile 1874. Pisa; 8°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VII, Nr. 5. Torino, 1872; 4°.

Revista de Portugal e Brazil. 2° Volume, Nr. 4. Lisboa, 1874; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". III° Année, 2° Série. Nr. 50. Paris, 1874; 4°.

Settimanni, C., Supplément à la nouvelle théorie des principaux éléments de la Lune et du Soleil. (Florence 1871.) Florence, 1874; 4°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des travaux. 3° Série. 27° Année. 1er Cahier. Paris, 1874; 8°.

Tübingen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1872/3. 4° & 8°.

Verein für Natur- und Heilkunde zu Pressburg: Verhandlungen. N. F. 2. Heft, Jahrgang 1871—1872. Pressburg, 1874; 8°.

Vierteljahresschrift, österr., für wissenschaftliche Veterinärkunde. XLI. Band, 2. Heft. Wien, 1874; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 24. Wien, 1874; 4°.

Bahnbestimmung des ersten Kometen vom Jahre 1871.

Zweite Abtheilung.

Von Dr. **Johann Holetschek,**
Assistenten der k. k. Universitäts-Sternwarte in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Juni 1874.)

In der am 19. Juni 1873 vorgelegten Abhandlung habe ich versprochen, die Bahnbestimmung dieses Kometen weiter durchzuführen, wenn noch Beobachtungen desselben aus der Zeit nach dem Perihel, als der Komet auf der südlichen Halbkugel zu sehen war, bekannt werden sollten. Dieser Fall ist nun in der That eingetreten; ich erhielt nämlich am 4. April 1874 durch die freundliche Mittheilung von Prof. A. Hall in Washington Cap-Beobachtungen des Kometen vom 5. August 1871.

Prof. Hall, der schon früher ein sehr befriedigendes Elementensystem des Kometen abgeleitet hatte, bekam diese Positionen durch Herrn Stone, Director der königlichen Sternwarte am Vorgebirge der guten Hoffnung; es sind folgende:

	Cap mittl. Zeit	AR ☌	Decl. ☌
1871 August 5.	7ʰ59ᵐ49ˢ1	10ʰ 11ᵐ48ˢ01	. .
„ 5.	8 9 5·5	. .	—53°54′0″49
„ 5.	8 18 1·2	10 11 56·11	. .

Scheinbare Orte der Vergleichssterne:

Grösse	AR	Decl.
8	10ʰ11ᵐ15ˢ76	—53°57′25″66
8	10 12 0·92	—53 49 46·53

Angestellt wurden die Beobachtungen von William Mann, dem seither verstorbenen ersten Assistenten der Cap-Sternwarte.

Diese Beobachtungen verglich ich mit den in der citirten Abhandlung berechneten Bahnelementen, u. z. sowohl mit dem „directen“ als mit dem „corrigirten“ System. Um die zwei Beobachtungen in *AR* hinsichtlich ihrer Güte zu prüfen, rechnete ich mit den „directen“ Elementen folgende kleine Ephemeride:

1871 Mittl. Berl. Zeit	Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. Entfg. ♂ von ♁	Aberrationszeit
August 4·5	$10^h\ 2^m 45^s 23$	$-53°20'22''23$	0·0527366	
5·0	10 7 54·72	−53 40 58·53	0·0542271	
5·5	10 13 7·18	−54 0 41·60	0·0557845	$9^m 25^s 4$
6·0	10 18 22·42	−54 19 31·72	0·0574105	

Die Vergleichung ergab im Sinne „Beobachtung weniger Rechnung“:

$d\alpha$	$d\delta$
$+39^s 04$	. . .
. . .	$-24''77$
$+39·22$	. . .

Die Rectascensions-Angaben stimmen also innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler ganz befriedigend überein. Beim „corrigirten“ System ist die Abweichung *B—R* viel grösser; es ist im Mittel

$$d\alpha = +1^m 13^s 65 \qquad d\delta = -2'37''43.$$

Obgleich sich das für die weitere Rechnung gewonnene neue Material eigentlich auf eine einzige Beobachtung beschränkt, so lässt sich doch erwarten, dass die Bahn eine wesentlich genauere werden wird, u. z. wegen des bedeutenden sowohl heliocentrischen als geocentrischen Weges, den der Komet vom Tage seiner Entdeckung bis zur Beobachtung auf der Süd-Hemisphäre durchlaufen hat. Während sich nämlich die Beobachtungen des Kometen vor der Zeit seines Perihels nur über 40 Tage (7. April bis 16. Mai) erstrecken, so umfassen sie jetzt vom 7. April bis zum 5. August einen Zeitraum von 120 Tagen, der also das Dreifache des zur vorigen Bahnbestimmung benützten Intervalles beträgt, ein Umstand, der hier stark ins Gewicht fällt.

Liegen nun zwei nicht viel von einander verschiedene Elementensysteme vor, welche den Beobachtungen innerhalb der ersten 40 Tage hinlänglich genügen, und will man jedes von beiden Systemen so verbessern, dass auch eine viel spätere Beobachtung noch vollkommen dargestellt wird, so ist klar, dass sich beide Elementensysteme einander bedeutend nähern werden. Aus diesem Grunde habe ich das „corrigirte“ System ganz übergangen und die weitere Bahnverbesserung nur mit dem „directen“ System vorgenommen.

Bevor ich den Gang und die Resultate dieser Rechnung anführe, will ich noch vorher das gesammte Beobachtungsmaterial, welches mir von diesem Kometen bekannt geworden ist, mittheilen. Ich stelle es in übersichtlicher Weise zusammen, wie ich es aus den „Astronomischen Nachrichten“, „Monthly Notices of the Royal Astronomical Society“ und brieflichen Mittheilungen gesammelt habe. Ferner führe ich die aus den Elementen berechneten (also durch Interpolation aus der Ephemeride gefundenen) Kometenpositionen unter der Rubrik „berechnete *AR.* und Decl.“ an, wodurch man unmittelbar die unter „*B—R*“ gegebenen Abweichungen findet. Es ist aber wohl zu beachten, dass die für die Zeit vor und nach dem Perihel angesetzten Ephemeridenorte nicht gleichwerthig sind, indem jene aus den der vorigen Rechnung ursprünglich zu Grunde gelegten, diese dagegen aus den bereits verbesserten Elementen berechnet sind. Es sind auch jene Beobachtungen aufgenommen, die bei der vorigen Bahnbestimmung ausgeschlossen wurden, entweder wegen Unkenntniss des Vergleichssternes oder weil sie überhaupt aus irgend einem Grunde zu stark von den übrigen abwichen. Sie sind chronologisch an der richtigen Stelle eingefügt, aber ohne Nummern gelassen, das letztere deshalb, weil ich die in der I. Abtheilung gebrauchte Numerirung der „Abweichungen“ nicht ändern wollte.

Nr.	1871	Beobachtungsort	Mittlere Ortszeit	Beobachtete Rectascension	Parallaxe	Beobachtete Declination
	April					
	7	Karlsruhe	9h 50m 31s	2h 27m 14s59	.	+53° 53' 8"1
1	8	Mannheim	8 31 52	2 31 54·38	+0·34	+53 26 2·7
2	8	Wien (Josefst.).	9 4 12	2 31 54·51	+0·33	+53 26 3·8
3	8	Hamburg	9 6 52	2 32 0·67	+0·29	+53 25 22·5
4	8	Wien	10 2 24	2 32 6·57	+0·28	+53 24 48·3
5	8	Altona	9 39 43	2 32 8·21	+0·27	+53 24 41·1
6	8	Bonn	9 30 28	2 32 6·96	+0·30	+53 24 53·1
7	8	Krakau	10 59 43	2 32 16·45	+0·21	+53 23 56·8
8	8	Leipzig	12 3 26	2 32 34·17	+0·12	+53 22 2·0
9	8	Hamburg	15 35 41	2 33 19·20	—0·18	+53 17 34·7
10	9	Wien (Josefst.).	8 32 6	2 36 39·71	+0·35	+52 57 43·0
11	9	Mannheim	8 33 3	2 36 45·79	+0·34	+52 57 1·4
12	9	Karlsruhe	8 55 9	2 36 51·61	+0·33	+52 56 41·3
13	9	Wien	9 29 30	2 36 51·33	+0·24	+52 56 32·4
14	9	Kremsmünster .	9 30 21	2 36 51·16	+0·31	+52 56 30·0
15	9	Altona	9 56 25	2 37 2·50	+0·25	+52 55 31·0
16	9	Hamburg	10 44 49	2 37 10·69	+0·21	+52 54 28·3
17	10	"	8 43 47	2 41 33·87	+0·30	+52 27 19·9
18	10	Altona	9 0 38	2 41 38·03	+0·29	+52 27 0·2
19	10	Berlin	9 20 22	2 41 38·62	+0·29	+52 26 47·9
20	10	Twickenham ..	8 35 9	2 41 40·07	+0·32	+52 26 49·9
21	10	Bothkamp	9 19 7	2 41 40·44	+0·28	+52 26 35·8
22	10	Leipzig	10 33 4	2 41 53·26	+0·23	+52 25 18·9
23	11	Wien (Josefst.).	8 27 44	2 46 8·42	+0·34	+51 58 2·7
24	11	Bothkamp	8 33 57	2 46 13·93	+0·30	+51 57 22·5
25	11	Berlin	8 47 58	2 46 14·44	+0·31	+51 57 18·3
26	11	Wien (Josefst.).	9 0 40	2 46 14·46	+0·33	+51 57 30·2
27	11	Karlsruhe	8 30 25	2 46 15·50	+0·34	+51 57 29·7
28	11	Wien	9 8 55	2 46 16·67	+0·32	+51 57 22·2
29	11	Altona	8 57 6	2 46 19·39	+0·29	+51 56 53·8
30	11	Wien	9 50 12	2 46 24·22	+0·29	+51 56 20·5
31	11	Königsberg ...	10 24 15	2 46 28·15	+0·22	+51 56 0·1
32	11	Hamburg	11 11 47	2 46 44·94	+0·18	+51 53 54·4
33	11	"	11 28 24	2 46 48·31	+0·16	+51 53 36·4
34	11	"	11 45 0	2 46 51·47	+0·14	+51 53 18·4
35	11	Leipzig	11 56 35	2 46 51·87	+0·13	+51 53 16·5
	12	Wien	10 9 28	*+18·26	+0·27	*—1 18·3
36	12	Krakau	11 23 36	2 51 18·48	+0·18	+51 23 56·2
37	13	Marseille	10 1 16	2 55 45·91	+0·30	+50 52 55·0
38	13	Hamburg	13 9 22	2 56 16·81	+0·03	+50 49 4·5
39	14	Wien	8 56 36	2 59 54·13	+0·32	+50 23 19·5
40	14	Berlin	8 59 22	2 59 56·43	+0·29	+50 22 54·4
41	14	Leipzig	8 55 22	2 59 56·44	+0·30	+50 23 0·1
42	14	Altona	8 59 40	2 59 59·88	+0·28	+50 22 39·2

Parallaxe	Berechnete Rectascension	Berechnete Declination	B.—R. $d\alpha$	B.—R. $d\delta$	Beobachter
					Winnecke
+3ˢ0	2ʰ31ᵐ55ˢ11	+53°26' 2"7	—0ˢ39	+ 3"0	Schönfeld
+3·3	2 31 55·27	+53 26 1·8	—0·43	+ 5·3	Oppolzer
+3·3	2 32 1·04	+53 25 28·2	—0·08	— 2·4	Pechüle
+3·8	2 32 7·13	+53 24 52·4	—0·28	— 0·3	Weiss
+3·6	2 32 7·75	+53 24 48·7	+0·73	— 4·0	Peters
+3·5	2 32 8·18	+53 24 46·2	—0·92	+10·4	Tiele
+4·2	2 32 15·89	+53 24 1·0	+0·77	0·0	Karlinski
+4·7	2 32 35 02	+53 22 8·5	—0·73	— 1·8	Bruhns u. Börgen
+4·3	2 33 20·16	+53 17 42·5	—1·14	— 3·5	Pechüle
+2·9	2 36 40·21	+52 57 42·6	—0·15	+ 3·3	Oppolzer
+3·0	2 36 46·73	+52 57 2·9	—0·60	+ 1·5	Schönfeld
+3·2	2 36 51·21	+52 56 35·7	+0·73	+ 8·8	Winnecke
+3·4	2 36 51·71	+52 56 32,6	—0·14	+ 3·2	Weiss
+3·5	2 36 53·73	+52 56 20·4	—2·26	+13·1	Strasser
+3·8	2 37 2·27	+52 55 28·3	+0·48	+ 6·5	Peters
+4·1	2 37 11·95	+52 54 29·3	—1·05	+ 3·1	Rümker u. Pechüle
+3·1	2 41 34·43	+52 27 21·0	—0·26	+ 2·0	Pechüle
+3·3	2 41 37·78	+52 26 59·9	+0·54	+ 3·6	Peters
+3·3	2 41 38·94	+52 26 52·0	—0·03	— 0·8	Tietjen
+3·0	2 41 40·83	+52 26 40·3	—0·44	+12·6	Hind
+3·4	2 41 41·26	+52 26 37·7	—0·54	+ 1·5	Vogel
+4·1	2 41 54·09	+52 25 16·8	—0·60	+ 6·2	Börgen
+2·9	2 46 8·48	+51 58 0·9	+0·28	+ 4·7	Oppolzer
+3·1	2 46 14·55	+51 57 21·5	—0·32	+ 4·1	Vogel
+3·2	2 46 14·74	+51 57 20·3	+0·01	+ 1·2	Tietjen
+3·3	2 46 14·90	+51 57 19·1	—0·11	+14·4	Oppolzer
+3·0	2 46 15·20	+51 57 17·2	+0·64	+15·5	Winnecke
+3·3	2 46 16·53	+51 57 8·7	+0·46	+ 9·9	Palisa
+3·3	2 46 18·92	+51 56 52·9	+0·76	+ 4·2	Peters
+3·7	2 46 24·51	+51 56 16·2	0·00	+ 8·0	Weiss
+4·0	2 46 27·92	+51 55 53·9	+0·45	+10·2	Oppenheim
+4·3	2 46 45·32	+51 53 59·8	—0·20	— 1·1	Pechüle
+4·4	2 46 48·54	+51 53 38·6	—0·07	+ 2·2	"
+4·5	2 46 51·76	+51 53 17·5	—0·15	+ 5·4	Rümker
+4·6	2 46 52·13	+51 53 15·0	—0·13	+ 6·1	Börgen
+3·9	2 51 5·65	+51 25 2·4			Palisa
+4·4	2 51 17·06	+51 23 44·8	+1·60	+15·8	Karlinski
+3·8	2 55 45·27	+50 52 50·8	+0·94	+ 8·0	Borelly
+4·7	2 56 17·13	+50 49 6·5	—0·29	+ 2·7	Pechüle
+3·3	2 59 53·52	+50 23 17·4	+0·93	+ 5·4	Palisa
+3·4	2 59 56·25	+50 22 57·8	+0·47	0·0	Tietjen
+3·3	2 59 56·25	+50 22 57·8	+0·49	+ 5·6	Börgen
+3·4	2 59 58·86	+50 22 39·8	+1·30	+ 2·8	Peters

Nr.	1871	Beobachtungsort	Mittlere Ortszeit	Beobachtete Rectascension	Parallaxe	Beobachtete Declination
	April					
43	14	Berlin	9h 19m 51s	3h 0m 0s22	+0s28	+50°22'26"0
44	14	Hamburg	9 12 15	3 0 1·07	+0·28	+50 22 24·0
45	14	Wien	9 40 6	3 0 1·97	+0·29	+50 22 23·7
46	14	Bonn	9 32 22	3 0 7·28	+0·28	+50 21 32·3
47	14	Krakau	10 26 16	3 0 8·86	+0·24	+50 21 31·9
48	14	Marseille	9 35 28	3 0 9·69	+0·33	+50 21 27·6
49	14	Königsberg	10 59 37	3 0 14·27	+0·17	+50 20 55·0
50	14	Wien	10 44 23	3 0 13·61	+0·22	+50 20 50·5
51	15	Königsberg	9 54 46	3 4 26·10	+0·24	+49 49 57·7
52	15	Leipzig	10 13 54	3 4 34·92	+0·23	+49 48 37·3
53	15	Bonn	9 57 15	3 4 36·76	+0·26	+49 48 34·8
54	15	Berlin	12 10 24	3 4 55·56	+0·11	+49 46 2·5
55	16	Mailand	8 46 41	3 8 41·24	+0·34	+49 17 20·4
56	16	„	9 29 4	3 8 50·87	+0·31	+49 16 18·8
57	16	Bonn	9 52 10	3 8 55·08	+0·26	+49 15 32·9
58	16	Wien	12 19 28	3 9 13·83	+0·18	+49 13 1·3
59	17	Mailand	9 3 49	3 13 0·24	+0·32	+48 43 22·0
60	17	„	10 15 40	3 13 13·29	+0·20	+48 41 34·4
61	17	Hamburg	10 58 46	3 13 19·05	+0·18	+48 40 36·6
62	18	Mailand	8 54 43	3 17 8·69	+0·32	+48 9 17·5
63	18	Krakau	10 31 19	3 17 20·33	+0·23	+48 8 10·2
64	18	Lund	10 24 43	3 17 22·74	+0·21	+48 7 29·7
65	18	Königsberg	11 25 36	3 17 32·81	+0·15	+48 7 55·4
66	19	Wien	8 55 44	3 21 12·33	+0·31	+47 35 23·5
67	19	Kremsmünster	8 58 52	3 21 13·88	+0·30	+47 35 0·1
68	19	Hamburg	8 51 36	3 21 15·51	+0·27	+47 34 48·9
69	19	Krakau	9 53 34	3 21 19·62	+0·26	+47 34 19·2
70	19	Wien	9 51 22	3 21 21·77	+0·27	+47 34 1·1
71	19	Leipzig	9 44 56	3 21 23·07	+0·26	+47 33 36·6
72	19	Berlin	11 17 20	3 21 38·60	+0·16	+47 31 34·0
73	19	Krakau	12 16 47	3 21 44·02	+0·07	+47 30 57·0
74	20	Leipzig	9 36 19	3 25 24·18	+0·26	+46 59 5·6
75	20	Berlin	9 40 31	3 25 24·66	+0·25	+46 58 47·7
76	20	Mailand	9 25 5	3 25 24·52	+0·31	+46 58 47·7
77	20	Lund	10 2 49	3 25 28·42	+0·22	+46 58 13·5
78	20	Wien	10 33 6	3 25 32·19	+0·23	+46 57 54·9
79	20	Washington	9 7 44	3 26 19·40	+0·34	+46 50 32·9
80	20	„	9 13 47	3 26 20·26	+0·34	+46 50 24·3
81	22	Wien	9 6 51	3 33 11·09	+0·29	+45 48 9·8
82	22	Hamburg	9 27 13	3 33 18·17	+0·25	+45 46 55·6
83	22	Mailand	9 47 6	3 33 22·63	+0·28	+45 46 35·8
84	22	Krakau	10 48 8	3 33 24·98	+0·20	+45 46 1·8
85	22	Berlin	12 7 31	3 33 41·96	+0·10	+45 43 10·8
86	23	Lund	8 57 34	3 37 2·01	+0·25	+45 11 25·4

Parall-axe	Berechnete		B.—R.		Beobachter
	Rectascension	Declination	dα	dδ	
$+3^s6$	$3^h\ 0^m\ 0^s05$	$+50°22'30''1$	$+0^s45$	$-0''5$	Tietjen
+3·5	3 0 1·17	+50 22 22·0	+0·18	+ 5·5	Rümker
+3·7	3 0 1·58	+50 22 19·0	+0·68	+ 8·4	Weiss
+3·6	3 0 7·02	+50 21 39·5	+0·54	— 3·6	Andries
+4·1	3 0 7·47	+50 21 36·1	+1·63	— 0·1	Karlinski
+3·6	3 0 8·87	+50 21 26·0	+1·15	+ 5·2	Stephan
+4·3	3 0 13·24	+50 20 54·3	+1·20	+ 5·0	Oppenheim
+4·3	3 0 13·47	+50 20 52·6	+0·36	+ 2·2	Schulhof
+3·9	3 4 25·41	+49 49 49·7	+0·93	+21·9	Oppenheim
+4·2	3 4 34·79	+49 48 39·2	+0·36	+ 2·3	Börgen
+3·9	3 4 35·61	+49 48 33·0	+1·41	+ 5·7	Andries
+4·7	3 4 55·21	+49 46 5·3	+0·46	+ 1·9	Tietjen
+3·1	3 8 41·06	+49 17 17·1	+0·52	+ 6·4	Schiaparelli
+3·6	3 8 48·64	+49 16 18·2	+2·54	+ 4·2	Tempel
+3·9	3 8 54·27	+49 15 34·4	+1·07	+ 2·4	Andries
+4·5	3 9 13·90	+49 13 1·6	+0·11	+ 4·2	Palisa
+3·3	3 12 59·57	+48 43 16·5	+0·99	+ 8·8	Schiaparelli
+4·5	3 13 12·20	+48 41 35·0	+1·29	+ 3·9	Tempel
+4·4	3 13 19·23	+48 40 38·6	0·00	+ 2·4	Pechüle
+3·3	3 17 9·23	+48 9 21·3	—0·22	— 0·5	Tempel
+4·2	3 17 18·48	+48 8 4·8	+2·08	+ 5·4	Karlinski
+4·2	3 17 22·00	+48 7 35·3	+0·95	— 1·4	Möller
+4·5	3 17 27·48	+48 6 50·0	+5·48	+69·9	Oppenheim
+3·4	3 21 11·53	+47 35 22·6	+1·11	+ 4·3	Palisa
+3·4	3 21 13·59	+47 35 5·0	+0·59	— 1·5	Strasser
+3·4	3 21 15·19	+47 34 51·4	+0·59	+ 0·9	Pechüle
+3·9	3 21 18·93	+47 34 19·3	+0·95	+ 3·8	Karlinski
+3·9	3 21 21·00	+47 34 1·7	+1·04	+ 3·3	Schulhof
+4·0	3 21 22·62	+47 33 47·9	+0·71	— 7·3	Börgen
+4·5	3 21 37·65	+47 31 39·1	+1·11	— 0·6	Tietjen
+4·8	3 21 43·26	+47 30 50·7	+0·83	+11·1	Wierzbicki
+3·9	3 25 23·93	+46 58 49·6	+0·53	+20·2	Börgen
+3·9	3 25 23·96	+46 58 49·4	+0·95	+ 2·2	Tietjen
+3·5	3 25 24·20	+46 58 47·4	+0·63	+ 3·8	Tempel
+4·1	3 25 27·82	+46 58 15·3	+0·82	+ 2·3	Wijkander
+4·3	3 25 30·77	+46 57 49·4	+1·65	+ 9·8	Palisa
+3·3	3 26 18·85	+46 50 42·9	+0·89	— 6·7	Hall
+3·3	3 26 19·86	+46 50 34·0	+0·74	— 6·4	„
+3·5	3 33 9·99	+45 48 6·1	+1·39	+ 7·2	Palisa
+3·8	3 33 17·43	+45 46 56·3	+0·99	+ 3·1	Pechüle
+3·9	3 33 21·15	+45 46 21·4	+1·76	+18·3	Tempel
+4·4	3 33 24·05	+45 45 53·9	+1·13	+12·3	Karlinski
+4·3	3 33 41·11	+45 43 13·6	+0·95	+ 1·5	Tietjen
+3·7	3 37 1·47	+45 11 21·0	+0·79	+ 8·1	Möller

Nr.	1871	Beobachtungsort	Mittlere Ortszeit	Beobachtete Rectascension	Parallaxe	Beobachtete Declination
	April					
87	23	Mailand.......	9ʰ 33ᵐ 27ˢ	3ʰ 37ᵐ 9ˢ55	+0ˢ29	+45° 10' 4"6
88	23	Washington...	8 24 12	3 37 53·91	+0·36	+45 2 56·3
89	23	" ...	8 24 12	3 37 54·05	+0·36	+45 2 53·5
90	24	Athen........	8 23 6	3 40 37·08	+0·36	+44 36 16·5
91	24	Mailand.......	8 34 7	3 40 48·07	+0·28	+44 34 35·8
92	24	Washington...	8 22 30	3 41 39·69	+0·35	+44 25 45·3
93	25	Wien.........	9 23 49	3 44 35·24	+0·27	+43 56 13·0
94	25	Bonn.........	9 41 45	3 44 43·61	+0·25	+43 54 55·0
95	26	Athen........	8 12 33	3 47 57·6	+0·36	+43 20 52·
96	26	Mailand.......	8 44 28	3 48 11·91	+0·31	+43 18 36·6
97	26	Wien.........	10 0 48	3 48 19·85	+0·24	+43 17 17·8
98	26	Königsberg ...	10 30 38	3 48 22·02	+0·19	+43 16 56·3
99	26	Leipzig.......	11 46 19	3 48 38·27	+0·13	+43 14 10·6
100	27	Athen........	8 26 36	3 51 36·00	+0·35	+42 42 0·3
101	27	Krakau.......	9 43 14	3 51 51·25	+0·25	+42 39 30·6
102	27	"	10 16 32	3 51 56·15	+0·22	+42 38 52·5
103	27	Leipzig.......	9 54 53	3 51 56·71	+0·23	+42 38 22·1
104	27	Königsberg ...	10 29 54	3 51 56·94	+0·19	+42 38 39·1
105	27	Lund.........	10 13 21	3 51 58·99	+0·20	+42 38 4·8
106	27	Berlin........	10 23 28	3 52 0·41	+0·20	+42 37 44·1
107	28	Mailand.......	8 50 31	3 55 20·56	+0·29	+42 0 51·4
108	28	Lund.........	9 41 9	3 55 25·71	+0·22	+41 59 54·9
109	28	Hamburg	10 30 57	3 55 35·53	+0·19	+41 58 11·8
110	29	Athen........	8 22 37	3 58 37·02	+0·34	+41 23 44·5
111	29	"	8 24 46	3 58 38·10	+0·34	+41 23 41·4
112	29	Krakau.......	9 35 1	3 58 51·41	+0·25	+41 21 40·4
113	29	Königsberg ...	11 5 0	3 59 6·05	+0·12	+41
114	29	Washington...	9 34 11	3 59 41·02	+0·32	+41 11 26·3
115	29	" ...	9 34 11	3 59 41·42	+0·32	+41 11 24·6
116	30	Athen........	8 0 35	4 1 59·67	+0·35	+40 44 29·7
117	30	Mailand.......	9 3 40	4 2 17·19	+0·29	+40 41 14·5
118	30	Lund.........	9 32 49	4 2 18·53	+0·22	+40 40 43·2
	Mai					
119	1	Athen........	8 9 27	4 5 23·02	+0·34	+40 3 52·5
120	1	"	8 21 45	4 5 24·93	+0·34	.
121	1	Mailand.......	8 50 53	4 5 36·28	+0·28	+40 1 13·4
122	2	"	9 8 0	4 8 57·47	+0·28	+39 19 43·5
123	2	Berlin........	9 59 35	4 9 2·46	+0·21	+39 18 47·3
124	2	Hamburg	11 1 53	4 9 12·33	+0·15	+39 16 36·0
125	3	Athen........	8 35 5	4 12 0·28	+0·32	+38 41 4·0
126	3	"	8 43 2	4 12 1·38	+0·32	+38 41 1·4
127	3	Berlin........	9 10 41	4 12 10·92	+0·23	+38 38 52·8

Parallaxe	Berechnete Rectascension	Berechnete Declination	B.—R. $d\alpha$	B.—R. $d\delta$	Beobachter
+3^s·8	3^{h}37^m 9^s·72	+45°10' 1"·2	+0^s·12	+ 7"·2	Tempel
+2·9	3 37 53·45	+45 2 56·6	+0·82	+ 2·6	Hall
			+0·96	— 0·2	„
+2·8	3 40 36·48	+44 36 12·1	+0·94	+ 7·2	Schmidt
+3·8	3 40 47·32	+44 34 24·6	+1·03	+15·0	Tempel
+2·8	3 41 39·32	+44 25 45·0	+0·72	+ 3·1	Hall
+3·8	3 44 33·71	+43 56 15·7	+1·80	+ 1·1	Palisa
+4·0	3 44 42·21	+43 54 48·8	+1·65	+10·2	Argelander
+2·7	3 47 57·97	+43 20 51·1	0·0	+ 4·	Schmidt
+3·4	3 48 11·58	+43 18 27·4	+0·64	+12·6	Tempel
+4·1	3 48 18·78	+43 17 11·4	+1·31	+10·5	Palisa
+4·4	3 48 20·78	+43 16 50·1	+1·43	+10·6	Oppenheim
+4·9	3 48 37·10	+43 13 57·2	+1·30	+18·3	Börgen
+2·9	3 51 36·07	+42 41 56·8	+0·28	+ 6·4	Schmidt
+4·0	3 51 49·70	+42 39 28·6	+1·80	+ 6·0	Karlinski
+4·3	3 51 54·65	+42 38 34·7	+1·72	+22·1	„
+4·2	3 51 55·94	+42 38 20·8	+1·00	+ 5·5	Börgen
+4·4	3 51 56·32	+42 38 16·7	+0·81	+26·8	Oppenheim
+4·3	3 51 58·20	+42 37 56·1	+0·99	+13·0	Wijkander
+4·0	3 51 59·56	+42 37 41·2	+1·05	+ 6·9	Tietjen
+3·5	3 55 20·44	+42 0 43·0	+0·41	+11·9	Tempel
+4·1	3 55 25·52	+41 59 46·3	+0·41	+12·7	Möller
+4·4	3 55 34·66	+41 58 3·8	+1·06	+12·4	Pechüle
+2·9	3 58 36·72	+41 23 36·6	+0·64	+10·8	Schmidt
+2·9	3 58 37·03	+41 23 33·1	+1·41	+11·2	„
+4·0	3 58 49·28	+41 21 11·9	+2·38	+32·5	Karlinski
+4·8	3 59 6·10	+41 17 58·1	+0·09	.	Oppenheim
+3·4	3 59 40·63	+41 11 18·7	+0·70	+11·0	Hall
+3·4			+1·11	+ 9·3	„
+2·7	4 1 58·99	+40 44 18·8	+1·03	+13·6	Schmidt
+3·6	4 2 9·36	+40 39 9·0	+1·36	+22·2	Tempel
+4·1	4 2 17·98	+40 40 34·0	+0·77	+13·3	Wijkander
+2·9	4 5 22·24	+40 3 42·2	+1·12	+13·2	Schmidt
.	4 5 23·96	.	+0·97	.	„
+3·6	4 5 36·09	+40 0 53·8	+0·47	+23·2	Tempel
+3·7	4 8 56·89	+39 19 34·0	+0·87	+13·2	„
+4·3	4 9 1·64	+39 18 34·4	+1·03	+17·2	Tietjen
+4·7	4 9 12·02	+39 16 24·4	+0·46	+16·3	Pechüle
+3·2	4 11 59·83	+38 40 53·8	+0·77	+13·4	Schmidt
+3·2	4 12 0·90	+38 40 40·0	+0·80	+24·6	„
+4·0	4 12 10·19	+38 38 40·5	+0·96	+16·3	Tietjen

Nr.	1871	Beobachtungsort	Mittlere Ortszeit	Beobachtete Rectascension	Parallaxe	Beobachtete Declination
	Mai					
	3	Leipzig	$9^h 57^m 59^s$	*— 38·82	+0·22	*+ 2' 44"·8
128	3	Lund	10 2 42	$4^h 12^m 17·47$	+0·19	+38° 37 20·4
129	4	Athen	8 19 26	4 15 10·30	+0·33	+37 59 47·7
	5	„	8 38 16	*—2 0·45	.	*— 3 33·9
	5	Washington	8 9 40	*+ 30·52	+0·32	*+ 9 12·6
130	6	Athen	8 5 3	4 21 23·34	+0·32	+36 35 37·8
131	6	„	8 28 23	4 21 28·18	+0·32	+36 34 49·5
132	6	Mailand	8 47 8	4 21 36·51	+0·27	+36 32 42·1
133	6	Lund	9 59 5	4 21 43·61	+0·19	+36 30 59·9
134	6	Hamburg	9 52 12	4 21 44·13	+0·20	+36 30 50·8
135	7	Mailand	8 59 4	4 24 40·48	+0·27	+35 49 16·2
136	7	Bonn	9 46 15	4 24 48·80	+0·22	+35 47 45·1
137	7	Washington	8 21 5	4 25 17·56	+0·32	+35 40 1·2
138	8	Mailand	9 11 51	4 27 41·23	+0·26	+35 5 36·4
	8	Stonyhurst	10 8	4 27 57·2	.	+35 3 1·4
139	9	Athen	8 6 7	4 30 24·42	+0·32	+34 25 9·2
140	9	„	8 30 36	4 30 27·48	+0·32	+34 24 29·4
141	9	Lund	10 11 17	4 30 44·71	+0·17	+34 20 6·0
142	9	Hamburg	10 14 23	4 30 46·50	+0·18	+34 19 39·2
	9	Stonyhurst	9 57	4 30 58·2	.	+34 20 6·3
143	10	Athen	8 17 13	4 33 20·07	+0·31	+33 40 29·2
144	10	Berlin	9 34 33	4 33 34·58	+0·21	+33 36 51·6
145	10	Bonn	9 39 6	4 33 38·40	+0·21	+33 35 35·5
	10	Stonyhurst	9 43	4 34 12·2	.	+33 35 11·3
146	10	Washington	8 22 34	4 34 8·34	+0·31	+33 27 51·1
147	11	Bonn	9 33 9	4 36 28·19	+0·21	+32 50 13·0
148	13	Athen	8 11 0	4 41 46·52	+0·31	+31 25 0·6
149	13	„	8 30 16	4 41 49·12	+0·31	+31 24 17·4
150	14	Wien	9 15 34	4 44 41·27	+0·23	+30 35 11·0
151	14	Hamburg	9 44 46	4 44 47·76	+0·19	.
152	14	„	9 45 40	.	.	+30 34 12·2
153	15	„	9 45 23	4 47 37·14	+0·19	+29 46 53·4
154	16	Athen	8 25 27	4 49 53·01	+0·30	+29 4 56·1
	August					
	5	Cap der guten Hoffnung	7 59 49	10 11 48·01	+0·72	
	5		8 9 5			—53 54 0·49
	5		8 18 1	10 11 56·11	+0·71	

Parall-axe	Berechnete		B.—R.		Beobachter
	Rectascension	Declination	$d\alpha$	$d\delta$	
+4ˢ3	4ʰ12ᵐ17ˢ07	+38°37'11"9	.	.	Börgen
+4·4	4 12 17·29	+38 37 9·3	+0ˢ37	+15"5	Wijkander
+3·1	4 15 9·95	+37 59 38·2	+0·68	+12·6	Schmidt
.	.	.	.	.	"
+3·0	4 19 5·74	+37 7 1·9	.	.	Hall
+3·0	4 21 23·27	+36 35 18·4	+0·39	+22·4	Schmidt
+3·0	4 21 26·26	+36 34 36·7	+2·24	+15·8	"
+3.0	4 21 36·11	+36 32 19·4	+0·67	+25·7	Tempel
+4·5	4 21 43·27	+36 30 39·5	+0·53	+24·3	Möller
+4·4	4 21 44·04	+36 30 28·7	+0·29	+26·5	Pechüle
+3·8	4 24 40·50	+35 48 53·3	+0·25	+26·7	Tempel
+4·3	4 24 47·51	+35 47 13·1	+1·51	+36·3	Argelander
+3·2	4 25 19·12	+35 39 38·9	—1·24	+25·5	Hall
+3·9	4 27 42·07	+35 4 58·5	—0·58	+41·8	Tempel
.	4 27 53·84	+35 2 9·1	.	.	Perry
+3·1	4 30 24·32	+34 24 44·7	+0·42	+27·6	Schmidt
+3·1	4 30 27·07	+34 24 3·3	+0·73	+29·2	"
+4·6	4 30 44·49	+34 19 30·3	+0·39	+40·3	Dunér
+4·5	4 30 46·42	+34 19 11·0	+0·26	+32·7	Pechüle
.	4 30 49·16	+34 18 29·3	.	.	Perry
+3·1	4 33 19·93	+33 40 4·9	+0·45	+27·4	Schmidt
+4·3	4 33 34·16	+33 36 24·1	+0·63	+31·8	Tietjen
+4·3	4 33 37·73	+33 35 28·8	+0·88	+11·0	Andries
.	4 33 41·61	+33 34 28 5	.	.	Perry
+3·3	4 34 8·92	+33 27 24·5	—0·27	+29·9	Hall
+4·3	4 36 28·61	+32 50 46·7	—0·21	—29·4	Andries
+3·3	4 41 46·78	+31 24 24·4	+0·05	+39·5	Schmidt
+3·3	4 41 48·99	+31 23 47·6	+0·44	+33·1	"
+4·8	4 44 41·38	+30 35 11·7	+0·12	+ 4·1	Palisa
.	4 44 47·57	.	+0·38	.	Rümker
+4·5	.	+30 33 23·9	.	+52·8	"
+4·5	4 47 28·95	+29 46 43·1	+8·38	+14·8	"
+3·4	4 49 52·89	+29 4 0·7	+0·42	+58·8	Schmidt
—3·74	10 11 9·69	—53 53 39·46	+39·04	—24·77	Mann
	10 11 17·60		+39·22		

Zu den in der ersten Abtheilung aufgestellten sechs Normalorten tritt also jetzt noch die Beobachtung vom 5. August hinzu; man hat demnach folgende sieben Positionen, denen die Bahn möglichst genau anzuschliessen ist:

	1871·0		Mittl. *AR.*	Mittl. Decl.
I.	April	10·0	39°57'48"4	+52°38'15"8
II.	„	16·5	47 19 5·1	+49 12 55·2
III.	„	22·5	53 25 52·4	+45 43 10·2
IV.	„	28·0	58 30 52·8	+42 15 26·5
V.	Mai	5·5	64 43 53·6	+37 9 44·8
VI.	„	12·5	69 53 24·7	+32 1 40·2
VII.	August	5·31890	152 58 2·5	−53 53 59·4

Am Schlusse der früheren Abhandlung hatte ich folgendes Elementensystem als das wahrscheinlichste aufgestellt:

$$T = 1871 \text{ Juni } 10{\cdot}61255 \quad \text{mittl. Berl. Zeit}$$
$$\left.\begin{aligned} \pi &= 141°44'20"8 \\ \Omega &= 279\ 18\ 17{\cdot}4 \\ i &= 87\ 34\ 29{\cdot}2 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Äquinoctium } 1871{\cdot}0$$
$$\log q = 9{\cdot}816264$$

Werden dieselben Elemente auf den Äquator als Fundamentalebene bezogen, so lauten sie:

$$T = 1871 \text{ Juni } 10{\cdot}61255 \quad \text{mittl. Berl. Zeit}$$
$$\left.\begin{aligned} \pi'-\Omega' &= 199°17'49"5 \\ \Omega' &= 279\ 30\ 9{\cdot}0 \\ i' &= 91\ 27\ 36{\cdot}7 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Äquator } 1871{\cdot}0$$
$$\log q = 9{\cdot}816264$$

Um nun die Bahn des Kometen auch der Beobachtung vom 5. August anzupassen, rechnete ich vorerst für diesen Tag die entsprechenden Differentialquotienten zwischen den Elementen und den geocentrischen polaren Coordinaten.

Dabei wurden auch die Excentricitätsglieder mit aufgenommen, um die frühere Rechnung in dieser Hinsicht zu vervollständigen.

Die auf diese Weise zu den früheren neu hinzukommenden Coëfficienten wurden wieder hinsichtlich ihrer Richtigkeit durch willkürliche Änderungen der Elemente geprüft.

Als Bedingungsgleichungen ergeben sich folgende 14 Gleichungen:

Für die Rectascensionen:

di'	$+\,d\Omega'$	$+\,d\omega'$	$+\,dT$	$+\,d\log q$	$+\,de$	$=$
9·56112	8·98296	9·79051	$8^{n}95143$	9·45503	9·51393	$=-2''91$
9·60508	9·15886	9·71257	$8^{n}89506$	9·39920	9·41064	$=+0·87$
9·61554	9·27740	9·62737	$8^{n}82760$	9·33820	9·29955	$=+1·90$
9·60448	9·36208	9·53660	$8^{n}74874$	9·27431	9·18365	$=+1·86$
9·55889	9·45123	9·38835	$8^{n}60033$	9·17457	9·00199	$=-2·06$
9·47923	9·51354	9·21290	$8^{n}37527$	9·06768	8·80546	$=-1·60$
$9^{n}80388$	$9^{n}35160$	9·93627	$9^{n}44508$	$9^{n}61699$	8·74971	$=+345·82$

Für die Declinationen:

di'	$+\,d\Omega'$	$+\,d\omega'$	$+\,dT$	$+\,d\log q$	$+\,de$	$=$
9·68274	9·20101	$9^{n}63080$	9·24387	$9^{n}30539$	9·30319	$=-0''23$
9·58277	9·20825	$9^{n}67830$	9·30004	$9^{n}35691$	9·25016	$=-1·93$
9·47207	9·19482	$9^{n}69980$	9·34405	$9^{n}38272$	9·22160	$=-0·69$
9·35282	9·16665	$9^{n}70639$	9·37948	$9^{n}39224$	9·20661	$=+2·60$
9·15585	9·10369	$9^{n}70104$	9·42229	$9^{n}38678$	9·19077	$=+2·58$
8·92186	9·01652	$9^{n}68564$	9·45807	$9^{n}36341$	9·16685	$=-5·92$
$9^{n}83079$	$9^{n}31778$	$9^{n}48911$	9·43848	9·15495	$9^{n}77725$	$=-24·77$

Die Änderungen von di', $d\Omega'$, $d\omega'$ sind in Bogen auszudrücken, während dT in Einheiten der vierten Decimale des mittleren Tages, $d\log q$ in Einheiten der sechsten und de in Einheiten der fünften Decimale zu nehmen sind; statt der Differentialquotienten selbst sind ihre Logarithmen angesetzt.

Indem ich diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelte, und dabei jeder von ihnen dasselbe Gewicht gab, erhielt ich nachstehende 6 Normalgleichungen:

di'	$d\Omega'$	$d\omega'$	dT	$d\log q$	de	
$+2\cdot25743\,di'$	$+0\cdot99301\,d\Omega'$	$-0\cdot22103\,d\omega'$	$+0\cdot19757\,dT$	$+0\cdot26080\,d\log q$	$+1\cdot07661\,de$	$=-204\cdot377$
$+0\cdot99301$	$+0\cdot52322$	$-0\cdot12646$	$+0\cdot18423$	$+0\cdot09406$	$+0\cdot44779$	$=-\ 73\cdot388$
$-0\cdot22103$	$-0\cdot12646$	$+3\cdot27970$	$-1\cdot15701$	$+0\cdot79209$	$+0\cdot25443$	$=+307\cdot174$
$+0\cdot19757$	$+0\cdot18423$	$-1\cdot15701$	$+0\cdot50609$	$-0\cdot24851$	$-0\cdot02762$	$=-104\cdot057$
$+0\cdot26080$	$+0\cdot09406$	$+0\cdot79209$	$-0\cdot24851$	$+0\cdot77917$	$-0\cdot08925$	$=-146\cdot301$
$+1\cdot07661$	$+0\cdot44779$	$+0\cdot25443$	$-0\cdot02762$	$-0\cdot08925$	$+0\cdot78308$	$=+\ 33\cdot338$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen betrachtete ich die Bahn zuerst als Parabel, ich liess also die von de abhängigen Glieder unberücksichtigt; dies führte zu folgenden Correctionen der oben angeführten Elemente:

$$dT = +172\cdot73$$
$$d\omega' = +239''71$$
$$d\Omega' = +\ 91\cdot44$$
$$di' = -\ 80\cdot77$$
$$d\log q = -360\cdot4$$

Demnach ergab sich als wahrscheinlichste Parabel:

$T =$ 1871 Juni 10·62982 mittl. Berl. Zeit

$\omega' =$ 199°21'49''2
$\Omega' =$ 279 31 40·4
$i' =$ 91 26 15·9
} mittl. Äquator 1871·0

$\log q =$ 9·815904

Die in den Normalorten übrig bleibenden Fehler sind:

	$d\alpha\cos\delta$	$d\delta$
I.	$-12''1$	$+23''5$
II.	$+\ 0\cdot5$	$+12\cdot1$
III.	$+\ 6\cdot4$	$+\ 3\cdot9$
IV.	$+\ 8\cdot3$	$-\ 1\cdot0$
V.	$+\ 3\cdot5$	$-10\cdot5$
VI.	$0\cdot0$	$-25\cdot2$
VII.	$+\ 6\cdot9$	$+17\cdot5$

$$\Sigma(d\alpha\cos\delta)^2 = 315\cdot7$$
$$\Sigma(d\delta)^2 = 1769\cdot0$$
$$\Sigma(vv) = 2084\cdot7$$

Da diese Darstellung sehr unbefriedigend ist, und sich in den Abweichungen ein auffälliger Gang zeigt, der offenbar auf eine Ellipticität der Bahn hinweist, so löste ich die Normalgleichungen mit Berücksichtigung der Excentricitätsglieder auf.

Die Elimination ergab als Bestimmungsgleichungen für die 6 Unbekannten:

$+2\cdot25743\,di'$	$+0\cdot99301\,d\Omega'$	$-0\cdot22103\,d\omega'$	$+0\cdot19757\,dT$	$+0\cdot26080\,d\log q$	$+1\cdot07661\,de$	$=-204\cdot377$
	$+0\cdot08641$	$-0\cdot02923$	$+0\cdot04732$	$-0\cdot02066$	$-0\cdot02580$	$=+\ 16\cdot515$
		$+3\cdot24817$	$-1\cdot12165$	$+0\cdot81063$	$+0\cdot35111$	$=+292\cdot750$
			$+0\cdot07556$	$+0\cdot01991$	$+0\cdot01353$	$=+\ 5\cdot877$
				$+0\cdot53655$	$-0\cdot31099$	$=-193\cdot348$
					$+0\cdot04129$	$=-\ 9\cdot025$

Hieraus findet man:

$$dT = +245 \cdot 25$$
$$d\omega' = +319''99$$
$$d\Omega' = -\ 16 \cdot 67$$
$$di' = +\ 87 \cdot 17$$
$$d \log q = -487 \cdot 0$$
$$de = -218 \cdot 57$$

und demnach als die wahrscheinlichste Ellipse:

T = 1871 Juni 10·63707 mittl. Berl. Zeit
ω' = 199°23' 9''46 ⎫
Ω' = 279 29 52·29 ⎬ mittl. Äquator 1871·0
i' = 91 29 3·91 ⎭
$\log q$ = 9·8157773
e = 0·9978143 (φ = 86°12'40''0)
a = 299·7
Umlaufszeit = 5188 Jahre

Die sieben Normalorte werden mit diesen elliptischen Elementen folgendermassen dargestellt:

	Nach den Bedingungsgleichungen		Nach der directen Rechnung	
	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
I.	+1''6	—0''3	+1''8	—0''5
II.	+0·7	—0·9	+0·9	—1·2
III.	—0·4	+1·1	—0·3	+0·8
IV.	—0·7	+4·4	—0·4	+4·3
V.	—2·6	+3·4	—2·6	+3·2
VI.	+2·0	—7·1	+2·1	—7·2
VII.	+0·2	+0·9	+0·5	+0·4

$$\Sigma (d\alpha \cos\delta)^2 = 15 \cdot 2$$
$$\Sigma (d\delta)^2 = 83 \cdot 0$$
$$\Sigma (vv) = 98 \cdot 2$$

Zur directen Darstellung der Beobachtungen vom 5. August hatte ich wie früher folgende Positionen gerechnet:

1871 Mittl. Berl. Zeit		Scheinbare Rectascension	Scheinbare Declination	Log. Entfg. ☌ von ♁	Aberrationszeit
August	4·5	10ʰ 3ᵐ22ˢ28	—53°20'55''96	0·0515483	
	5·0	10 8 33·00	—53 41 27·02	0·0530409	9ᵐ23ˢ8
	5·5	10 13 46·71	—54 1 4·70	0·0546015	
	6·0	10 19 3·16	—54 19 48·30	0·0562290	

Die Summe der Fehlerquadrate, die früher bei Annahme einer parabolischen Bahn 2084·7 betrug, wird also jetzt, wenn noch die Excentricität berücksichtigt wird, auf 98·2 herabgedrückt.

Auch diese Grösse würde noch auf die Hälfte herabsinken, wenn nicht die bedeutende Abweichung des wegen geringer Anzahl und Unsicherheit der Beobachtungen minder guten VI. Normalortes den Ausschlag gäbe.

Da der für die Umlaufszeit aus der Excentricität folgende Werth eine sehr unsichere Grösse ist, so untersuchte ich, wie weit sich durch Variation von de die Umlaufszeit noch herabmindern lässt, ohne dass dadurch die übrig bleibenden Fehler zu bedeutend werden. Zu diesem Zwecke wurden alle Unbekannten als Function der Excentricität dargestellt, und es ergaben sich folgende Werthe, in denen alle Zahlenangaben logarithmisch angesetzt sind.

$$\begin{aligned} di' &= 1^{n}90727 + 9^{n}88557\,de \\ d\Omega' &= 1\cdot96113 + 9\cdot69426\,de \\ d\omega' &= 2\cdot37968 + 9^{n}56504\,de \\ dT &= 2\cdot23737 + 9^{n}52086\,de \\ d\log q &= 2^{n}55673 + 9\cdot76314\,de \end{aligned}$$

Durch Substitution dieser fünf Werthe in die 14 Bedingungsgleichungen entstehen nachfolgende Ausdrücke:

Für die Rectascensionen		Für die Declinationen	
1.	$+ 6257\,de = -12\cdot08$	8.	$-10881\,de = +23\cdot51$
2.	$+ 111\,de = + 0\cdot47$	9.	$- 5913\,de = +12\cdot05$
3.	$- 3119\,de = + 6\cdot40$	10.	$- 1298\,de = + 3\cdot89$
4.	$- 4184\,de = + 8\cdot29$	11.	$+ 2469\,de = - 1\cdot00$
5.	$- 2798\,de = + 3\cdot48$	12.	$+ 6352\,de = -10\cdot52$
6.	$+ 926\,de = - 0\cdot01$	13.	$+ 8305\,de = -25\cdot24$
7.	$- 3047\,de = + 6\cdot90$	14.	$- 7611\,de = +17\cdot53$

In diesen Gleichungen nahm ich für de, als dessen wahrscheinlichster Werth oben $de = -0\cdot002186$ gefunden wurde, in gleichen Intervallen fünf verschiedene Werthe an und bestimmte die übrig bleibenden Fehler.

Nachstehendes Schema zeigt nun, dass die Umlaufszeit (U) immer noch verhältnissmässig gross bleibt, wenn man auch die Fehler bedeutend ansteigen lässt.

$de =$	−0·001500	−0·002000	−0·002500	−0·003000	−0·003500
1	−2″70	+0″43	+3″56	+6″69	+9″81
2	+0·64	+0·69	+0·75	+0·80	+0·86
3	+1·72	+0·16	−1·40	−2·96	−4·52
4	+2·09	+0·02	−2·04	−4·11	−6·18
5	−0·72	−2·12	−3·52	−4·92	−6·32
6	+1·38	+1·85	+2·31	+2·77	+3·24
7	+2·33	+0·81	−0·71	−2·24	−3·76
$\Sigma(d\alpha\cos\delta)^2$	22·91	9·26	37·59	107·89	220·13
8	+ 7″19	+1″74	−3″70	−9″14	−14″58
9	+ 3·18	+0·22	−2·73	−5·69	− 8·65
10	+ 1·95	+1·30	+0·65	0·00	− 0·65
11	+ 2·70	+3·94	+5·17	+6·41	+ 7·64
12	− 0·99	+2·19	+5·36	+8·54	+11·72
13	− 12·78	−8·63	−4·48	−0·32	+ 3·83
14	+ 6·11	+2·31	−1·50	−5·30	− 9·11
$\Sigma(d\delta)^2$	274·54	104·88	99·35	258·02	580·97
$\Sigma(vv)$	297·45	114·14	136·94	365·91	801·11
U in Jahren	9094	5923	4249	3223	2564

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, dass man für die Umlaufszeit ohne Bedenken einen Spielraum von etlichen tausend Jahren annehmen kann.

Um die gefundenen Elemente, die sich auf den Äquator beziehen, auf die Ekliptik zu übertragen, dienten wieder folgende Differentialformeln:

$$d\Omega = 9\cdot9638\ d\Omega' + 9\cdot5947\ di' \qquad \text{darnach ist: } d\Omega = +\ 18''94$$
$$d\sigma = 8\cdot8106 \qquad + 8\cdot2245 \qquad d\sigma = +\ 0\cdot38$$
$$di = 9{}_n5941 \qquad + 9\cdot9636 \qquad di = +\ 86\cdot71$$
$$d\omega = +319\cdot61$$

Demnach sind die definitiven Elemente des Kometen I, 1871:

$$\begin{aligned} T &= 1871 \text{ Juni } 10{\cdot}63707 \text{ mittl. Berl. Zeit} \\ \pi &= 141^\circ 49' 59''3 \\ \omega &= 222\ 31\ 23{\cdot}0 \\ \Omega &= 279\ 18\ 36{\cdot}3 \\ i &= 87\ 35\ 55{\cdot}9 \\ \log q &= 9{\cdot}815777 \\ e &= 0{\cdot}995814 \\ a &= 299{\cdot}7 \\ \text{Umlaufszeit} &= 5188 \text{ Jahre} \end{aligned} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{mittl. Äquinoctium } 1871{\cdot}0$$

Seit die Kometen durch den Zusammenhang, in welchem sie mit den Sternschnuppenfällen stehen, noch mehr als früher die Aufmerksamkeit der Astronomen auf sich gelenkt haben, ist es jedesmal von Interesse, bei einem Kometen zu bestimmen, wie weit er sich während seines Durchganges durch die Ekliptik der Erdbahn nähert. In dieser Beziehung zeigt der hier behandelte Komet nichts Auffälliges; nach den jetzigen Elementen ist die wahre Anomalie zur Zeit des niedersteigenden Knotens

$$v = -42^\circ\ 31'$$

und der zugehörige Radius vector

$$r = 0{\cdot}75,$$

der zur Sonnenlänge 279° 19′ gehörige Radius vector

$$R = 0{\cdot}98.$$

Der Komet ging also innerhalb der Erdbahn in einer Entfernung von 0·23 an derselben vorüber; dies geschah am 23. Mai, während die Erde an dieser Stelle am 31. December anlangte. Der kleinste Abstand des Kometen von der Erde selbst fand Ende Juli statt und betrug 1·08, war also eine noch sehr bedeutende Grösse.

Etwas interessanter gestalten sich diese Verhältnisse bei dem Planeten Venus; der Komet ging nämlich ausserhalb der Venusbahn in einer Entfernung von nur 0·026 vorbei. Der kleinste Abstand von dem Planeten Venus selbst aber war (8. Mai) 0·66.

In dem Bereich der grössten Störungen durch die hier betrachteten Planeten, Erde und Venus, blieb der Komet nur verhältnissmässig kurze Zeit; denn einerseits steht seine Bahn auf der Erdbahn, also auch auf der Venusbahn, nahezu senkrecht, andererseits eilte er zur Zeit seines Durchganges durch die Ekliptik mit beschleunigter Geschwindigkeit dem Perihel zu.

Dieser letztere Umstand, sowie die immer noch beträchtliche kleinste Distanz des Kometen von Venus (0·66), die erst dann eintrat, als die Beobachtungen schon sehr unsicher waren, oder ganz aufgegeben wurden, zusammengehalten mit der nur auf einer einzigen Beobachtung beruhenden Position vom 5. August, bestimmte mich, die Störungen auch in der jetzigen Rechnung zu übergehen.

XVII. SITZUNG VOM 25. JUNI 1874.

Seine Excellenz der Herr k. k. Handels-Minister übersendet, mit Note vom 17. Juni, eine Serie von fünf Kategorien von Preis-Medaillen der Wiener Weltausstellung 1873.

Die Herren Jérôme Coggia in Marseille und Wilhelm Tempel in Mailand danken, mit Schreiben vom 14. und beziehungsweise vom 17. Juni, für die ihnen zuerkannten und übersendeten Kometen-Preise.

Herr Regierungsrath Dr. K. v. Littrow überreicht eine Abhandlung: „Bahnbestimmung des ersten Kometen vom Jahre 1871" (II. Abtheilung), von Herrn Dr. Joh. Holetschek.

Derselbe legt ferner das von Herrn Dr. Holetschek berechnete „Dritte Elementensystem des von Coggia in Marseille am 17. April entdeckten Kometen sammt Ephemeride" vor.

Herr Prof. Dr. Fr. Toula überreicht eine Abhandlung, betitelt: Kohlenkalk- und Zechstein-Fossilien aus dem Hornsund an der Süd-Westküste von Spitzbergen".

Herr Prof. Dr. A. Schrauf berichtet über seine „Untersuchung eines neuen Minerals, genannt Veszelyit".

Der Secretär legt eine Probe künstlichen Vanilin's vor, welches im Laboratorium des Herrn Prof. A. W. Hofmann in Berlin aus Sägespänen dargestellt und ihm von diesem zugesendet wurde.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Tomo IX, Entrega 106; Tomo X, entrega 107—109. Habana, 1873; 8°.

Academy of Science of St. Louis: Transactions. Vol. III, Nr. 1. St. Louis, 1873; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 18. Wien, 1874; 8°.

Buffalo Society of Natural Sciences: Bulletin. Vol. I. Nrs. 2—3. Buffalo, 1873; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences Tome LXXVIII, Nr. 23. Paris, 1874; 4°.

Connecticut Academy of Arts and Sciences: Transactions. Vol. II, Part 2. New Haven, 1873; 8°.

Fritz, Hermann, Verzeichniss beobachteter Polarlichter. (Auf Kosten der kais. Akademie der Wissenschaften.) Wien, 1873; 4°.

Gesellschaft der Wissenschaften, k. böhm.: Sitzungsberichte. 1874, Nr. 2. Prag; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 12. Wien, 1874; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö. Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 25. Wien, 1874; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrg. 1874, Nr. 10. Wien; 4°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administrat. Militär-Comité. Jahrgang 1874, 6. Heft, Wien; 8°.

Nature. Nr. 242, Vol. X. London, 1874; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrg. 1874, Nr. 9. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger“. III° Année, 2° Série, Nr. 51. Paris, 1874; 4°.

Report, Annual, of the Chief Signal-Officer to the Secretary of War for the Year 1872. Washington, 1873; 8°.

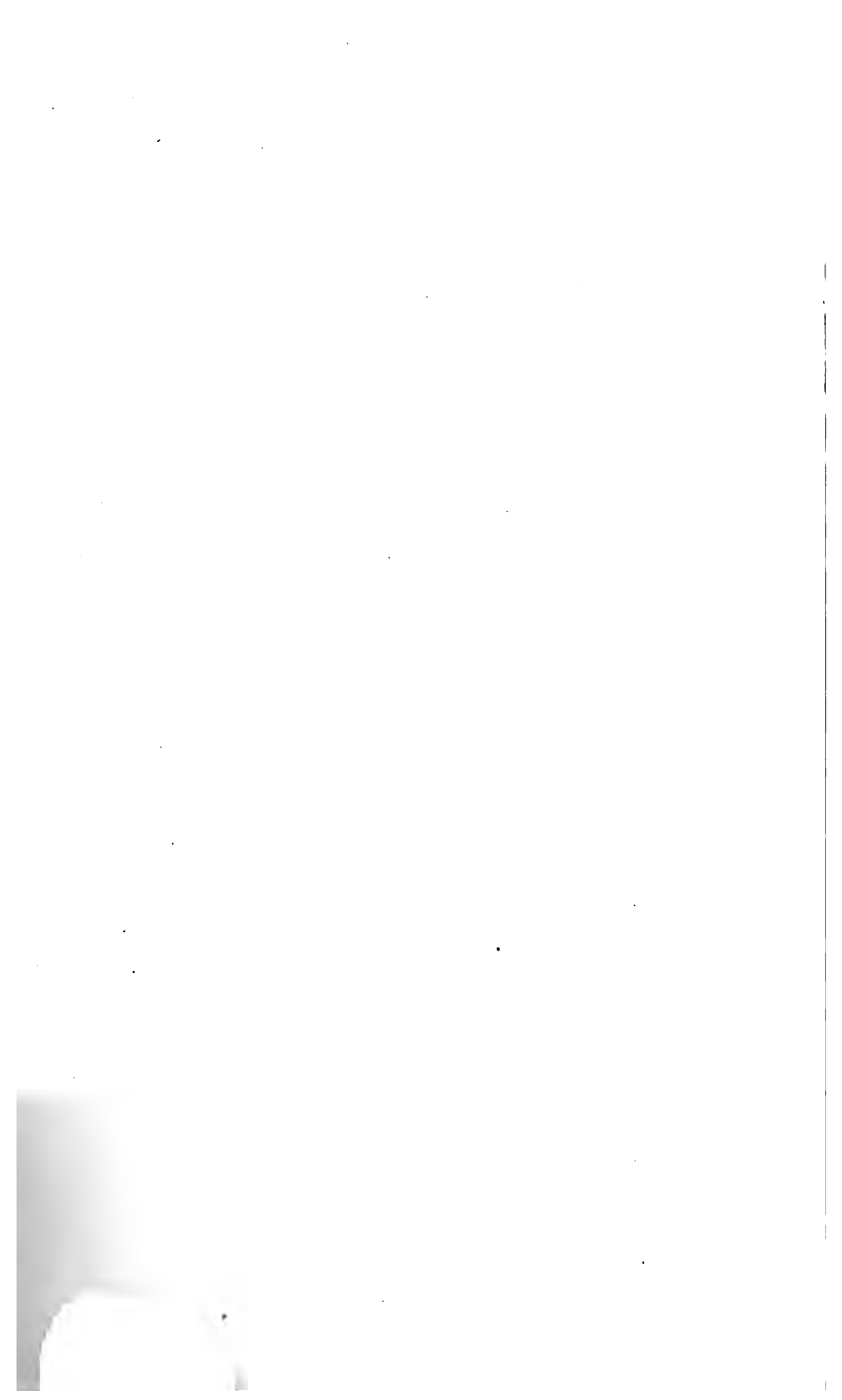
Santiago de Chile, Universität: Anales. Años 1871 & 1872. 8°. — Sesiones ordinarias i estraordinarias de la Cámera de Diputados i ordinarias de la de Senadores de 1872. 4°. Estadistica comercial de la República de Chile de 1871. 4°. — Memoria de Marina. 1871; Memorias del Interior, Relaciones Esteriores, Colonizacion, Instruccion Publica i Marina de 1872. 8°. — Apéndice a la Memoria del Interior de 1872. 8°. — Apéndice a la Memoria de Relaciones Esteriores de 1872. 8°. — Lei de presupuestos para 1873. 4°. — Compilacion de leyes i dicretos vijentes en materia de instruccion pública, por M. E. Ballesteros. 1872; 8°. —

Ordenanza de Aduanas de la República de Chile. 1873; 8°. — Colonizacion de Llanquihue, Valdivia i Arauco etc., por José Antonio Varas. 1872; 8°. — Reseña de los trabajos de la Universidad desde 1855 hasta el año 1872, por don Ignacio Domeyko. 1872; 8°. — Cuenta jeneral de las entradas i gastos de la República de Chile en 1871. 4°. — Tratado de ensayes por el señor dor Ignacio Domeyko. 1873; 8°. — Derecho publico ecclesiastico, por don Rafael Fernandez Concha. Tomo I & II. 1872; gr. 8°. — Los orijenes de la iglesia chilena, por don Crescente Errázuriz. 1873; 8°. — Los precursores de la Independencia de Chile, por don Miguel L. Amunátegui. 1870—1872; 8°. — Anuario estadistico. Tomo XII. 1872; 4°. — Viage al desierto de Atacama, por el doctor don R. A. Philippi. Halle en Sajonia, 1860; 4°.

Sociedad Mexicana de historia natural: La Naturaleza. Entrega 12 & 19—39. Mexico, 1869—1873; 4°.

Verein für Landeskunde von Niederösterreich: Blätter. VII. Jahrgang. 1873, Nr. 1—12. Wien; 8°. — Topographie von Niederösterreich. 5., 6. & 7. Heft. Wien, 1873 & 1874; 4°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 25. Wien, 1874; 4°.



Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und von dieser eine erhöhte Auflage in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe werden daher vom Jahre 1862 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen** erscheinen, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

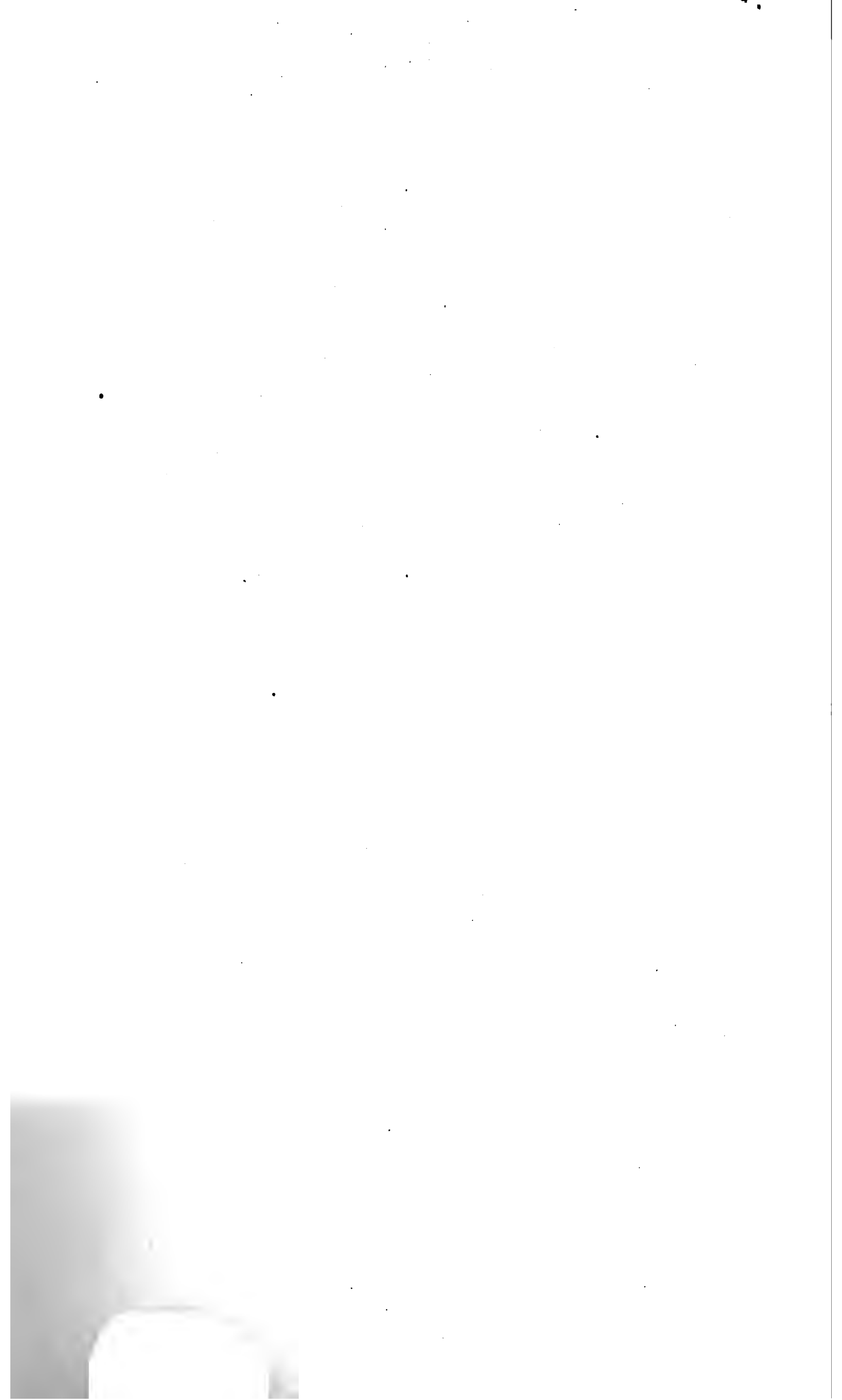
Von der I. und II. Abtheilung werden jährlich 5—7 und von der III. 3—4 Hefte erscheinen.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Der Preis des ganzen Jahrganges sämmtlicher drei Abtheilungen beträgt 24 fl.

Von allen in den Sitzungsberichten erscheinenden Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) bezogen werden.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlung enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.



meny 7

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. BAND. II. HEFT.

Jahrgang 1874. — Juli.

(Mit 10 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

INHALT

des 2. Heftes (Juli 1874) des 70. Bandes, II. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. = 20 Ngr.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

7.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XVIII. SITZUNG VOM 9. JULI 1874.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Untersuchungen über die Gallenfarbstoffe." IV. Abhandlung, vom Herrn Prof. R. Maly in Innsbruck.

„Über eine Modification der herrschenden Gastheorie," von dem Professor und Capitular zu Seitenstetten, Herrn Karl Puschl.

Herr Prof. Dr. Ed. Suess überreicht eine Abhandlung des Herrn Th. Fuchs über „Die Tertiärbildungen von Tarent."

Herr Hofrath Dr. E. v. Brücke legt eine Untersuchung „über die Sommer'schen Bewegungen" vor, welche vom Herrn Dr. H. Storoscheff aus Moskau im physiologischen Institute der Wiener Universität durchgeführt wurde.

Herr Dr. Zöller, Professor an der Hochschule für Bodencultur, spricht „über Ernährung und Stoffbildung der Pilze."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia Olimpica di Vicenza: Atti. 2do Semestre 1873. Vicenza; 8°.

Akademie der Wissenschaften und Künste, Südslavische: Rad. Knjiga XXVII. U Zagrebu, 1874; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 19. Wien, 1874; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1996—2000 (Bd. 84. 4—8) Kiel, 1874; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXVIII, Nrs. 24—25. Paris, 1874; 4°.

Ellis, Alex. J., Algebra identified with Geometry. London, 1874; 8°.

Friedmann, Alexander, Officieller Bericht über das Marinewesen auf der Weltausstellung 1873 Wien. Wien 1874; 8°.

Geological Survey of the Territories, U. St.: Report. (2 Volumes.) Washington, 1873; 4°. — I[st], II[d] and III[d] & VI[th] Annual Reports. For the Years 1867, 1868 and 1869, & 1872. Washington, 1873; 8°. — Miscellaneous Publications. Nrs. 1—2. Washington, 1873; 8°.

Gesellschaft, Deutsche Geologische: Zeitschrift. XXV. Band, 4. Heft. Berlin, 1873; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrg. Nr. 26. Wien, 1874; 4°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo III°. Serie IV[a], Disp. 4[a]—6[a]; Venezia, 1873—74; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band IX, 9. & 10. Heft. Leipzig, 1874; 8°.

Koderle's automatische Sicherheits-Vorrichtungen für die Fahrzeuge der Eisenbahnen. Lindau; 8°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 13. Graz, 1874; 4°.

Loomis, Isaacs, The Epoch of the Beautiful in Knowledge. Nantucked, Mss., 1874; 8°.

Lotos. XXIV. Jahrg. Mai—Juni 1874. Prag; 8°.

Luvini, Giovanni, Di un nuovo strumento meteorologico-geodetico-astronomico, il dieteroscopio. Torino, 1874; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 20. Band, 1874, Heft VI. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique du D[teur] Quesneville. 391[e] Livraison. Paris, 1874; 4°.

Nature. Nrs. 243—244, Vol. X. London, 1874; 4°.

Puyals de la Bastida, Don Vicente, Ortografia de la lengua Castellana. Madrid, 1874; 12°. — Numeracion perfecta braquiloga é ideografica. Madrid, 1874; 12°.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXIV. Band, Jahrgang 1874. Juli-Heft. Wien; 8°.

Revista de la Universidad de Madrid. 2[a] Época. Tomo III. Nr. 2—4. Madrid, 1874; gr. 8°.

— de Portugal e Brazil. 2° Vol., Nr. 5. Lisboa, 1874; 4°.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger“. IIIe Année, 2e Série, Nr. 52. IVe Année, 2e Série, Nr. 1. Paris, 1874; 4°.

Schiaparelli, G. V., Il periodo undecennale delle variazioni diurne del magnetismo terrestre considerato in relazione colla frequenza delle macchie solari. 4°.

Siragusa, Fr. P. Camillo, Sulle funzioni delle radici delle piante. Palermo, 1874; 8°.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Anno 1874, disp. 5^{a}. Palermo, 1874; 4°.

Société mathématique de France: Bulletin. Tome II, Nrs. 1—2. Paris, 1874; 8°.

Society, The Chemical, of London: Journal. Serie 2, Vol. XI. December 1873; Vol. XII. February—April 1874. London; 8°.

Tommasi, Donato, Researches on the Preparation of Organo-Metallic Bodies of the C_nH_{2n} Series. 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nrs. 26—27. Wien, 1874; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang, 10. Heft. Wien, 1874; 4°.

Über die Sommer'schen Bewegungen.

Von Dr. **H. Storoscheff.**

(Aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.)

Im Jahre 1833 fand bekanntlich Andreas Gartner Sommer bei seinen Untersuchungen über die Todtenstarre,[1] dass die Leichen zwar im Allgemeinen in derjenigen Lage starr werden, in welche man sie nach dem Tode bringt, dass aber doch kleine Veränderungen in der Stellung der Glieder vor sich gehen; namentlich zeigten die Finger eine Neigung sich stärker zu krümmen, das Ellbogengelenk eine Neigung, sich stärker zu beugen; auch der Unterkiefer näherte sich mehr dem Oberkiefer, und die Füsse schienen ihre Lage in der Weise um ein Geringes zu ändern, dass sie mit dem Schienbeine einen etwas grösseren Winkel machten, als zu der Zeit, wo sie von der Starre befallen wurden. Alles dieses wies auf Überwiegen der stärkeren Muskeln über schwächere Antagonisten hin.

Als Brücke die Todtenstarre auf die Gerinnung des Muskelfibrins zurückführte,[2] erklärte er sich diese Bewegungen aus der Zusammenziehung des geronnenen Faserstoffes, wobei die stärkeren Beuger die schwächeren Strecker überwögen. Er hatte indessen über den Gegenstand keine eingehenden Untersuchungen angestellt. Es führte ihn zu seiner Annahme nur die Analogie mit der Zusammenziehung des geronnenen Blutfaserstoffes und die Wahrnehmung, dass bei tiefen Einschnitten in die Masse erstarrter Muskeln sich die Wundlippen etwas von einander entfernten, und sich in der Tiefe der Wunde

---

[1] Dissertationis de signis mortem hominis absolutam ante putredinis accessum indicantibus particula posterior. Hauniae 1833.

[2] Über die Ursache der Todtenstarre. Müller's Archiv für Anatomie, Physiologie und wissenschaftliche Medicin. Jahrg. 1842, S. 178.

eine geringe Menge von Flüssigkeit ansammelte. Andererseits könnte auch die Ansicht aufgestellt werden, dass die Muskeln sich während des Absterbens in Folge ihrer vitalen Contractilität verkürzen und dann in verkürztem Zustande gerinnen könnten, und dass auf diese Weise die stärkeren Beuger die schwächeren Strecker überwinden und so die gesagte Stellungsveränderung zu Wege bringen könnten.

Es schien mir desswegen nothwendig, den zeitlichen Verlauf dieser Bewegungen in der Weise zu untersuchen, dass ich dabei einerseits auf das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein der Reizbarkeit, andererseits auf die progressive Entwickelung der Starre Rücksicht nahm.

Die ersten meiner Versuche habe ich an Tauben angestellt. Vögel empfahlen sich für die Versuche zunächst dadurch, dass der ganze Process bei ihnen in der kürzesten Zeit ablief, und also in der kürzesten Zeit ein Resultat erzielt wurde. Ausserdem war wohl sonst nirgendwo ein solches Überwiegen einer bestimmten Muskelgruppe vorhanden, wie in den grossen, dem Fliegen dienenden Brustmuskeln der Vögel.

Die Tauben wurden durch Strangulation getödtet und dann auf ein Brett, mit der Bauchfläche nach oben, in der Weise aufgenagelt, dass der eine Nagel durch das Kreuzbein, der andere in den Winkel der Furcula und zwischen den Schenkeln der Furcula hindurch in die Wirbelsäule getrieben wurde. Es wurde nun eine Nadel durch die Brustmuskeln hart am Brustbeinkamm hindurch gesteckt, und eine andere durch das Carpalgelenk. An beiden wurden verschiedenfarbige Seidenfäden befestigt, diese in horizontaler Richtung über zwei 68 Cm. davon entfernte Glasstäbe geleitet und mit einem geringen Gewichte beschwert, um sie leicht gespannt zu erhalten. Das Brett, auf dem die Taube aufgenagelt war, war dabei in einer drehbaren eisernen Hand befestigt, und ich gab ihm anfangs eine solche Neigung, dass die beiden Fäden in einer Ebene senkrecht übereinander lagen. Es wurde dann eine auf durchsichtig gemachtem Papier befindliche Millimetertheilung hinter den Fäden aufgestellt, und mittelst eines Fernrohrs der Abstand der beiden Fäden von einander theils von 15 zu 15, theils von 30 zu 30 Mm. abgelesen.

Schon bei den ersten Versuchen fand ich es nothwendig, die Neigung des Brettes, auf dem die Taube aufgenagelt war, etwas zu verändern, und zwar in der Weise, dass mir der an dem Carpalgelenk befestigte Faden näher, der an der *crista sterni* befestigte ferner lag. Es rückte nämlich der erstere Faden bei der ursprünglichen Lage anfangs in der Weise vor, dass sich seine Bahn beim Ablesen sehr stark perspectivisch verkürzte, während doch wünschenswerth war, sie im Sehfelde des Fernrohres möglichst unverkürzt zu haben.

Bei einem Theile dieser Versuche wurden in die Brustmuskeln der anderen Seite nadelförmige Elektroden eingesenkt, um von Zeit zu Zeit die Reizbarkeit zu untersuchen. Es geschah aber dieses im Ganzen nur bei vier der an Tauben angestellten Versuche, denn es zeigte sich, dass die Reizbarkeit stets vollständig erloschen war, wenn die Sommer'sche Bewegung begann. Eine Batterie von 20 Léclanché'schen Elementen war dann schon seit 20 Minuten oder länger wirkungslos gewesen. Der Reizversuch wurde hier und bei allen späteren Versuchen so gemacht, dass eine Kette eine ganz kurze Zeit und nur einmal geschlossen wurde. Es geschah dies, um nicht durch den Reizversuch selbst das Absterben in beträchtlicher Weise zu beschleunigen. Wesshalb ein Kettenstrom und nicht Inductionsschläge angewendet wurden, bedarf wohl keiner besonderen Erörterung. In diesen vier Versuchen war die Reizbarkeit erloschen, in *A* in 25 Min., in *B* in 35 Min., in *C* in 55 Min., in *D* in 40 Min. Die Sommer'sche Bewegung zeigte sich in *A* nach 60 Min., in *B* nach 55 Min., in *C* nach 75 Min. und in *D* nach 60 Min.

Als resultatlos muss ein fünfter Versuch bezeichnet werden, bei welchem die Reizbarkeit zuerst 30 Min. nach dem Tode, während die Sommer'sche Bewegung bereits deutlich eingetreten war, untersucht wurde und bereits vollständig erloschen war, so dass man den Zeitpunkt ihres Aufhörens nicht sicher angeben konnte.

Ausserdem wurden noch sechzehn Versuche an Tauben angestellt, bei denen aber die Zeit des Erlöschens der Reizbarkeit nicht untersucht worden ist. In vierzehn dieser Versuche wurde auf mechanischem Wege die progressive Entwicklung der Starre verfolgt. Es geschah dies auf folgende Weise: An

der Nadel, die durch das Carpalgelenk ging, und an welcher ein horizontaler Faden befestigt war, wurde mittelst eines anderen Fadens ein Gewicht von 7 Gramm aufgehängt. Dasselbe war für gewöhnlich durch ein nach aufwärts und nach abwärts bewegliches Tischchen unterstützt, so dass der Faden schlaff war. Nachdem aber der relative Stand der beiden Fäden abgelesen worden war, wurde das stützende Tischchen herabgesenkt, so dass das Gewicht frei schwebte, und nun wurde wiederum abgelesen. Es ist klar, dass die Differenz zwischen beiden Ablesungen um so kleiner werden musste, je stärker sich die Starre entwickelte. Während sich bei der ersten Ablesung, die in der Regel 15 Min. nach der Tödtung stattfand, Differenzen zeigten von $^1/_2$ bis 8 Mm., so betrug im Maximum der Starre die Differenz nie mehr als 1 Mm. und auch dies nur in zwei Versuchen; in allen übrigen betrug sie $^1/_2$ Mm. oder weniger bis zum nicht mehr Wahrnehmbaren.

Es zeigte sich bei diesen Versuchen, dass die Sommer'sche Bewegung niemals früher eintrat, ehe nicht diese Differenz bereits merklich abgenommen hatte, das heisst also: die Sommer'sche Bewegung ging der sich entwickelnden Starre niemals voraus, sondern umgekehrt, das Starrwerden, die Abnahme der Dehnbarkeit wurde früher merklich als die Sommer'sche Bewegung. Andererseits wurde aber mehrfach beobachtet, dass die Dehnbarkeit noch abnahm, also die Starre noch wuchs, während in der Sommer'schen Bewegung kein Fortschritt mehr zu bemerken war.

Wenn man den ganzen Gang der Fäden beobachtete, so zeigte sich, dass in den ersten 30—45 Minuten der vom Carpalgelenk ausgehende Faden sich langsam um ein Geringes, im Maximum um 3 Mm., meist nur um 1 oder $1^1/_2$ Mm. senkte; dann stieg er wieder, und hiemit begann die Sommer'sche Bewegung, indem das Carpalgelenk durch Verkürzung der überwiegend starken Brustmuskeln gehoben wurde. Diese Hebung betrug im Maximum 27 Mm., im Minimum $1^1/_2$ Mm., in Mittelzahl zwischen 14 und 15 Mm.

Im späteren Verlaufe, nachdem der Stand des Flügels längere Zeit unverändert geblieben war, in einem Falle schon nach vier Stunden, sonst nach sechs Stunden, oder noch später, so dass

die Veränderung erst am nächsten Morgen sichtbar ward, stellte sich wieder ein geringes Absinken des Fadens ein, welches indessen bisweilen ganz vermisst wurde, häufig nur 1 Mm. betrug, in anderen Fällen aber 2—3 Mm., ja in einem Falle sich allmälig bis über 5 Mm. steigerte, nachdem die Sommer'sche Bewegung selbst eine Amplitude von 27 Mm. gehabt hatte, die grösste, welche in allen meinen Versuchen beobachtet wurde. Die nächstkleinere betrug nur 18 Mm. Ich glaubte, dass vielleicht dieses Absinken des Fadens, diese retrograde Bewegung, ihren Grund haben könne in der Wirkung anderweitiger Muskeln, welche später erstarrten und nun ihrerseits den Flügel nach sich zögen; ich durchschnitt desshalb mittelst eines Cirkelschnittes die sämmtlichen Muskeln des Oberarmes bis auf den Knochen und ausserdem sämmtliche Muskeln, welche sich an die Scapula anheften. In der That wurde in diesen Versuchen nicht mehr eine so ausgedehnte retrograde Bewegung beobachtet, aber doch stieg in einem Versuche die Grösse derselben bis auf 3 Mm. und in zwei anderen bis auf 2 Mm.; es konnte also jedenfalls die Mitwirkung anderer Muskeln nicht die alleinige Ursache sein. Es liegt nahe, die Erscheinung auf eine allmälige Dehnung der Brustmuskeln durch das Gewicht des Flügels zurückzuführen. Es erhebt sich jedoch hiegegen ein wesentlicher Einwand: die retrograde Bewegung trat in der Regel ein, noch ehe die Dehnungsversuche eine Abnahme der Starre anzeigten. Absolut ist indessen dieser Einwand nicht, da es nicht unmöglich ist, dass durch die dauernde Dehnung schon eine Lageveränderung hervorgerufen werden konnte zu einer Zeit, wo die momentane Dehnung noch kein Nachlassen der Starre anzeigte.

Das Sinken des am Carpalgelenk befestigten Fadens zu Anfang des Versuches glaube ich, unbedingt auf eine allmälige Dehnung zurückführen zu können, die hier bei der Weichheit und Nachgiebigkeit der Theile sehr wahrscheinlich ist.

Wenden wir uns zur Sommer'schen Bewegung selbst und fragen uns zunächst: tritt sie vor, während oder nach der Entwicklung der Todtenstarre ein? Hierüber müssen die gleichzeitig vorgenommenen Dehnungsversuche Aufschluss geben. Diese zeigen, wie gesagt, dass die Dehnbarkeit ausnahmslos früher abnimmt, ehe sich die Sommer'sche Bewegung bemerklich macht.

Nur in vier Versuchen zeigte sich schon 15 Min., nachdem die erste Abnahme der Dehnbarkeit bemerkt war, die erste Spur der Sommer'schen Bewegung; sonst lagen zwischen beiden Erscheinungen immer grössere Zeiträume von 30 bis zu 55 Min., welche letztere Zahl jedoch nur einmal beobachtet wurde. In einem Versuche schien es allerdings auf den ersten Anblick, als ob die Sommer'sche Bewegung gleichzeitig mit der Abnahme der Dehnbarkeit begonnen hätte, denn als 45 Min. nach dem Tode die zweite Ablesung gemacht wurde, zeigte sich mit der Abnahme der Dehnbarkeit zugleich auch eine ziemlich bedeutende Sommer'sche Bewegung; aber in diesem Versuche waren die Ablesung und der Dehnungsversuch, welche hätten 30 Min. nach dem Tode gemacht werden sollen, versäumt worden. Es ist nun sehr wahrscheinlich, dass auch hier schon 30 Min. nach dem Tode eine Abnahme der Dehnbarkeit gefunden worden wäre, denn in den zwei einzigen anderen Versuchen, in denen sich die Sommer'sche Bewegung schon 45 Min. nach dem Tode zeigte, verhielt es sich so. Es wird um so wahrscheinlicher dadurch, dass die Dehnbarkeitsabnahme, welche 45 Min. nach dem Tode gefunden wurde, eine sehr bedeutende war: die Dehnung war von 7 Mm., welche sie 15 Min. nach dem Tode ergab, auf 1·5 Mm. herabgesunken.

Nach Allem diesem ist die Sommer'sche Bewegung sicher nicht etwas, was vor der Entwicklung der Todtenstarre eintritt, was ihr vorausgeht. Bevor wir uns aber mit ihrer Ursache beschäftigen, wollen wir die Resultate von einer Reihe von an Kaninchen angestellten Versuchen kennen lernen.

Dieselben wurden so angestellt, dass das getödtete Thier auf ein Brett aufgenagelt wurde und mittelst derselben eisernen Hand gehalten, welche früher bei den Versuchen mit den Tauben gedient hatte. Von den Fäden wurde der eine am Kreuzbein, der andere an der einen hinteren Pfote befestigt. Das Thier war dabei mit dem Kopfe schräg nach abwärts gerichtet, so dass die hinteren Pfoten den höchstliegenden Theil bildeten. Die Sommer'sche Bewegung bestand darin, dass der Fuss durch die stärkeren Strecker (ich begreife hier im vulgären Sinne die Wadenmuskeln unter den Streckern) gehoben wurde, und mit ihm der Faden, der zum Ablesen diente und der in der Höhe

der Metatarsalknochen nahe an der Grenze der Zehen befestigt war.

Die Versuchsresultate wichen in einem Punkte von den bei den Vögeln erhaltenen wesentlich ab. In den wenigen Fällen, in denen bei den letzteren die Zeit des Erlöschens der Reizbarkeit untersucht war, war dieselbe vor dem Eintreten der ersten Spur der Sommer'schen Bewegung erloschen. Bei den Kaninchen war das nicht so. Allerdings zeigte sich auch hier in zwei Versuchen die Sommer'sche Bewegung nach dem Erlöschen der Reizbarkeit: in einem Versuche 45 Min., in dem anderen 55 Min. später; aber in einem anderen Versuche manifestirten sich beide gleichzeitig, in zwei Versuchen überdauerte die Reizbarkeit das Erscheinen der Sommer'schen Bewegung um 30 Min. und in einem Versuche sogar um 40 Min. Im Übrigen waren die Erscheinungen im Allgemeinen denen analog, welche an den Tauben beobachtet worden waren, nur dehnten sie sich wegen des späteren Absterbens der Muskelfasern auf einen viel grösseren Zeitraum aus. Die anfängliche Dehnung zeigte sich auch hier, denn der in der Pfote befestigte Faden sank anfangs herab.

Diese anfängliche Dehnung dauerte $^3/_4$ bis $2^1/_2$ Stunden nach dem Tode; dann trat die Sommer'sche Bewegung ein, die bis $6-7^3/_4$ Stunden nach dem Tode dauerte, wo dann die Ablesung anfing constant zu werden. Ein deutliches terminales Sinken wie bei den Vögeln wurde hier nicht beobachtet, wohl desshalb, weil die Versuche nicht lange genug ausgedehnt wurden, und sich die Thiere nach 24 Stunden, wenn ich den Versuch abbrach, noch in voller Starre befanden. Die Amplitude der Sommer'schen Bewegung überwog meistens die des primären Sinkens um ein Bedeutendes: in einem Falle fast um 1 Cm., in einem Falle aber auch nur um ein Geringes, nur um 1 Mm. Auch hier zeigte sich in allen Fällen die Abnahme der Dehnbarkeit früher als die Sommer'sche Bewegung. Nur ein Versuch machte hier insoferne eine Ausnahme, als Sommer-sche Bewegung und Abnahme der Dehnbarkeit gleichzeitig constatirt wurden; aber hier war wiederum die zweite Ablesung ausnahmsweise erst nach 45 Min. gemacht worden, während in den übrigen Versuchen mit Ausnahme eines einzigen schon nach

30 Min. sich eine Abnahme der Dehnbarkeit gezeigt hatte, und die Sommer'sche Bewegung erst $1\frac{1}{2}$—2 Stunden nach dem Tode des Thieres deutlich wurde. In dem einen Versuche, in welchem sich erst nach Einer Stunde eine Abnahme der Dehnbarkeit zeigte, trat die Sommer'sche Bewegung erst nach $3\frac{1}{4}$ Stunden ein. Man kann also auch hier mit Sicherheit sagen, dass die Sommer'sche Bewegung dem Beginne des Starrwerdens nirgendwo voranging, sondern ihm in der Regel erst nach einer Stunde oder später folgte.

Eine besondere Stellung muss ich einer Reihe von Versuchen anweisen, welche zwar ganz in derselben Weise, wie die eben beschriebenen, aber an curarisirten Thieren angestellt wurden. Es wurde dabei folgendermassen vorgegangen. Das Thier wurde, vom Pleurasack aus, mit einer grossen Dosis Curare vergiftet, und dann künstliche Respiration unterhalten, bis alle Reflexe vollständig geschwunden waren. Dann wurde die künstliche Respiration noch eine Weile fortgesetzt und dann abgebrochen; worauf das Thier ohne die geringste Zuckung verschied.

Es wurde nun mit ihm ganz wie in den früheren Versuchen verfahren. Der Unterschied, der sich bei diesen Versuchen zeigte, bestand zunächst darin, dass die Reizbarkeit, entsprechend den anderweitigen Erfahrungen an curarisirten Thieren, viel später erlosch. Die Zeit schwankte von 2 Stund. 5 Min. bis 3 Stund. 20 Min. nach dem Tode, während die Reihe der nicht curarisirten Kaninchen nur eines aufwies, bei dem 2 Stund. 5 Min. nach dem Tode noch Reizbarkeit constatirt wurde; bei einem zweiten gelang dies noch nach 2 Stund., bei einem dritten nach 1 Stund. und 55 Min.: bei den übrigen waren die letzten Spuren von Reizbarkeit nach 1 Stunde 30 Min., oder nach 1 Stunde 25 Min. beobachtet worden.

Die Sommer'sche Bewegung trat in drei der hieher gehörigen Versuche erst nach dem Erlöschen der Reizbarkeit auf: in einem derselben wurde sie schon 10 Min. nachher constatirt, in einem anderen liess sie aber 1 Stunde und 10 Min. und in dem dritten sogar 2 Stund. und 4 Min. auf sich warten. In zwei anderen Versuchen, in welchen sie dem völligen Absterben voranging, betrug die Differenz einmal 20 Min. und einmal 15 Min.

Die Abnahme der Dehnbarkeit ging auch hier der Sommer-schen Bewegung ausnahmslos voran. Die Differenzen waren sogar zum Theil sehr grosse. Sie schwankten von 15 Min. bis zu $4^1/_2$ Stund. In vier Versuchen von sieben betrugen sie mehr als eine Stunde.

Wenn ich meine gesammten Versuche überblicke, so muss ich jeden Einfluss der vitalen Contractilität, soweit sie durch elektrische Reize an ganzen Muskeln oder Muskelgruppen sicher-gestellt werden kann, als nothwendiges Moment für die Sommer-sche Bewegung ausschliessen. Ich habe zwar in einer Reihe von Fällen noch Zuckungen erhalten, nachdem die Sommer'sche Bewegung schon begonnen hatte, aber diesen Fällen steht eine Reihe von anderen gegenüber, in denen die Reizbarkeit längst erloschen war, in denen also die Sommer'sche Bewegung sicher ohne Mitwirkung der vitalen Contractilität im gangbaren Sinne des Wortes von Statten ging. Die anderen Fälle erklären sich leicht dadurch, dass nicht alle Muskeln gleichzeitig und nicht alle Fasern eines Muskels gleichzeitig absterben. Von den Muskeln als Ganzes ist dies schon längst anerkannt, und jeder, der absterbende Muskeln unter dem Mikroskop beobachtet und elektrisch gereizt hat, weiss, wie lange sich oft ein Theil der Fasern noch contrahirt, während die übrigen bereits abgestorben sind und bei der Contraction in Zickzack gelegt werden.

Indem wir die Sommer'sche Bewegung in allen voll-ständigen Versuchen erst eintreten sehen, nachdem die Dehn-barkeit abgenommen hat, werden wir gedrängt, sie als eine Folgeerscheinung des Gerinnens des Faserstoffes anzusehen, und es handelt sich nun darum, zu ermitteln, welcher Causal-zusammenhang zwischen beiden Vorgängen bestehe.

Im Jahre 1867 gab Schmulewitsch im medicinischen Centralblatt in einer vom 10. Januar jenes Jahres aus Florenz datirten Mittheilung an, dass das Volum der Muskeln in der Todtenstarre abnehme. Man könnte desshalb glauben, eine Ver-kleinerung des Muskels nach allen Richtungen bedinge die Sommer'sche Bewegung. So verhält es sich indessen nicht. Es fällt auf, dass Schmulewitsch sagt: „Das Volum des Muskels nimmt in der Todtenstarre ab, und zwar so, dass, obwohl sein specifisches Gewicht sich vermehrt, doch sein absolutes

Gewicht kleiner wird." Wenn das absolute Gewicht des Muskels kleiner wurde, so musste er etwas verloren haben; wenn sein specifisches Gewicht dabei gestiegen war, so musste man schliessen, dass dieses Etwas, was er verloren, ein specifisches Gewicht hatte, welches kleiner war als das specifische Gewicht des Muskels; dieses Etwas war also Wasser oder eine wässerige Lösung, und die Volumabnahme war so im völligen Einklange mit der Abnahme des absoluten und mit der Steigerung des specifischen Gewichtes. Später hat L. Walker, der in Hermann's Laboratorium arbeitete, Angaben über Volumsabnahme bei der Erstarrung gemacht.[1] Er konnte sie aber, wo die Verdunstung ausgeschlossen war, nur für die Wärmestarre mit Sicherheit feststellen. Jedenfalls handelte es sich dabei um so kleine Grössen, dass dieselben zur Erklärung der Sommer'schen Bewegung aus einer allgemeinen Verkleinerung der Muskeln nicht ausreichen. Eine allgemeine Verkleinerung von einem solchen Grade ist auch wohl von vorne herein sehr unwahrscheinlich.

Man könnte denken, dass, da bei der gewöhnlichen Art die Sommer'sche Bewegung zu beobachten, die Verdunstung nicht ausgeschlossen ist, durch letztere eine stärkere Volumsverminderung und damit die Sommer'sche Bewegung zu Stande komme. Allein auch dies ist ausgeschlossen durch Versuche von Walker, welche ebenfalls in Hermann's Laboratorium angestellt wurden (ibid. S. 182). Es zeigte sich, dass Froschmuskeln sich auch im feuchten Raume bei dem Erstarren verkürzten.

Es lässt sich endlich direct zeigen, dass die Muskeln beim Erstarren dicker werden, dass sie sich also nicht in allen Dimensionen, sondern nur der Länge nach zusammenziehen. Ich enthäute das hintere Bein eines frisch getödten Kaninchens und amputire es im Oberschenkel. Ich durchschneide die Sehnen der Unterschenkelmuskeln nahe dem Fusse und lege nun um die Wade einen Ring von weichem Kupferdraht so an, dass er nur ganz wenig einschneidet, nur so viel, dass er nicht rutschen

[1] Pflüger's Archiv für die gesammte Physiologie 4. Jahrg. (1871). S. 183.

kann. Darauf hänge ich das Ganze in einem Gefässe mit Öl auf. Nachdem die Muskeln starr geworden sind, schneidet der Kupferdraht deutlich tiefer ein in die sich neben ihm erhebende Muskelsubstanz. Gleichartige Versuche an Tauben und an Fröschen gaben dasselbe Resultat. Es steht also fest, dass die Muskeln sich in Folge des Erstarrens verkürzen und verdicken, und dies ist die Sommer'sche Bewegung.

Vitale Verkürzung vor dem Starrwerden könnte einen solchen Erfolg nicht haben, denn, wenn sie aufhörte und der Muskel erschlaffte, so würde er eben so lang sein wie früher, Alles, was man vom directen Übergang der Contraction, zum Beispiel beim Tetanus, in Starre gesagt hat, hat sich nicht bestätigt. Man hat immer noch ein Intervall gefunden zwischen den im Leben ausgelösten Contractionen des Muskels und der Todtenstarre. Man könnte aber denken, dass der Act des Absterbens selbst einen Grund der Erregung und damit der Verkürzung in sich schlösse, ähnlich wie ja ein vertrocknender und dabei absterbender Nerv in Erregung geräth und Zuckungen in den zugehörigen Muskeln auslöst. In der That sieht man Insectenmuskeln, die sich anfangs kräftig unter dem Mikroskope contrahiren und vollständig wieder entschlaffen, später beim Erschlaffen nicht mehr zu ihrer früheren Länge zurückkommen und im verkürzten Zustande absterben. Dieser Auffassung widersprechen nur die zahlreichen Versuche, bei welchen die erste Spur der Sommer'schen Bewegung sich erst geraume Zeit nach dem gänzlichen Erlöschen der Reizbarkeit zeigte.

Allerdings habe ich die Stärke des Reizes nur bis zu einer gewissen Grenze gesteigert, um nicht durch heftig wirkende Stromstösse selbst eine Veranlassung zum Absterben zu geben oder durch Stromschleifen die Muskeln der anderen Seite, an denen beobachtet wurde, zu sehr in Mitleidenschaft zu ziehen, aber die Grenze lag doch ziemlich hoch (20 Léclanché's), so dass von einer weiteren Steigerung nicht viel mehr zu erwarten war.

Man müsste annehmen, dass es für den Muskel einen Zustand gibt, wo er durch elektrische Reizung nicht mehr in Zusammenziehung versetzt werden kann, wo aber doch das Absterben noch im Stande ist, ihn zu einer letzten Verkürzung zu erregen. In

dieser Fassung würde sich die Annahme einer letzten vitalen Contraction des sterbenden und im Sterben gerinnenden Muskels schwer unterscheiden lassen von derjenigen Anschauung, welche ich später als die mir wahrscheinlichste auseinander setzen werde.

Jene Versuche über das Erlöschen der Reizbarkeit sprechen auch gegen eine andere Art der Erklärung, gegen die Annahme, dass sich einzelne Muskelbündel noch vital verkürzen möchten, während in anderen schon die Gerinnung vorschreitet. In der That könnten dadurch die Gliedmassen in eine neue Lage übergeführt und in dieser befestigt werden. Ich habe aber in meinen Versuchen die letzten leisen Zuckungen berücksichtigt und dennoch in einer Anzahl von Versuchen ein beträchtliches Intervall zwischen dem Erlöschen der Reizbarkeit und dem Beginn der Sommer'schen Bewegung gefunden.

Ich sehe mich desshalb veranlasst, anzunehmen, dass der Gerinnungsprocess selbst eine Spannung der Muskeln hervorruft, welche die Sommer'sche Bewegung zur Folge hat, ähnlich wie durch den Gerinnungsprocess des Blutes eine Spannung hervorgerufen wird, welche die Zusammenziehung des Blutkuchens zur Folge hat. Ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin, dass im Blutkuchen die Spannung nach allen Richtungen gleich ist, während der erstarrende Muskel sich nach seiner Länge zusammenzieht, senkrecht auf dieselbe sich verdickt.

In diesem Unterschiede liegt eben die Schwierigkeit, die in Rede stehende Vorstellung von der von einer letzten vitalen Contraction des sterbenden Muskels zu unterscheiden; denn, wenn die Spannung nur in einer Richtung entsteht, so muss dies sicher in der Structur und den Eigenschaften des lebenden Muskels begründet sein, als deren Resultat wir auch seine vitale Contractilität betrachten müssen. Es kann sich also nur darum handeln, ob die Verkürzung und Verdickung nur am sterbenden oder ob sie auch wesentlich noch am todten Muskel stattfindet. Wenn ich trotz der Erscheinungen, die man unter dem Mikroskope an sterbenden Insectenmuskeln wahrnimmt, der letzteren Ansicht den Vorzug gebe, so begründe ich dies mit der Thatsache, dass sich die Abnahme der Dehnbarkeit stets früher zeigt

als die Sommer'sche Bewegung und mit der Länge der Zeit, um welche die Sommer'sche Bewegung stets die Reizbarkeit überdauert. Es wird davon am Schlusse gehandelt werden.

Auf die Ausstossung von Flüssigkeit bei dieser Zusammenziehung kann ich nur einen untergeordneten Werth legen, wenn ihr überhaupt ein solcher beizumessen ist. Dieselbe ist zwar von mehreren Beobachtern theils an Frosch-, theils an Säugethier- oder Vögelmuskeln beobachtet worden, aber sie ist in höchstem Grade inconstant. Ich habe bei den tiefen Einschnitten in die Brustmuskeln von Tauben, die durch Verblutung getödtet waren, auch wenn ich sie vor Verdunstung schützte, ganz in der Regel nur die Schnittfläche etwas feuchter gefunden als eine frische. Wo ausnahmsweise in der Tiefe wirklich Flüssigkeit angesammelt war, so dass sie einen Theil des Spaltes anfüllte, war dies in einer Zeitperiode, wo die Sommer'sche Bewegung schon vollständig beendigt sein musste; in der Zeit, wo sie hätte schon in vollem Gange sein sollen, habe ich keine in Betracht kommende Flüssigkeitsmenge gefunden. Dasselbe beobachtete auch schon Brücke, der ausdrücklich sagt: „Erst wenn die Todtenstarre die Akme überschritten hat, sammelt sich in queren Einschnitten, welche man um diese Zeit in grössere Muskelmassen macht, Flüssigkeit an“ (l. c. p. 183).

Es könnte gegen die vorher entwickelte Anschauung geltend gemacht werden, dass in manchen Fällen die Sommer'sche Bewegung schon angefangen hatte, während noch Reizbarkeit vorhanden war; aber dies wird, wie ich bereits oben erwähnte, ohne Schwierigkeit daraus erklärt, dass ein Theil der Muskelfasern bereits abgestorben war und Sommer'sche Bewegung hervorgerufen hatte, während ein anderer Theil noch lebte und auf elektrische Reize reagirte. Es liegt hierin nichts Unwahrscheinliches, während es, wie wir gesehen haben, doch schwierig ist, diejenigen Versuche, bei welchen die Sommer'sche Bewegung erst geraume Zeit nach dem Erlöschen der Reizbarkeit begann, zu erklären, wenn man die Sommer'sche Bewegung als einen rein vitalen Act auffasst.

Für den engen Zusammenhang zwischen der Sommer'schen Bewegung und dem Gerinnungsprocesse als solchem sprechen auch die zeitlichen Verhältnisse: in drei Versuchen, welche sich

sämmtlich auf Tauben bezogen, endigte die Sommer'sche Bewegung gerade zu der Zeit, wo die Starre ihr Maximum erreicht hatte, so weit sie mit unserer Methode geprüft werden konnte, das heisst, zu der Zeit, als das Minimum von Dehnbarkeit gefunden wurde, unter welches später kein Fallen derselben mehr stattfand. In vier anderen Versuchen, die sich gleichfalls auf Tauben bezogen, nahm die Dehnbarkeit noch ab, nachdem die Sommer'sche Bewegung bereits ihr Ende erreicht hatte; doch war die Abnahme eine geringe; in einem Falle betrug sie 1 Mm., in den drei anderen nur $^1/_2$ Mm. Ich erkläre mir das Resultat dieser vier Versuche so, dass durch die weitere Zusammenziehung antagonistisch wirkender Muskeln die Spannung der Glieder noch vermehrt wurde, dass sich aber ihre Kräfte so compensirten, dass keine in die Grenzen der Beobachtung fallende Bewegung mehr stattfand.

In allen übrigen Fällen überdauerte die Sommer'sche Bewegung die Abnahme der Dehnbarkeit. Es sind dies sechs Versuche an Tauben und sämmtliche an curarisirten und nicht curarisirten Kaninchen angestellte. Die Anzahl der Versuche an Kaninchen, bei denen die Dehnbarkeit bestimmt wurde, betrug zwölf.

Wenn nun auch nicht behauptet werden kann, dass mit dem Eintreten des Minimums der Dehnbarkeit jede weitere Gerinnung aufhörte, so zeigen doch diese Versuche ganz unzweifelhaft, dass die Sommer'sche Bewegung bis in sehr vorgeschrittene Stadien der Starre hineinreicht. Es ist lehrreich, die Zeiten zusammenzustellen für das Erlöschen der Reizbarkeit und für das Aufhören der Sommer'schen Bewegung in einer und derselben Thierleiche; ich besitze darüber sechzehn Versuche. Man wird aus ihnen sehen, welche Schwierigkeiten es hat, die Sommer'sche Bewegung als einen Ausdruck der Contractilität im gewöhnlichen physiologischen Sinne des Wortes zu betrachten.

Aufhören der Reizbarkeit		Aufhören der Sommer'schen Bewegung			
Bei Tauben:					
25 Min.		3 Stund.			
35 „		2 „			
55 „		2 „			
40 „		1 „			
Bei nicht curarisirten Kaninchen:[1]					
1 Stunde	30 Min.	7 Stund.	30 Min.	— 23 Stund.	30 Min.
2 „	— „	7 „	45 „	— 23 „	30 „
1 „	25 „	7 „	30 „	— 23 „	25 „
2 „	5 „	7 „	30 „	— 23 „	— „
1 „	55 „	6 „	15 „	— 22 „	30 „
1 „	30 „	7 „	45 „	— 23 „	— „
Bei curarisirten Kaninchen:					
2 Stund.	5 Min.	6 Stund.	— Min.		
2 „	15 „	8 „	45 „	— 23 Stund.	15 Min.
3 „	20 „	8 „	45 „	— 22 „	45 „
2 „	5 „	6 „	15 „	— 22 „	— „
2 „	50 „	6 „	— „	— 22 „	— „
3 „	5 „	7 „	30 „	— 23 „	30 „

[1] Für die Kaninchen liess sich die Zeit des Aufhörens der Sommer-schen Bewegungen grösstentheils nur innerhalb der vorgezeichneten weiten Grenzen angeben, weil sich am Morgen noch ein weiterer Fortschritt zeigte, der in der Abend- oder Nachtzeit gemacht war, in der nicht beobachtet wurde.

XIX. SITZUNG VOM 16. JULI 1874.

Der Secretär theilt die aus Upsala eingelangte Nachricht von dem am 21. Juni daselbst erfolgten Ableben des Professors Dr. Anders Jonas Ångström mit.

Das k. & k. Ministerium des Äussern übermittelt ein Dankschreiben des Geschäftsträgers von Griechenland am österr. Hofe für die der National-Bibliothek zu Athen übersendeten akademischen Druckschriften.

Herr Dr. Ad. B. Meyer übersendet eine sechste Mittheilung: „Über neue und ungenügend bekannte Vögel von Neu-Guinea und den Inseln der Geelvinksbai."

Herr Dr. Fitzinger legt die II. Abtheilung seiner Abhandlung vor, betitelt: Kritische Untersuchungen über die Arten der natürlichen Familie der Hirsche *(Cervi)*."

Herr Hofrath Dr. E. v. Brücke überreicht eine im physiologischen Institute der Wiener Universität durchgeführte Arbeit des Herrn Dr. Nicolaus Strawiński aus St. Petersburg: „Über den Bau der Nabelgefässe und über ihren Verschluss nach der Geburt.

Herr Prof. Dr. Zöller spricht „über die Zusammensetzung fossiler Eier und verschiedener im Guano gefundener Concretionen."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften zu Krakau: Die zwei ersten öffentlichen Sitzungen. Krakau, 1873; 4°. (Polnisch.)

American Chemist. Vol. IV, Nr. 12. Philadelphia, 1874; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 20. Wien, 1874; 8°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome L. Nr. 198. Genève, Lausanne, Paris, 1874; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXVIII, Nr. 26. Paris, 1874; 4°.

Ellero, Pietro, La questione sociale. Bologna, 1874; 8°.

Gesellschaft der Wissenschaften, k. böhm., zu Prag: Sitzungsberichte. 1874. Nr. 3. Prag; 8°.

— Astronomische, in Leipzig: Vierteljahrsschrift. IX. Jahrgang. 1. Heft. Leipzig, 1874; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 13, Wien, 1874; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 28. Wien, 1874; 4°.

Institut, Königl. Preuss. geodätisches: Astronomisch-geodätische Arbeiten in den Jahren 1872, 1869 und 1867. Leipzig, 1874; 4°. — General-Bericht über die Europäische Gradmessung für das Jahr 1873. Berlin, 1874; 4°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 14. Graz, 1874; 4°.

Memorial des Ingenieros. Año de 1873; Tomo XXVIII. Madrid 8°.

Nature. Nr. 245, Vol. X. London, 1874; 4°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VIII, Nr. 11. Torino, 1873; 4°.

— R., di Brera in Milano: Pubblicazioni. Nr. II. Milano & Napoli, 1873; 4°.

Protocoll über die Verhandlungen der 50. General-Versammlung der Actionäre der a. pr. Kaiser Ferdinands-Nordbahn. Wien, 1874; 4°.

Revista de Portugal e Brazil. 2° Vol. Nr. 6. Lisboa, 1874; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". IVe Année, 2e Série. Nr. 2. Paris, 1874; 4°.

Société des Sciences de Nancy. (Ancienne Société des Sciences naturelles de Strasbourg, fondée en 1828): Statuts. 8°.

Society, The Zoological, of Philadelphia: The 2d Annual Report of the Board of Managers. Philadelphia, 1874; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 28. Wien, 1874; 4°.

XX. SITZUNG VOM 23. JULI 1874.

Herr Hofrath Dr. Theodor Billroth dankt, mit Schreiben vom 23. Juli, für seine Wahl zum wirklichen Mitgliede der Akademie.

Herr Prof. Dr. Alex. Rollett in Graz übersendet eine Abhandlung des Herrn Prof. V. v. Ebner: „Untersuchungen über das Verhalten des Knochengewebes im polarisirten Lichte."

Herr Hofrath Dr. K. Langer übermittelt eine Abhandlung: „Studien über die Entwicklung der Extremitäten des Menschen, insbesondere der Gelenkflächen," von den Herren Prof. W. Henke in Prag und Privatdocenten Karl Weyher in Dorpat.

Herr Prof. Dr. Ad. Lieben in Prag übersendet eine für den Anzeiger bestimmte Notiz „über Synthese von Alkoholen mittelst Bichloräthers."

Herr Hofrath Dr. E. v. Brücke legt eine Abhandlung: „Uber das Verhalten der entnervten Muskeln gegen den constanten Strom" vor.

Herr Prof. Dr. V. v. Lang übergibt eine Abhandlung des Herrn Dr. J. Puluj: „Über die Reibungsconstante der Luft als Function der Temperatur." II.

Derselbe übergibt ferner eine weitere Folge seiner „krystallographisch-optischen Bestimmungen."

Herr Regierungsrath Dr. Fried. Rochleder überreicht eine Abhandlung des Herrn Zd. Hans Skraup: „Zur Kenntniss der Rhabarberstoffe Chrysophansäure und Emodin."

Herr Prof. Dr. A. Winckler legt eine Abhandlung: „Integration verschiedener Differentialgleichungen zweiter Ordnung" vor.

Herr Hofrath Dr. H. Hlasiwetz legt seine erste, gemeinschaftlich mit Herrn J. Habermann durchgeführte Abhandlung: „Über das Gentisin" vor.

Derselbe übergibt ferner die Nummern 20 und 21 der „Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium der Universität Innsbruck, u. zw.: *a)* „Über die Constitution der Dioxybenzoësäure," von den Herren L. Barth und C. Senhofer, und *b)* „Über Benzoltrisulfosäure," von Herrn Senhofer.

Herr Hofrath Hlasiwetz übergibt endlich eine für den Anzeiger bestimmte Notiz, als Nachtrag zu der Untersuchung des Herrn Dr. Weidel „über das Cinchonin."

Der Secretär v. Schrötter macht eine Mittheilung über eine Arbeit, betreffend die Verbindung des Goldes mit dem Schwefel, welche er gemeinschaftlich mit dem Haupt-Münzamts-Chemiker, Herrn Dr. Přiwoznik, ausgeführt hat.

Derselbe hinterlegt ferner ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung seiner Priorität.

Herr Privatdocent Dr. Sigm. Exner überreicht „Kleine Mittheilungen physiologischen Inhalts."

Herr Alfred Burgerstein, Assistent am pflanzenphysiologischen Institute der Wiener Universität, legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Untersuchungen über das Vorkommen und die Entstehung des Holzstoffes in den Geweben der Pflanzen."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Belgique: Bulletin. 42e Année, 2e Série, Tome 36, Nrs. 1—12. (1873); 43e Année, 2e Série, Tome 37, Nrs. 1—5. (1874.) Bruxelles; 8°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. April 1874. Berlin; 8°.

Annalen (Justus Liebig's) der Chemie und Pharmacie. N. R. Band 96, Heft 2. Leipzig & Heidelberg, 1874; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 21. Wien, 1874; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 2001—2002 (Bd. 84. 9—10.) Kiel, 1874; 4°.

Bergwerks-Betrieb, Der — Österreichs im Jahre 1873. I. Theil. (Tabellen.) Herausgegeben vom k. k. Ackerbau-Ministerium. Wien, 1874; kl. 4°.

Berlin, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1873/74. 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 1. Paris, 1874; 4°.

de la Rive, und Ed. Sarasin, Einige Versuche über die Wirkungen des Magnetismus auf die elektrischen in der Verlängerung der Axe des Magneten stattfindenden Entladungen in einem verdünnten Gas. (Aus Poggendorff's Annalen.) 8°.

Favero, Valentino, La costituzione fisica delle Comete. Bassano, 1874; 8°.

Gesellschaft, k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XVII (neuer Folge VII). Nr. 6. Wien, 1874; 8°.

— Deutsche, für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mittheilungen. 4. Heft. Yokohama; 4°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 14. Wien, 1874; 4°.

— Deutsche geologische: Zeitschrift. XXVI. Band, 1. Heft. Berlin, 1874; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 29; Wien, 1874; 4°.

Isis: Sitzungsberichte. Jahrgang 1874, Januar bis März. Dresden; 8°.

Ludwig. C., Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig. VIII. Jahrgang: 1873. Leipzig, 1874; 8°.

Montigny, Ch., La fréquence des variations de couleurs des étoiles dans la scintillation est généralement en rapport avec la constitution de leur lumière d'après l'analyse spectrale. Bruxelles, 1874; 8°.

Nature. Nr. 246, Vol. X. London, 1874; 4°.

Naturforscher-Verein zu Riga: Correspondenzblatt. XX. Jahrgang. Riga, 1874; 8°.

Nuovo Cimento. Serie 2ª, Tomo XI. Maggio e Giugno 1874. Pisa; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1874, Nr. 10. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". IVᵉ Année, 2ᵉ Série, Nr. 3. Paris, 1874; 4°.

Société Entomologique de France: Annales. Ve Série. Tome IIIe. Paris, 1873; 8^{0}.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 29. Wien, 1874; 4^{0}.

Société Linnéenne du Nord de la France: Mémoires. Tome IIIe. Années 1872 & 1873. Amiens, 1873; 8^{0}. — Bulletin mensuel. 2e Année. (1873.) Nrs. 17—18; 3e Année. (1874.) Nrs. 19—22. Amiens; 8^{0}.

Integration verschiedener Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von dem w. M. Dr. **Anton Winckler.**

Die fast insgesammt linearen Differentialgleichungen, von welchen das Folgende handelt, sind von der Beschaffenheit, dass ihre Integration durch unbestimmte Integrale geschehen kann. Fast jede derselben entspricht einer theilweisen Specialisirung der allgemeinen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, aus welcher sie durch eine Transformation abgeleitet ist. Die Frage nach der Integration dieser bekanntlich nicht selten in Anwendung kommenden Differentialgleichung würde, obgleich sie nur in mehr oder weniger speciellen Fällen gelöst werden kann, auch dann ihre Bedeutung nicht verlieren, wenn von den charakteristischen Eigenschaften der durch solche Differentialgleichungen definirten Functionen mehr als gegenwärtig bekannt wäre. Auch ist jene Frage nicht schon deshalb ohne weiteres Interesse, weil durch die Erledigung besonderer Fälle für das (übrigens kaum formulirte) Problem im Allgemeinen nicht viel gewonnen werden könne; denn zu entscheiden, ob die Integration einer gegebenen Differentialgleichung möglich sei oder nicht, wäre wohl auch ein Theil jenes Problems. Es genügt hierbei, an das in vieler Hinsicht analoge, obwohl seiner Natur nach einfachere Problem der (unbestimmten) Quadraturen zu erinnern, dessen ebenfalls nur in besonderen Fällen mögliche Lösungen aufgesucht werden mussten, und gewiss nicht blos ihrer zahlreichen Anwendungen wegen unausgesetzt weiter entwickelt worden sind.

Die vorliegende Arbeit enthält eine Anzahl von Fällen der bezeichneten Art, welche, wie ich glaube, bisher nicht bemerkt worden sind.

Wie alle aus der unbestimmten Integration hervorgegangenen Resultate, so lassen sich auch die hier folgenden leicht durch Differentiation verificiren. Es braucht übrigens kaum bemerkt zu werden, dass hier nicht zu einem angenommenen Integral die Differentialgleichung gesucht, sondern, wie bemerkt, von einer Transformation der letztern ausgehend, die directe Herleitung des Integrals gefunden wurde, welche auf diesem Gebiete fast eben so wichtig als das Resultat selbst ist.

Die hauptsächlichsten Ergebnisse sind blos der Übersicht wegen, keineswegs aber um sie noch besonders hervorheben zu wollen, jedesmal am Schlusse der Rechnung in kurzen Sätzen zusammengefasst worden.

1.

Es seien p, q, r Functionen von x, und y', y'' nach der Lagrange'schen Bezeichnung die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung einer durch die Gleichung

$$py''+qy'+rf(y)=0 \qquad \ldots(1)$$

bestimmten Function y.

Diese Gleichung kann, da

$$y''=y'\frac{dy'}{dy}$$

ist, zunächst in der Form

$$y'(pdy'+qdy)+rf(y)\,dy=0$$

geschrieben werden, welche sich wieder, wenn λ eine näher zu bestimmende Function von x bezeichnet und in der Klammer $dy=y'dx$ gesetzt wird, durch die folgende:

$$\lambda y'\left(\frac{p}{\lambda}dy'+\frac{q\,dx}{\lambda}y'\right)+rf(y)\,dy=0$$

ersetzen lässt. Der Ausdruck in der Klammer wird ein vollständiges Differential, wenn

$$d.\frac{p}{\lambda}=\frac{q}{\lambda}\,dx \quad \text{oder} \quad p\lambda'=(p'-q)\lambda$$

also

$$\lambda=p\,e^{-\int\frac{q}{p}dx}$$

gesetzt wird. Die Gleichung geht dann über in:

$$\frac{p}{r}\,e^{-\int\frac{q}{p}dx}.y'.d\left(y'e^{\int\frac{q}{p}dx}\right)+f(y)\,dy=0$$

und kann unmittelbar integrirt werden, wenn r so beschaffen ist, dass

$$\frac{p}{r}\,e^{-\int\frac{q}{p}dx}=e^{\int\frac{q}{p}dx}$$

folglich

$$r=p\,e^{-2\int\frac{q}{p}dx}$$

oder, was dasselbe, wenn

$$2\,\frac{q}{p}=\frac{p'}{p}-\frac{r'}{r}, \quad \text{folglich} \quad q=\frac{p}{2}\left(\frac{p'}{p}-\frac{r'}{r}\right) \qquad \ldots(2)$$

ist. Findet diese Bedingung statt, so hat man:

$$\left(y'e^{\int\frac{q}{p}dx}\right)^2+2\int f(y)\,dy=C_1$$

und nach abermaliger Integration

$$\int\frac{dy}{\sqrt{C_1-2\int f(y)\,dy}}=\int e^{-\int\frac{q}{p}dx}.dx+C_2$$

Dies ist somit das allgemeine Integral der Gleichung:

$$py''+qy'+p\,e^{-2\int\frac{q}{p}dx}.f(y)=0$$

Da indessen durch (2) der Coëfficient q bestimmt ist, so lässt sich das Resultat einfacher darstellen und man findet:

Der Gleichung:

$$py'' + \frac{p}{2}\left(\frac{p'}{p} - \frac{r'}{r}\right) y' + rf(y) = 0$$

entspricht das Integral: ...(I)

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - 2\int f(y)\,dy}} = \int dx \sqrt{\frac{r}{p}} + C_2$$

Unter einer analogen Voraussetzung kann auch das erste Integral der beträchtlich allgemeinern Differentialgleichung:

$$\left[p\frac{d^2y}{dx^2} + q\frac{dy}{dx}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^a + rf(y)\frac{dy}{dx} + s = 0 \qquad \ldots(3)$$

gefunden werden, wenn wieder p, q, r, s Functionen blos von x bezeichnen.

Diese Gleichung lässt sich offenbar in der Form:

$$\frac{p}{r} e^{-\int\frac{q}{p}dx} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^a . d\left(\frac{dy}{dx} e^{\int\frac{q}{p}dx}\right) + f(y)\,dy + \frac{s}{r}\,dx = 0$$

schreiben, worin jedes Glied integrabel ist, wenn die Bedingung:

$$\frac{p}{r} e^{-\int\frac{q}{p}dx} = e^{a\int\frac{q}{p}dx}$$

stattfindet, aus welcher

$$r = pe^{-(a+1)\int\frac{q}{p}dx}, \quad \text{oder also} \quad (a+1)\frac{q}{p} = \frac{p'}{p} - \frac{r'}{r} \ldots(4)$$

folgt. Das erste Glied der Gleichung ist dann

$$\left(y' e^{\int\frac{q}{p}dx}\right)^a . d\left(y' e^{\int\frac{q}{p}dx}\right)$$

und man erhält also durch die Integration das erste Integral der Gleichung (3) wie folgt:

$$\left(\frac{dy}{dx}e^{\int\frac{q}{p}dx}\right)^{a+1}+(a+1)\int f(y)\,dy+(a+1)\int\frac{s}{r}\,dx=C_1$$

Da übrigens aus (4) auch

$$q=\frac{p}{a+1}\left(\frac{p'}{p}-\frac{r'}{r}\right)$$

sich ergibt, so kann man das Resultat wie folgt ausdrücken:

Das erste Integral der Differentialgleichung:

$$\left[p\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{p}{a+1}\left(\frac{p'}{p}-\frac{r'}{r}\right)\frac{dy}{dx}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^a+rf(y)\frac{dy}{dx}+s=0$$

ist durch die Gleichung ...(II)

$$\frac{p}{r}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{a+1}+(a+1)\left[\int f(y)\,dy+\int\frac{s}{r}\,dx\right]=C_1$$

ausgedrückt.

Für $a=1$, $s=0$ folgt hieraus der frühere Fall (I) wieder. Für $a=-1$ aber wird die Formel unbrauchbar. In diesem Fall gelangt man durch die erste Integration zu der Gleichung:

$$\log\left(\frac{dy}{dx}e^{\int\frac{q}{p}dx}\right)+\int f(y)\,dy+\int\frac{s}{r}\,dx=\log C_1$$

aus welcher

$$\frac{dy}{dx}e^{\int f(y)\,dy}=C_1\,e^{-\int\left(\frac{q}{p}+\frac{s}{r}\right)dx}$$

folgt. Hierin ist der Gleichung (4) zufolge $r=p$ zu setzen, und kann der Allgemeinheit unbeschadet $s=pq-q$ angenommen werden, wofür die Gleichung (3) in

$$\frac{d^2y}{dx^2}+q\frac{dy}{dx}+f(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

und deren allgemeines Integral in:

$$\int dy\, e^{\int f(y)\, dy} = C_1 \int dx\, e^{-\int q\, dx} + C_2$$

übergeht. Dieses letztere Resultat ist übrigens bekannt und zuerst von Liouville (Journ. de mathémat. T. VII) gefunden worden.

2.

Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = M\frac{dy}{dx} + P\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \qquad \ldots(1)$$

worin M, P, Q Functionen von x und y bedeuten, können in einigen bemerkenswerthen Fällen integrirt werden.

Macht man y statt x zur unabhängigen Veränderlichen, und setzt also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

so erhält die Gleichung die etwas einfachere Gestalt:

$$\frac{d^2x}{dy^2} + M\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + P.\frac{dx}{dy} + Q = 0 \qquad \ldots(2)$$

1. Sie lässt sich vollständig integriren, wenn $P = 0$ ist und $M = p$, $Q = q$ blosse Functionen von x sind.

Denn, wenn

$$\frac{dx}{dy} = x', \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{x'\,dx'}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(x'x')}{dx}$$

gesetzt wird, ergibt sich aus (2) die Gleichung

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d(x'x')}{dx} + px'x' + q = 0$$

aus welcher sofort:

$$x'.x' = e^{-2\int p\,dx}\left[C_1 - 2\int q\,e^{2\int p\,dx}\,dx\right]$$

folgt. Da sich hier noch eine Integration ausführen lässt, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dy}{dx} + q\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

worin p und q blos Functionen von x sind, ist durch die Gleichung:

$$y = \int \frac{e^{\int p\,dx}.dx}{\sqrt{C_1 - 2\int q\,e^{2\int p\,dx}\,dx}} + C_2$$

ausgedrückt.

Hierzu die Bemerkung, dass, wenn M, P, Q blos von y abhängen, die Gleichung (1), in der Form:

$$\frac{dy'}{dy} = M + Py' + Q\,y'^2$$

geschrieben, immer eine Integration zulässt, wenn entweder M oder Q Null ist.

2. Bezeichnet X eine blosse Function von x und nimmt man an, es sei

$$M = aX\,, \qquad P = bX\,, \qquad Q = cX$$

unter a, b, c constante Grössen verstanden, so erhält (2) die folgende Form:

$$\frac{x'\,dx'}{dx} + (a\,x'^2 + b\,x' + c)\,X = 0$$

woraus:

$$\int \frac{x'\,dx'}{a\,x'^2 + b\,x' + c} + \int X\,dx = C_1$$

als erstes Integral der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[a\frac{dy}{dx}+b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+c\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right].X$$

sich ergibt.

Bezeichnet dagegen Y eine Function blos von y und nimmt man an, es sei:

$$M=aY,\qquad P=bY,\qquad Q=cY$$

so geht die Gleichung (1), wenn darin $\frac{y'\,dy'}{dy}$ für $\frac{d^2y}{dx^2}$ gesetzt wird, über in die folgende:

$$\frac{dy'}{dy}=[a+by'+cy'^2]\,Y$$

woraus

$$\int\frac{dy'}{a+by'+cy'^2}=\int Y dy+C_1$$

als erstes Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[a\frac{dy}{dx}+b\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+c\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right].Y$$

erhalten wird.

3. Nimmt man wieder an, es seien M, P, Q Functionen allein von y, und schreibt die Gleichung (1) wie früher in der Form:

$$\frac{dy'}{dy}=M+Py'+Qy'^2$$

so wird diese durch die Substitution:

$$y'=ze^{\int P dy}$$

in die folgende

$$\frac{dz}{dy}=Me^{-\int P dy}+Qe^{\int P dy}.z^2$$

verwandelt, die offenbar integrirt werden kann, wenn

$$M e^{-\int P dy} = -a^2 Q e^{\int P dy}$$

und dabei a irgend eine constante Grösse ist. Man hat dann:

$$\frac{dz}{dy} = (z^2 - a^2) Q e^{\int P dy}$$

oder, da

$$e^{\int P dy} = \frac{1}{a}\sqrt{-\frac{M}{Q}}, \quad P = \frac{1}{2}\left[\frac{M'}{M} - \frac{Q'}{Q}\right]$$

ist, durch Integration:

$$\int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{a}\int dy \sqrt{-MQ}$$

Hieraus folgt

$$\frac{z-a}{z+a} = C_1 e^{2\int dy \sqrt{-MQ}}$$

und wenn man z durch y' ausdrückt,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + C_1 e^{2\int dy \sqrt{-MQ}}}{1 - C_1 e^{2\int dy \sqrt{-MQ}}} \cdot \sqrt{-\frac{M}{Q}}$$

Da sich hier noch eine zweite Integration ausführen lässt, so findet man, wie leicht zu sehen, das Resultat:

Der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = M \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\left[\frac{M'}{M} - \frac{Q'}{Q}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

worin M und Q beliebige Functionen von y allein sind, entspricht als Integral die Gleichung:

$$x = \int \frac{1 - C_1 e^{2\int dy \sqrt{-MQ}}}{1 + C_1 e^{2\int dy \sqrt{-MQ}}} \cdot \sqrt{-\frac{Q}{M}} \cdot dy + C_2$$

Hierzu noch die Bemerkung, dass sich, wenn M, P, Q blos von x abhängen, die Gleichung (2), welche wie folgt:

$$\frac{x'\,dx'}{dx} + Mx'^2 + Px' + Q = 0$$

geschrieben werden kann, in mehreren Fällen allgemeinerer Art integriren lässt, was also auch von (1) gilt. Solche Fälle finden z. B. statt, wenn entweder $P=0$ oder $Q=0$ ist, sowie auch für andere Bedingungen, welche Abel in einer Abhandlung (Oeuvres compl. T. II, p. 236) ermittelt hat.

3.

Die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, auf welche das nun Folgende fast ausschliesslich sich bezieht, und welche, wenn p, q, r Functionen von x allein sind, von der Form ist:

$$py'' + qy' + ry = 0 \qquad \ldots (1)$$

hat, wie bekannt, ein erstes Integral, welches selbst wieder eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung ist, wenn die Bedingung:

$$p'' - q' + r = 0 \qquad \ldots (2)$$

stattfindet. Findet aber diese nicht statt, so hat das erste Integral gleichwohl jene Form, wenn ein Multiplicator ρ von (1) der Bedingung

$$(p\rho)'' - (q\rho)' + r\rho = 0$$

entsprechend bestimmt ist. Diese Bedingung wird zu einer Relation zwischen p, q, r, wenn man für ρ eine Function von x annimmt. Man erhält daraus einige, des Folgenden wegen hier zu bemerkende Fälle integrirbarer Gleichungen:

1. Ist

$$\frac{r}{q} = \frac{q'}{q} - \frac{p'}{p} \qquad \ldots (3)$$

so hat (1) das erste Integral

$$py' + qy = C_1 p$$

2. Der Differentialgleichung

$$\left[ax + b - x\int r\,dx + \int rx\,dx\right] y'' + y' + ry = 0$$

entspricht als erstes Integral die Gleichung

$$\left[ax + b - x\int r\,dx + \int rx\,dx\right] y' + \left[1 - a + \int r\,dx\right] y = C_1$$

3. Ebenso genügt der Gleichung

$$\left[-\frac{1}{2}x^2 + ax + b + \int q\,dx\right] y'' + qy' + y = 0$$

die folgende

$$\left[-\frac{1}{2}x^2 + ax + b + \int q\,dx\right] y' + (x - a) y = C_1$$

als erstes Integral.

4. Da aus der Bedingung

$$\rho(y'' + qy' + ry) = \frac{d[\rho(y' + sy)]}{dx}$$

folgt:

$$q = \frac{\rho'}{\rho} + s\,, \qquad r = \frac{\rho'}{\rho} s + s' \qquad \ldots (4)$$

und

$$\rho = e^{\int (q - s)\,dx}$$

erhalten wird, so findet man, dass der Gleichung

$$y'' + qy' + (s' + qs - s^2) y = 0$$

als erstes Integral die Gleichung

$$y' + sy = C_1 e^{\int (s - q)\,dx}$$

zugehört.

Übrigens ergibt sich aus (4) durch Elimination von s für ρ die Gleichung:

$$\rho'' - q\rho' + (r - q')\rho = 0$$

welche nach Art. 1, Gleichung (2) integrirt werden kann, wenn

$$2q = \frac{r' - q''}{r - q'} \quad \text{oder also} \quad r = q' + e^{2\int q\,dx}$$

ist, so zwar, dass das Integral durch

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \int e^{\int q\,dx}\,dx$$

dargestellt wird, wenn a eine willkürliche (später aus der Rechnung wieder verschwindende) Constante bezeichnet.

Man hat nun

$$\rho = a . \sin\left(\int e^{\int q\,dx}\,dx\right)$$

und da

$$\rho(y' + sy) = C_1, \quad s = q - \frac{\rho'}{\rho}$$

so erscheint das erste Integral in der Form

$$\rho(y' + q) - \rho' y = C_1$$

und ist, weil ρ bekannt, vollständig bestimmt.

Hieraus folgt:

Das erste Integral der Differentialgleichung:

$$y'' + qy' + (q' + e^{2\int q\,dx})y = 0 \qquad \ldots (5)$$

ist, wenn zur Abkürzung

$$\theta = \int e^{\int q\,dx}\,dx$$

gesetzt wird, durch die Gleichung

$$y' \sin\theta + y\left[q \sin\theta - e^{\int q\,dx} . \cos\theta\right] = C_1$$

ausgedrückt.

5. Hieraus ergibt sich ein anderes, wenn auch blos der Form nach verschiedenes Resultat, wenn py für y geschrieben wird.

Man findet dann, dass der Gleichung

$$py''+qy'+\left[q'-p''+\frac{1}{p^3}e^{2\int\frac{q}{p}dx}\right]y=0 \qquad \ldots(6)$$

wenn zur Abkürzung

$$\theta=\int\frac{dx}{p^2}e^{\int\frac{q}{p}dx}$$

gesetzt wird, die Formel

$$y=pe^{-\int\frac{q}{p}dx}[C_1\cos\theta+C_2\sin\theta]$$

Genüge leistet.

Angenommen z. B., es werde q so gewählt, dass

$$e^{\int\frac{q}{p}dx}=p\sqrt{cp}\ , \quad c \text{ constant},$$

dann folgt:

$$q=\frac{3}{2}p'$$

und findet man, dass der Gleichung

$$2py''+3p'y'+(p''+2c)y=0$$

das Integral

$$y=\frac{1}{\sqrt{p}}\left[C_1\cos\left(\int dx\sqrt{\frac{c}{p}}\right)+C_2\sin\left(\int dx\sqrt{\frac{c}{p}}\right)\right]$$

angehört.

Für $c=0$ modificirt sich, wie man leicht sieht, dieser Zusammenhang dahin, dass die Differentialgleichung in

$$2py''+3p'y'+p''y=0$$

und ihr Integral in

$$y=\frac{C_1}{\sqrt{p}}+\frac{C_2}{\sqrt{p}}\int\frac{dx}{\sqrt{p}}$$

übergeht.

Für ein Beispiel der Gleichung (6) werde

$$p=a_0x^2+2a_1x+a_2\,,\quad q=3(a_0x+a_1)$$

gesetzt, wofür sich

$$e^{2\int\frac{q}{p}dx}=c^2(a_0x^2+2a_1x+a_2)^3$$

ergibt, wenn durch c irgend eine Constante bezeichnet wird. Man findet daher, dass der Gleichung

$$(a_0x+2a_1x+a_2)y''+3(a_0x+a_1)y'+(a_0+c^2)y=0$$

das Integral

$$y\sqrt{a_0x^2+2a_1x+a_2}=$$

$$C_1\cos\left(\int\frac{c\,dx}{\sqrt{a_0x^2+2a_1x+a_2}}\right)+C_2\sin\left(\int\frac{c\,dx}{\sqrt{a_0x^2+2a_1x+a_2}}\right)$$

entspricht.

6. Wenn die Coëfficienten der Gleichung:

$$P\rho''+Q\rho'+R\rho=0 \qquad \ldots(7)$$

der in der Gleichung (3) angeführten Bedingung

$$\frac{R}{Q}=\frac{Q'}{Q}-\frac{P'}{P}$$

genügen, so ist, wie gezeigt wurde,

$$\rho'+\frac{Q}{P}\rho=Const. \qquad \ldots(8)$$

ein erstes Integral jener Gleichung. Da nun für den Multiplicator ρ

$$P=p\,,\quad Q=2p'-q\,,\quad R=p''-q'+r$$

ist, so fordert jene Bedingung, dass

$$r = p'' + \frac{p'}{p}(q - 2p')$$

sei, und da jeder Werth von ρ, auch wenn er nicht der allgemeinste ist, welcher der Gleichung (7) genügt, für den vorliegenden Zweck hinreicht, so kann man in (8) auch $Const = 0$ setzen, wofür sich aus jener Gleichung

$$\rho = e^{-\int \frac{Q}{P} dx}$$

oder also

$$\rho = \frac{1}{p^2} e^{\int \frac{q}{p} dx}$$

ergibt. Hieraus folgt:

Der Differentialgleichung

$$p y'' + q y' + \left[p'' + \frac{p'}{p}(q - 2p')\right] y = 0$$

leistet der Ausdruck

$$y = \frac{1}{p}\left[C_1 + C_2 \int p^2 e^{-\int \frac{q}{p} dx} dx\right]$$

als allgemeines Integral Genüge.

Als Beispiel kann die Gleichung:

$$(a_0 x + a_1)^2 y'' + (a_0 x + a_1)(b_0 x + b_1) y' + a_0(b_0 x + b_1 - 2a_0) y = 0$$

dienen, deren Integral:

$$(a_0 x + a_1) y =$$

$$C_1 + C_2 \int e^{-\frac{b_0}{a_0} x} (a_0 x + a_1)^{\frac{1}{a_0^2}(b_0 a_1 - a_0 b_1) + 2} . dx$$

ist.

Da jedes bereits gefundene Kennzeichen der Integrabilität einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, angewen-

det auf die Gleichung, welcher der Multiplicator ρ entsprechen muss, zu einer neuen integrirbaren Differentialgleichung direct hinführt, so sieht man leicht ein, dass auf dem hier befolgten Wege noch viel weiter gegangen werden könnte.

4.

Zu den Transformationen, durch die man die Fälle kennen lernt, in welchen eine Differentialgleichung sich integriren lässt, gehört zunächst jene, die in der Einführung einer neuen Veränderlichen an Stelle der ursprünglichen x besteht. Bezeichnet s die neue Grösse, welche zu x in einer zu wählenden Relation $s=\varphi(x)$ steht, und auf welche die Differentialquotienten von y bezogen werden sollen, so hat man die Gleichungen

$$\frac{dy}{dx}=s'\frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=s's'\frac{d^2y}{ds^2}+s''\frac{dy}{ds}$$

und geht die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+q\frac{dy}{dx}+ry=0 \qquad \ldots(1)$$

durch jene Transformation in die folgende

$$s's'\frac{d^2y}{ds^2}+(s''+qs')\frac{dy}{ds}+ry=0 \qquad \ldots(2)$$

über, dabei angenommen, es seien q und r als Functionen blos von x gegeben. Euler, in dessen Instit. calc. integr. (Vol. II, probl. 128) dieser Transformation Erwähnung geschieht, hat fast gar keine Anwendungen derselben gezeigt, und ihr wohl auch keine weitere Bedeutung zugeschrieben. Da man jedoch über die Function s in verschiedener Weise so verfügen kann, dass sich die Gleichung (2) integriren lässt, so ergeben sich daraus wieder neue Bedingungen, unter welchen auch (1)

integrirt werden kann, und insofern ist jene Transformation doch nicht ohne Interesse.

Es sei, um dies am einfachsten Fall zu zeigen,

$$\frac{s''+qs'}{s's'}=a\,, \quad \frac{r}{s's'}=1$$

unter a eine constante Grösse verstanden. Man hat dann

$$s'=\sqrt{r}\,, \quad s''=\frac{r'}{2\sqrt{r}}$$

und findet daher die Bedingungen

$$q=a\sqrt{r}-\frac{r'}{2r}\,, \quad s=\int dx\,\sqrt{r}$$

Dies vorausgesetzt, erscheint die Gleichung (2) in der Form

$$\frac{d^2y}{ds^2}+a\frac{dy}{ds}+y=0$$

und ist, wenn $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varkappa^2+a\varkappa+1=0$$

bezeichnen:

$$y=C_1 e^{\varkappa_1 s}+C_2 e^{\varkappa_2 s}$$

deren allgemeines Integral. Da aber dies zugleich auch das Integral von (1) ist, so findet Folgendes statt:

Der Differentialgleichung

$$y''+\left[a\sqrt{r}-\frac{r'}{2r}\right]y'+ry=0$$

entspricht das Integral

$$y=C_1 e^{\varkappa_1\int dx\sqrt{r}}+C_2 e^{\varkappa_2\int dx\sqrt{r}}$$

Geht man von der im Art. 3 gemachten Bemerkung aus, wonach die Gleichung

$$P\frac{d^2y}{ds^2}+Q\frac{dy}{ds}+Ry=0$$

als erstes Integral eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung zulässt, wenn

$$PR=P\frac{dQ}{ds}-Q\frac{dP}{ds}$$

ist, so erhält man einen andern Fall, in welchem die Gleichung (2) sich integriren lässt. Wird nämlich x als Function von s gedacht und werden P, Q, R als durch x ausgedrückt betrachtet, sodann die auf x bezogenen Differentialquotienten in der Weise von Lagrange bezeichnet, so erscheint die angegebene Bedingung in der Form

$$s'PR=PQ'-QP'$$

welcher durch die Gleichung (2) genügt wird, wenn

$$s's'r=s'(s'''+qs''+q's')-2(s''+qs')s''$$

oder also, wenn

$$s's'(r-q')=(s's'''-2s''s'')-qs's'' \qquad \ldots(3)$$

ist. Statt s kann man eine Function t von x als gegeben betrachten und setzen:

$$s's'''-2s''s''=qts's''$$

Es ist dann, wenn a, b beliebige Constanten bezeichnen:

$$\frac{s'''}{s''}=2\frac{s''}{s'}+qt\,, \quad \text{also} \quad s''=-as's'e^{\int qt\,dx}$$

und daher

$$\frac{1}{s'}=a\int e^{\int qt\,dx}\,.dx+b$$

Dies vorausgesetzt, erhält man aus (3)

$$s'(r-q')=(t-1)q\,.s''$$

oder

$$\frac{r}{q} = \frac{q'}{q} + (t-1)\frac{s''}{s'}$$

und gelangt man zu dem folgenden Resultat:

Wenn in der Differentialgleichung

$$y'' + qy' + ry = 0$$

die Coëfficienten q, r als blosse Functionen von x der Bedingung

$$r = q' + q(1-t) \cdot \frac{z'}{z}$$

genügen, worin t irgend eine Function von x bezeichnet, und der Kürze wegen

$$z = a\int e^{\int q\, t\, dx} \cdot dx + b$$

gesetzt wurde, so ist:

$$y = z e^{-\int q\, dx}\left[C_1 \int \frac{dx}{z^2} e^{\int q\, dx} + C_2\right]$$

das allgemeine Integral jener Differentialgleichung.

Setzt man beispielsweise $t = 0$, so geht die Differentialgleichung in

$$y'' + q y' + \left(q' + \frac{aq}{ax+b}\right) y = 0$$

und deren Integral in

$$y = (ax+b) e^{-\int q\, dx}\left[C_1 \int \frac{e^{\int q\, dx}}{(ax+b)^2} \cdot dx + C_2\right]$$

über.

Man erhält ferner, wenn $t = \frac{c}{q}$ und $b = 0$ gesetzt wird,

$$r = q' + (q-c)c\,, \quad z = \frac{1}{c} e^{cx}$$

und für das zu der Differentialgleichung

$$y'' + qy' + [q' + cq - c^2]\,y = 0$$

gehörige Integral die Formel

$$y = e^{cx - \int q\,dx} \left[C_1 \int e^{-2cx + \int q\,dx} . dx + C_2 \right]$$

In dieser ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$q = e^{-cx} \left[a \int (c^2 + s) e^{cx}\, dx + b \right]$$

zu setzen, um das Integral der Gleichung

$$y'' + qy' + sy = 0$$

zu erhalten, worin s irgend eine gegebene Function von x vorstellt und a, b beliebige Constanten bedeuten.

Es werde für ein weiteres Beispiel $qt = \frac{1}{x} + \frac{1}{c}$ und wie vorhin $b = 0$ gesetzt. Man erhält dann

$$r = q' + \left(q - \frac{1}{x} - \frac{1}{c}\right) \cdot \frac{x}{c(x-c)}$$

und

$$z = c(x-c)\, e^{\frac{x}{c}}$$

Der Differentialgleichung

$$y'' + qy' + \left[q' + \frac{c + x - cxq}{c^2 (c-x)} \right] y = 0$$

entspricht daher als Integral die Formel:

$$y = (x-c)\, e^{\frac{x}{c} - \int q\,dx} \left[C_1 \int \frac{dx}{(x-c)^2} e^{-\frac{2x}{c} + \int q\,dx} + C_2 \right]$$

Von vielen anderen Fällen, in welchen die Gleichung (2) unmittelbar integrirt werden kann, mag noch der nächstliegende bemerkt werden, in welchem

$$s'' + q s' = t \quad \text{und} \quad r = \frac{dt}{ds} - \frac{d^2 . s' s'}{ds^2}$$

gesetzt wird. Da hierfür die Gleichung (2) in die folgende

$$s' s' \frac{d^2 y}{ds^2} + t \frac{dy}{ds} + \left[\frac{dt}{ds} - \frac{d^2 . s' s'}{ds^2}\right] y = 0$$

übergeht, welche sofort eine Integration zulässt, und

$$s' s' \frac{dy}{ds} + \left(t - \frac{d . s' s'}{ds}\right) . y = C_1 \qquad \ldots (4)$$

gibt, so sind zunächst nur wieder r und s durch q und t auszudrücken. Man bemerke zu diesem Zweck, dass, weil

$$\frac{d . s' s'}{ds} = 2 s'' \quad \text{also} \quad \frac{d^2 . s' s'}{ds^2} = 2 \frac{s'''}{s'}$$

ist, die vorhin für r angenommene Gleichung mit der folgenden

$$r = \frac{t'}{s'} - 2 \frac{s'''}{s'}$$

zusammenfällt, wobei die in der Bezeichnung von Lagrange angedeuteten Differentiationen sich auf x beziehen.

Da ferner

$$t = s'' + q s'$$

gesetzt wurde, so hat man

$$t' = s''' + q s'' + q' s'$$

und zugleich auch

$$s' = e^{-\int q\, dx} \left[\int t\, e^{\int q\, dx} dx + c\right]$$

wo c eine beliebige Constante bezeichnet.

Durch Elimination von s'' und s''' erhält man nun:

$$r = 2q' - 2q^2 + \frac{2qt - t'}{s'}$$

Die Gleichung (4) kann in der Form

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{t}{s'} - 2\frac{s''}{s'}\right) y = \frac{C_1}{s'}$$

geschrieben werden, welche, weil

$$\frac{t}{s'} = q + \frac{s''}{s'}$$

ist, wieder durch

$$\frac{dy}{dx} + \left(q - \frac{s''}{s'}\right) y = \frac{C_1}{s'}$$

ersetzt und nun unmittelbar integrirt werden kann.

Hieraus folgt:

Wenn in der Differentialgleichung

$$y'' + qy' + ry = 0$$

die Coëfficienten q, r als blosse Functionen von x der Bedingung

$$r = 2q' - 2q^2 + \frac{(2qt - t')\, e^{\int q\,dx}}{\int t\, e^{\int q\,dx}\, dx + c}$$

genügen, worin t irgend eine Function von x bedeutet, so ist, wenn man der bequemern Schreibweise wegen

$$z = e^{-\int q\,dx}\left[\int t\, e^{\int q\,dx}\,.\,dx + c\right]$$

setzt:

$$y = z\, e^{-\int q\,dx}\left[C_1 \int \frac{dx}{z^2}\, e^{\int q\,dx} + C_2\right]$$

das allgemeine Integral jener Differentialgleichung.

Es sei z. B. $t=0$. Die Differentialgleichung ist dann

$$y''+qy'+2(q'-q^2)y=0$$

und deren Integral

$$y=e^{-2\int q\,dx}\left[C_2\int dx\, e^{3\int q\,dx}+C_2\right]$$

von dessen Richtigkeit man sich leicht überzeugen kann.

5.

Auch die Differentiation bietet ein sehr nahe liegendes und oft benutztes Mittel dar, aus der gegebenen Gleichung eine andere abzuleiten.

Der Kürze wegen kann man, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, jene Gleichung in der Form

$$py''+qy'+y=0 \qquad \ldots(1)$$

annehmen, aus welcher durch einmalige Differentiation die folgende

$$py'''+(p'+q)y''+(q'+1)y'=0 \qquad \ldots(2)$$

erhalten wird.

Mittelst der früheren Criterien lassen sich nun mehrere beachtenswerthe Fälle angeben, in welchen die Gleichung (2) von der dritten auf die zweite Ordnung reducirt und daher auch die Gleichung (1) integrirt werden kann.

Geht man wieder von der Bemerkung aus, dass die Gleichung $Py''+Qy'+Ry=0$, wenn diese der Bedingung

$$\frac{R}{Q}=\frac{Q'}{Q}-\frac{P'}{P}$$

genügt, das durch die Formel $y'+\frac{Q}{P}y=C_1$ ausgedrückte erste Integral zulässt, so folgt, dass, wenn in der Gleichung (2)

$$\frac{q'+1}{p'+q}=\frac{p''+q'}{p'+q}-\frac{p'}{p}$$

oder also

$$q=\frac{p}{p'}(p''-1)-p'$$

ist, die Gleichung

$$y''+\frac{p''-1}{p'}y'=C_1$$

das erste Integral von (2) darstellt, woraus man leicht y erhält. Hiernach findet Folgendes statt:

Der Differentialgleichung

$$py''+\left[\frac{p}{p'}(p''-1)-p'\right]y'+y=0$$

leistet der Ausdruck

$$y=C_1\left[-p+e^{\int\frac{dx}{p'}}\int p'\,e^{-\int\frac{dx}{p'}}dx\right]+C_2\,e^{\int\frac{dx}{p'}}$$

als allgemeines Integral Genüge.

Die Gleichung $Py'''+Qy''+Ry'=0$ hat, wie im Art. 1 gezeigt wurde, unter der Bedingung, dass

$$Q=\frac{P'}{2}\left(\frac{P'}{P}-\frac{R'}{R}\right)$$

sei, die Formel

$$\int\frac{dy'}{\sqrt{c_0^2-y'y'}}=\int e^{-\int\frac{Q}{P}dx}dx+c$$

zum Integral. Nun findet in der Gleichung (2) jene Bedingung statt, wenn

$$2(p'+q)(q'+1)=p'(q'+1)-pq''$$

oder also

$$p'+\frac{q''}{q'+1}p+2q=0$$

ist. Es ergibt sich hieraus

$$p = \frac{1}{q'+1}(a - q^2 - 2\int q\,dx)$$

wenn a irgend eine Constante bezeichnet, und da

$$\frac{Q}{P} = \frac{p'}{p} + \frac{q}{p} = \frac{p'}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d \log(a - q^2 - 2\int q\,dx)}{dx}$$

so folgt

$$e^{-\int \frac{Q}{P} dx} = \frac{1}{p}\sqrt{a - q^2 - 2\int q\,dx} = \frac{q'+1}{\sqrt{a - q^2 - 2\int q\,dx}}$$

Man hat daher

$$\pm \int \frac{dy'}{\sqrt{c_0^2 - y'y'}} = \int \frac{(q'+1)\,dx}{\sqrt{a - q^2 - 2\int q\,dx}} + c$$

wobei das Doppelzeichen der Quadratwurzel berücksichtigt wurde, damit die Gleichung zwei particuläre Integrale von (2) liefere.

Wird zur Abkürzung

$$\theta = \int \frac{(q'+1)\,dx}{\sqrt{a - q^2 - 2\int q\,dx}}$$

gesetzt, so sind

$$y' = c_0 \sin(\theta + c_1) = c_0 \cos c_1 \sin\theta + c_0 \sin c_1 \cos\theta$$

$$y' = c_0 \cos(\theta + c_2) = c_0 \cos c_2 \cos\theta - c_0 \sin c_2 \sin\theta$$

jene beiden Integrale, und kann daher das aus beiden zusammengesetzte allgemeine Integral durch

$$y' = -C_1 \sin\theta - C_2 \cos\theta$$

ausgedrückt werden. Da nun offenbar

$$-\int \sin\theta\,dx = q \sin\theta + \sqrt{a - q^2 - 2\int q\,dx} \,.\, \cos\theta$$

$$-\int \cos\theta\,dx = q \cos\theta - \sqrt{a - q^2 - 2\int q\,dx} \,.\, \sin\theta$$

so gelangt man durch nochmalige Integration zu einem Ausdruck für y, welchem, wie sich von selbst versteht, eine weitere Constante nicht beizufügen ist. Das Resultat ist folgendes:

Der Differentialgleichung

$$(a-q^2-2\int q\,dx)y''+q(q'+1).y'+(q'+1)y=0$$

genügt, wenn θ die angegebene Bedeutung hat, als Integral der Ausdruck

$$y=C_1\left[q\sin\theta+\sqrt{a-q^2-2\int q\,dx}\,.\cos\theta\right]$$
$$+C_2\left[q\cos\theta-\sqrt{a-q^2-2\int q\,dx}\,.\sin\theta\right]$$

Die vorstehenden Bemerkungen sind offenbar auch auf Differentialgleichungen anwendbar, welche durch mehr als einmalige Differentiation aus (1) hervorgehen.

6.

Die folgende Transformation hat den Zweck, die Gleichung

$$py''+qy'+ry=0 \qquad \ldots(1)$$

in der Form

$$\frac{d\left[P.\frac{d.\lambda y}{dx}\right]}{dx}+Q.\frac{d.\lambda y}{dx}+R.\lambda y=0 \qquad \ldots(2)$$

darzustellen. Sie führt, wie man sieht, zu den Bedingungen

$$p=\lambda P$$
$$q=2\lambda' P+\lambda(P'+Q)$$
$$r=\lambda'' P+\lambda'(P'+Q)+\lambda R$$

Aus der ersten und zweiten dieser erhält man

$$q-2p'=\lambda(Q-P')$$

aus der ersten und dritten dagegen

$$r-p''=\lambda'(Q-P')+\lambda(R-P'')$$

Durch Elimination von λ findet man hieraus:

$$\left.\begin{aligned} Q &= P' + \frac{1}{p}(q-2p').P \\ R &= P'' + \frac{1}{p}(q-2p').P' + \frac{1}{p^2}[p(r-p'')-p'(q-2p')].P \end{aligned}\right\} \quad \dots (3)$$

Die Functionen λ, Q, R können also erst bestimmt werden, wenn P angenommen ist. Man kann aber auch eine der Functionen Q, R so wählen, dass die transformirte Gleichung (2) integrirt werden kann, und in dieser Richtung mögen hier einige Fälle betrachtet werden.

Es sei zu dem Ende bemerkt, dass wenn man in (2) statt x eine neue Veränderliche z einführt, welche durch die Gleichung

$$\frac{dx}{dz} = P, \qquad z = \int \frac{dx}{P} \qquad \dots (4)$$

bestimmt ist, die Gleichung (2) die Form erhält

$$\frac{d^2.\lambda y}{dz^2} + Q\frac{d.\lambda y}{dz} + PR.\lambda y = 0 \qquad \dots (5)$$

worin nun P, Q, R ebenfalls als Functionen von z zu denken sind.

Der einfachste Fall, in welchem die Gleichung (5) sich unmittelbar integriren lässt, findet statt, wenn

$$Q = a \ , \quad PR = b$$

gegebene constante Grössen bezeichnen. Dann sind P, Q, R bestimmt und ergibt sich noch eine Relation zwischen p, q, r.

Aus der ersten der Gleichungen (3) folgt nämlich

$$\frac{dP}{dx} + \left(\frac{q}{p} - 2\frac{p'}{p}\right)P = a$$

also

$$P = p^2.e^{-\int\frac{q}{p}dx}.\left[a\int\frac{dx}{p^2}e^{\int\frac{q}{p}dx} + c\right]$$

wo c eine beliebige Constante bezeichnet, und aus der zweiten jener Gleichungen ergibt sich

$$P'P + \frac{1}{p}(q-2p')P'P + \frac{1}{p^2}[p(r-p'') - p'(q-2p')]PP = b.$$

Man kann hieraus P' und P'' eliminiren und erhält

$$(p''-q'+r)PP = bp$$

Auch folgt

$$R = \frac{b}{P}, \quad \lambda = \frac{p}{P}$$

Der Gleichung (5) entspricht das allgemeine Integral

$$\lambda y = C_1 e^{\varkappa_1 z} + C_2 e^{\varkappa_2 z}$$

wenn mit $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die Wurzeln der Gleichung

$$\varkappa^2 + a\varkappa + b = 0$$

bezeichnet werden. — Hieraus folgt nun:

Wenn in der Differentialgleichung

$$py'' + qy' + ry = 0$$

die Coëfficienten p, q, r als blosse Functionen von x der Bedingung

$$(p''-q'+r)p^3 . e^{-2\int\frac{q}{p}dx} . \left[a\int\frac{dx}{p^2} e^{\int\frac{q}{p}dx} + c\right]^2 = b \quad \ldots (\mathrm{I})$$

identisch Genüge leisten, und wenn der Kürze wegen

$$P = p^2 e^{-\int\frac{q}{p}dx} . \left[a\int\frac{dx}{p^2} e^{\int\frac{q}{p}dx} + c\right]$$

gesetzt wird, so ist

$$y = \frac{P}{p}\left[C_1 e^{\varkappa_1\int\frac{dx}{P}} + C_2 e^{\varkappa_2\int\frac{dx}{P}}\right]$$

das allgemeine Integral jener Differentialgleichung, unter x_1, x_2 die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

verstanden.

Die Bedingung (I) nimmt in besonderen Fällen eine andere, oft einfachere Form an. Sie fällt für $a = 0$, $c = 1$ mit jener in (6) des Art. 3 zusammen. Statt wie dort, r aus ihr zu bestimmen, kann man von den folgenden Annahmen

$$q = p' + p' f(p)\,, \quad r = F(p)$$

ausgehen, für welche aus (I):

$$F(p) = p'' f(p) + p' p' f'(p) + \frac{b}{p} e^{2\int \frac{dp}{p} f(p)}$$

erhalten wird. Da diese Gleichung, wenn man auf beiden Seiten mit $2p' f(p)$ multiplicirt, in der Form

$$2p' f(p) F(p) = \frac{d \cdot [p' f(p)]^2}{dx} + 2b \cdot \frac{p'}{p} f(p) e^{2\int \frac{dp}{p} f(p)}$$

geschrieben werden kann, so ergibt sich durch Integration

$$2 \int f(p) F(p)\, dp + h = [p' f(p)]^2 + b\, e^{2\int \frac{dp}{p} f(p)}$$

wo h eine beliebige Constante bezeichnet. Offenbar ist noch eine zweite Integration möglich; denn wird der Kürze wegen

$$M = 2 \int f(p) F(p)\, dp - b\, e^{2\int \frac{dp}{p} f(p)} + h$$

gesetzt, so folgt

$$x + k = \int \frac{f(p)}{\sqrt{M}}\, dp$$

worin k eine neue willkürliche Constante ist, und die Quadratwurzel sowohl positiv als negativ genommen werden kann. Durch diese Transformation der Bedingungsgleichung (I) wird,

wie man sieht, die Abhängigkeit der Function p von x bestimmt, welche stattfinden muss, damit die Aufgabe eine Lösung in der angegebenen Form zulasse.

Wenn man einer kleinen Vereinfachung wegen $f(p)-1$ für $f(p)$ schreibt, so ergibt sich hiernach folgendes Resultat:

Ist p eine durch die Gleichungen

$$M = 2\int[f(p)-1]F(p)\,dp - \frac{b}{p^2}e^{2\int\frac{dp}{p}f(p)} + h$$

$$x + k = \int\frac{f(p)-1}{\sqrt{M}}\,dp$$

bestimmte Function von x, so entspricht der Differentialgleichung

$$py'' + p'f(p)\,.\,y' + F(p)\,.\,y = 0$$

als allgemeines Integral die Formel

$$y = \frac{P}{p}\left[C_1 e^{\sqrt{-b}.\int\frac{dx}{P}} + C_2 e^{-\sqrt{-b}.\int\frac{dx}{P}}\right]$$

worin

$$P = p^2 e^{-\int\frac{dp}{p}f(p)}$$

ist.

In dem besondern Fall, wenn $f(p) = 1-\gamma$ constant ist, erhält man:

$$M = -2\gamma\int F(p)\,dp - \frac{b}{p^{2\gamma}} + h$$

oder, wenn man $F(p) = -\varphi'(p)$ setzt und γh für h schreibt,

$$M = \gamma[2\varphi(p) + h] - \frac{b}{p^{2\gamma}}$$

Auch folgt

$$P = p^{1+\gamma}$$

Der Differentialgleichung

$$py'' + (1-\gamma)p'y' - \varphi'(p)\cdot y = 0$$

worin p als Function von x durch die Relation

$$x+k = \pm\int\frac{\gamma p^\gamma dp}{\sqrt{[2\varphi(p)+h]\gamma p^{2\gamma}-b}}$$

bestimmt ist, entspricht daher das Integral

$$y = p^\gamma\left[C_1 e^{\sqrt{-b}\int\frac{dx}{p^{1+\gamma}}} + C_2 e^{-\sqrt{-b}\int\frac{dx}{p^{1+\gamma}}}\right]$$

Für $\gamma=1$, und wenn b^2 für b geschrieben wird, verwandelt sich die gegebene Gleichung in

$$py'' - \varphi'(p)\cdot y = 0 \quad \text{oder also:} \quad y'' = \frac{\varphi'(p)}{p}\cdot y$$

und geht die Bedingung für p über in die folgende:

$$x+k = \pm\int\frac{p\,dp}{\sqrt{[2\varphi(p)+h]p^2-b^2}}$$

Das Integral jener Gleichung ist daher

$$y = p\left[C_2 \cos\left(b\int\frac{dx}{p^2}\right) + C_1 \sin\left(b\int\frac{dx}{p^2}\right)\right] \qquad \ldots(7)$$

Dieses letztere, sehr merkwürdige Resultat hat auf anderm Wege zuerst Binet gefunden und in einem Aufsatz des Journals von Liouville T. II (1837), p. 457 veröffentlicht.

Wenn ausser $\gamma=1$ auch noch $\varphi'(p) = p'' - \frac{b^2}{p^3}$ gesetzt wird, so findet die Bedingungsgleichung für p identisch statt und un erliegt also diese Function keiner Einschränkung.

Die Differentialgleichung ist in diesem Fall:

$$py'' + \left(\frac{b^2}{p^3} - p''\right)y = 0$$

und ihr Integral wie vorhin:

$$y = p\left[C_1 \cos\left(b\int\frac{dx}{p^2}\right) + C_2 \sin\left(b\int\frac{dx}{p^2}\right)\right]$$

Auf andere Weise hergeleitet ist übrigens diese Gleichung schon in der allgemeinern (6) des Art. 3 enthalten.

7.

Wie aus Art. 1 hervorgeht, kann die Gleichung (5) des vorhergehenden Art. auch dann integrirt werden, wenn

$$2Q = -\frac{d\log PR}{dz} \quad \text{oder also} \quad PR = e^{-2\int Q\,dz} = e^{-2\int\frac{Q}{P}dx}$$

ist. Da nun, wenn man $p=1$ setzt, die Gleichungen (3) in die folgenden

$$Q = P' + qP\,, \quad R = P'' + qP' + rP$$

übergehen, aus deren erster

$$\frac{Q}{P} = \frac{P'}{P} + q$$

folgt, so hat man offenbar

$$P^3 R = e^{-2\int q\,dx}$$

und wenn aus der zweiten R eliminirt wird

$$P^3(P'' + qP' + rP) = e^{-2\int q\,dx}$$

Hiedurch ist r als Function von q und P bestimmt, das Resultat daher folgendes:

Bedeuten q und P irgend welche gegebene Functionen von x, so wird der Differentialgleichung

$$(y'' + qy')P^4 + \left[e^{-2\int q\,dx} - (P'' + qP')P^3\right]y = 0$$

durch den Ausdruck

$$y = P\left\{C_1 \sin\int \frac{e^{-\int q\,dx}}{P^2}\,dx + C_2 \cos\int \frac{e^{-\int q\,dx}}{P^2}\,dx\right\}$$

als allgemeines Integral entsprochen.

Bestimmt man beispielsweise P in der Art, dass

$$P'' + qP' = 0$$

also

$$P = a\int e^{-\int q\,dx}\,dx + b$$

wird, so folgt, dass der Gleichung

$$(y'' + qy')\left[a\int e^{-\int q\,dx}\,.\,dx + b\right]^4 + e^{-2\int q\,dx}\,.\,y = 0$$

das Integral

$$y = P\left[C_1 \sin\frac{1}{aP} + C_2 \cos\frac{1}{aP}\right]$$

genügt, wenn P den vorhin gefundenen Ausdruck bezeichnet.

Wenn man in den Gleichungen (3) des vorigen Art. nicht, wie vorhin geschehen, p, sondern $P = \frac{1}{\sqrt{c}}$ constant setzt, dabei aber wieder von der Annahme

$$2Q = -\frac{d \log PR}{dz}$$

ausgeht, so erhält man als Bedingung für r

$$p(r - p'') - p'(q - 2p') = c^2 p^3 e^{-2\int \frac{q}{p}\,dx}$$

und wenn diese stattfindet, als Integral der Gleichung

$$py'' + qy' + ry = 0$$

die Formel

$$y = \frac{1}{p}\left\{C_1 \sin \int c p^2 e^{-\int \frac{q}{p} dx} . dx + C_2 \cos \int c p^2 e^{-\int \frac{q}{p} dx} . dx\right\}$$

Hiernach ergibt sich z. B., wenn $m = -1$, $n = 0$ und ac für c gesetzt wird:

$$(ax+b)^4 . y'' + a^2 c^2 . y = 0$$

und dazu

$$y = (ax+b)\left[C_1 \sin \frac{c}{ax+b} + C_2 \cos \frac{c}{ax+b}\right]$$

als allgemeines Integral.

8.

Die durch Transformation erhaltene Gleichung (5) des Art. 6 kann auch dann unmittelbar integrirt werden, wenn $R = 0$ ist. In diesem Falle geht jene Gleichung, wenn s eine gegebene Function von x bezeichnet und $Q = s$ gesetzt wird, über in die folgende

$$\frac{d^2 . \lambda y}{dz^2} + s . \frac{d . \lambda y}{dz} = 0$$

und erhält man

$$\lambda y = C_1 \int e^{-\int s dz} . dz + C_2$$

oder, da

$$\lambda = \frac{p}{P} \quad \text{und} \quad dz = \frac{dx}{P}$$

ist:

$$y = \frac{P}{p}\left[C_1 \int \frac{dx}{P} e^{-\int \frac{s}{P} dx} + C_2\right]$$

Aus den Gleichungen (3) des Art. 6, welche sind

$$Q = P' + \frac{1}{p}(q - 2p')P$$

$$R = P'' + \frac{1}{p}(q - 2p')P' + \frac{1}{p^2}[p(r - p'') - p'(q - 2p')].P$$

ergibt sich, wenn man die erstere differentiirt und hierauf von der letztern abzieht, nach einigen Reductionen

$$(p'' - q' + r)P = p(R - Q')$$

Da nun $R = 0$, $Q = s$, so können jene Gleichungen durch die folgenden

$$(p'' - q' + r)P + ps' = 0$$

$$P' + \left(\frac{q}{p} - 2\frac{p'}{p}\right)P = 0$$

ersetzt werden, aus welchen man P und r finden kann.

Es ergibt sich

$$P = p^2 e^{-\int \frac{q}{p} dx} \left[\int \frac{s}{p^2} e^{\int \frac{q}{p} dx} . dx + c\right]$$

und

$$r = q' - p'' - \frac{p}{P} s'$$

Wie man sieht, stellen p, q, s beliebige Functionen von x dar, und ist, erst wenn diese gegeben sind, auch r bestimmt.

Die beliebige Constante c tritt, ähnlich wie in früheren Fällen, als Parameter der gegebenen Differentialgleichung in die Rechnung und trägt zur Allgemeinheit des Resultates bei, welches sich nun wie folgt ausdrücken lässt.

Sind p, q, s gegebene Functionen von x und wird der Kürze wegen

$$P = p^2 e^{-\int \frac{q}{p} dx} . \left[\int \frac{s}{p^2} e^{\int \frac{q}{p} dx} . dx + c\right]$$

gesetzt, so ist das Integral der Differentialgleichung

$$py'' + qy' + \left[q' - p'' - \frac{p}{P} \cdot s'\right] y = 0$$

durch die Formel

$$y = \frac{P}{p}\left[C_1 \int \frac{dx}{P} e^{-\int \frac{s}{P}' dx} + C_2\right]$$

ausgedrückt.

Es verdient bemerkt zu werden, dass, wenn speciell:

$$c = 0\,, \quad s = \cos\theta\,, \quad \theta = \int \frac{dx}{p^2} e^{\int \frac{q}{p} dx}$$

gesetzt wird, wie eine leichte Rechnung zeigt, der im Art. 3 unter 5 betrachtete Fall sich wieder ergibt.

9.

Macht man in den, Art. 6 erhaltenen Gleichungen (3) die Annahme $Q = 0$, so ergibt sich

$$P = p^2 e^{-\int \frac{q}{p} dx}$$

und

$$pR = (p'' - q' + r) P$$

folglich

$$PR = p^3 (p'' - q' + r)\, e^{-2\int \frac{q}{p} dx}$$

Die transformirte Gleichung (5) jenes Art. ist daher

$$\frac{d^2 . \lambda y}{dz^2} + p^3 (p'' - q' + r)\, e^{-2\int \frac{q}{p} dx} . \lambda y = 0$$

worin man sich den Coëfficienten von λy vermöge der Gleichung:

$$z = \int \frac{dx}{P} = \int \frac{dx}{p^2}\, e^{\int \frac{q}{p} dx}$$

als Function von z dargestellt denken kann. Die Gleichung für λy ist nun allerdings von dem ersten Differentialquotienten dieser Function frei, kann aber in dieser durch nichts beschränkten Allgemeinheit eben so wenig, als die ursprünglich gegebene Differentialgleichung integrirt werden. Die einzuführende Beschränkung möge jetzt in einer Annahme bestehen, welche die wiederholte Anwendung des im Art. 6 eingeschlagenen Verfahrens zulässt.

Es sei zu dem Ende s eine näher zu bestimmende Function von z, ferner $\varphi(s)$ irgend eine gegebene Function von s, und es werde

$$p^3 (p'' - q' + r)\, e^{-2\int \frac{q}{p} dx} = -\frac{\varphi'(s)}{s}$$

gesetzt. Dann verwandelt sich die Differentialgleichung in:

$$\frac{d^2 . \lambda y}{dz^2} - \frac{\varphi'(s)}{s} . \lambda y = 0$$

welche nach Art. 6 (Formel von Binet) integrirt werden kann, wenn s in der Weise von z abhängt, dass die Gleichung:

$$z + k = \pm \int \frac{s\, ds}{\sqrt{[2\varphi(s) + h]\, s^2 - b^2}}$$

stattfindet.

Da nun aus den beiden Bestimmungen von s die Gleichung

$$\pm \int \frac{s\, ds}{\sqrt{[2\varphi(s) + h]\, s^2 - b^2}} = k + \int \frac{dx}{p^2} \cdot e^{\int \frac{q}{p} dx}$$

folgt, so sieht man, dass jetzt auch s als Function von x wenigstens durch Quadraturen definirt ist.

Ferner ergibt sich der Coëfficient r aus der für $\varphi'(s)$ angenommenen Gleichung als Function von x, sowie das gesuchte Integral aus der Gleichung (7) des Art. 6, nämlich

$$\lambda y = s\left[C_1 \cos\left(b\int\frac{dz}{s^2}\right) + C_2 \sin\left(b\int\frac{dz}{s^2}\right)\right]$$

Man kann, der Allgemeinheit unbeschadet, in der vorhin für s erhaltenen Bedingungsgleichung statt $2\varphi(s)+h$ blos $2\varphi(s)$ schreiben, weil in der Differentialgleichung blos $\varphi'(s)$ vorkommt und die Constante h als in $\varphi(s)$ enthalten gedacht werden kann.

Dies vorausgesetzt, lässt sich der Zusammenhang dieser Formeln in folgender Weise ausdrücken:

Ist $\varphi(s)$ irgend eine gegebene Function von s, und s eine aus der Gleichung

$$\pm\int\frac{s\,ds}{\sqrt{2s^2\varphi(s)-b^2}} = k + \int\frac{dx}{p^2}\,e^{\int\frac{q}{p}dx}$$

berechnete Function von x, so entspricht der Differentialgleichung:

$$py''+qy'+\left[q'-p''-\frac{\varphi'(s)}{s}\cdot\frac{1}{p^3}\cdot e^{2\int\frac{q}{p}dx}\right].\,y=0$$

als allgemeines Integral die Formel:

$$y = s.p\,e^{-\int\frac{q}{p}dx}.\left[C_1\cos\left(b\int\frac{dz}{s^2}\right) + C_2\sin\left(b\int\frac{dz}{s^2}\right)\right]$$

wobei

$$\frac{dz}{s^2} = \frac{ds}{s\sqrt{2s^2\varphi(s)-b^2}}$$

ist, und b, k als gegeben zu betrachtende constante Grössen sind.

Wie man sieht, führt die für s angegebene Bedingungsgleichung immer dann auf eine algebraische Gleichung für diese Grösse, wenn sich das Integral linker Hand entweder durch rein algebraische oder rein logarithmische Ausdrücke darstellen lässt.

10.

Einige einfachere Fälle dieser Art sind die folgenden.

Es sei

$$\varphi(s) = as + \frac{b^2}{2s^2} + \frac{c}{2}$$

und zur Abkürzung

$$\theta = k + \int \frac{dx}{p^2} e^{\int \frac{q}{p} dx}$$

Man hat dann die Gleichung

$$\pm \int \frac{ds}{\sqrt{2as + c}} = \theta$$

und findet

$$s = \frac{a^2\theta^2 - c}{2a}$$

Ferner folgt

$$\int \frac{dz}{s^2} = \int \frac{ds}{s^2 \sqrt{2as + c}} = -\frac{1}{cs}\sqrt{2as + c} + \frac{a}{c\sqrt{c}} \log \frac{\sqrt{2as + c} + \sqrt{c}}{\sqrt{2as + c} - \sqrt{c}}$$

oder also

$$\int \frac{dz}{s^2} = -\frac{2a^2\theta}{c(a^2\theta^2 - c)} + \frac{a}{c\sqrt{c}} \log \frac{a\theta + \sqrt{c}}{a\theta - \sqrt{c}}$$

Da endlich

$$\varphi'(s) = a - \frac{b^2}{s^3}$$

so ist die Differentialgleichung von der Form

$$py'' + qy' + \left[q' - p'' - \frac{a\,s^3 - b^2}{p^3 s^4} \cdot e^{2\int \frac{q}{p} dx}\right] \cdot y = 0$$

und deren Integral durch das Vorhergehende vollständig gegeben.

Zu den einfacheren Formen, welche für $\varphi(s)$ gewählt werden können, gehört noch die folgende:

$$\varphi(s) = \frac{1}{2}\left[s^2 + \frac{b^2}{s^2} + \frac{2c}{s}\right]$$

Da hieraus

$$2s^2\varphi(s) - b^2 = s^4 + 2c\,s$$

folgt, so ergibt sich die Gleichung

$$\int \frac{s\,ds}{\sqrt{s^4 + 2c\,s}} = \frac{1}{3}\,log\,\frac{s^2 + \sqrt{s^4 + 2c\,s}}{s^2 - \sqrt{s^4 + 2c\,s}} = \theta$$

wenn, wie vorhin

$$\theta = k + \int \frac{dx}{p^2} \cdot e^{\int \frac{q}{p} dx}$$

gesetzt wird. Es ist also

$$\frac{s^2 + \sqrt{s^4 + 2c\,s}}{s^2 - \sqrt{s^4 + 2c\,s}} = e^{3\theta}$$

und da hieraus die beiden Gleichungen

$$s^2 + \sqrt{s^4 + 2c\,s} = \sqrt{-2c\,s} \cdot e^{\frac{3}{2}\theta}$$

$$s^2 - \sqrt{s^4 + 2c\,s} = \sqrt{-2c\,s} \cdot e^{-\frac{3}{2}\theta}$$

abgeleitet werden können, so sieht man, dass

$$2s^2 = \sqrt{-2cs}\,.\left[e^{\frac{3}{2}\theta} + e^{-\frac{3}{2}\theta}\right]$$

ist, woraus

$$s = \sqrt{-\frac{c}{2}}\,.\left[e^{\frac{3}{2}\theta} + e^{-\frac{3}{2}\theta}\right]^{\frac{2}{3}}$$

folgt. Was ferner das Integral

$$\int\frac{dz}{s^2} = \int\frac{ds}{s\sqrt{s^4+2cs}}$$

betrifft, so lässt sich dasselbe in geschlossener Form nicht ausführen, aber durch θ ausdrücken. Man erhält nämlich

$$\int\frac{dz}{s^2} = \left(\frac{2}{c}\right)^{\frac{2}{3}}.\int\frac{d\theta}{\left[e^{\frac{3}{2}\theta} + e^{-\frac{3}{2}\theta}\right]^{\frac{4}{3}}}$$

Da endlich

$$\frac{\varphi'(s)}{s} = 1 - \frac{c}{s^3} - \frac{b^2}{s^4}$$

so folgt, dass der Differentialgleichung

$$py'' + qy' + \left[q' - p'' + \left(\frac{b^2}{s^4} + \frac{c}{s^3} - 1\right).\frac{1}{p^3}.e^{2\int\frac{q}{p}dx}\right].y = 0$$

wenn s und θ die angegebene Bedeutung haben, das Integral

$$y = s.p\,e^{-\int\frac{q}{p}dx}\left[C_1 \cos\left(b\int\frac{dz}{s^2}\right) + C_2 \sin\left(b\int\frac{dz}{s^2}\right)\right]$$

entspricht.

11.

Die bisherigen Resultate hätten zum grossen Theil auch auf anderm Weg gefunden werden können; es mag genügen, dies an dem, Art. 7 betrachteten Fall zu zeigen.

Das allgemeine Integral der Gleichung

$$y'' + qy' + ry = 0$$

kann immer als in der Form

$$y = s[C_1 e^u + C_2 e^{-u}]$$

enthalten gedacht werden. Denn, bezeichnen y_1, y_2 zwei von Null verschiedene particuläre Integrale jener Gleichung, so muss

$$y_1 = s e^u, \quad y_2 = s e^{-u}$$

sein, und ergibt sich hieraus:

$$s = \sqrt{y_1 y_2}, \quad u = \frac{1}{2} \log \frac{y_1}{y_2}$$

Die Grössen s und u können also mittelst der Integrale y_1 und y_2 immer dargestellt werden.

Setzt man nun einmal se^u und dann se^{-u} für y in die gegebene Gleichung, so ergeben sich zwei Bedingungen, aus welchen man die beiden gleichbedeutenden

$$q = -\left(2\frac{s'}{s} + \frac{u''}{u'}\right)$$

$$r = \frac{s'}{s}\left(2\frac{s'}{s} + \frac{u''}{u'}\right) - \left(\frac{s''}{s} + u'u'\right)$$

ableiten kann. Aus der erstern folgt:

$$u' = \frac{a}{s^2} e^{-\int q\,dx}, \quad u = a\int \frac{dx}{s^2} e^{-\int q\,dx} \quad \ldots(1)$$

wobei die Hinzufügung einer weitern Constante offenbar keinen Zweck hätte. Aus der zweiten Gleichung findet man

$$s'' + qs' + rs = -\frac{a^2}{s^3} \cdot e^{-2\int q\,dx} \quad \ldots(2)$$

und hieraus lässt sich r bestimmen.

Bezeichnen daher q und s beliebige Functionen von x, so genügt der Differentialgleichung:

$$y''+qy'-\frac{1}{s^4}\left[(s''+qs')s^3+a^2 e^{-2\int q\,dx}\right].y=0$$

als allgemeines Integral der Ausdruck

$$y=s.\left[C_1 e^{a\int\frac{dx}{s^2}e^{-\int q\,dx}}+C_2 e^{-a\int\frac{dx}{s^2}e^{-\int q\,dx}}\right]$$

Für $s=1$ geht die Gleichung in die sehr einfache

$$y''+qy'-a^2 e^{-2\int q\,dx}.y=0$$

über.

Die für q und r angegebenen Gleichungen lassen sich in anderer Form betrachten. Eliminirt man daraus s, so folgt, wie leicht zu finden,

$$r=\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{2}q'-\frac{1}{4}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2-u'u'+\frac{1}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)' \qquad \ldots(3)$$

Wird nun die Allgemeinheit in der Weise beschränkt, dass man

$$\frac{1}{4}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2+u'u'=0$$

setzt, so folgt

$$\frac{u''}{u'\,u'}=2\sqrt{-1}$$

und erhält man

$$-\frac{1}{u'}=2(x+b)\sqrt{-1}$$

wenn b die Constante der Integration bezeichnet.

Da nun weiter

$$u=\frac{\sqrt{-1}}{2}\log(x+b)\,,\quad \frac{u''}{u'}=-\frac{1}{x+b}$$

folgt, so ergibt sich aus (3) für r die Bedingung:

$$r = \frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{2} q' + \frac{1}{2(x+b)^2}$$

und da

$$\frac{s'}{s} = -\frac{1}{2} q - \frac{1}{2} \cdot \frac{u''}{u'} = -\frac{1}{2} q + \frac{1}{2(x+b)}$$

so ist

$$s = e^{-\frac{1}{2}\int q\,dx} \cdot \sqrt{x+b}$$

Der Gleichung

$$y'' + qy' + \left[\frac{1}{4} q^2 + \frac{1}{2} q' + \frac{1}{2(x+b)^2}\right] y = 0$$

entspricht daher das Integral

$$y = \sqrt{x+b} \,.\, e^{-\frac{1}{2}\int q\,dx} [C_1 \cos(\log \sqrt{x+b}) + C_2 \sin(\log \sqrt{x+b})]$$

Das zur Annahme $q = 0$ gehörige Beispiel

$$y'' + \frac{1}{2(x+b)^2} y = 0$$

$$y = \sqrt{x+b} [C_1 \cos(\log \sqrt{x+b}) + C_2 \sin(\log \sqrt{x+b})]$$

kann als einfachster Fall zur Verification dienen.

Wenn in der Gleichung (3)

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{u''}{u'}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{u''}{u'}\right)' = 0$$

gesetzt wird, so ist es leicht, diese Gleichung einmal zu integriren; man erhält nämlich, wenn a die willkürliche Constante dieser Integration bezeichnet:

$$\frac{u''}{u'^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2} a$$

woraus, wenn man nochmals integrirt

$$\frac{1}{\sqrt{u'}} = ax+b\,, \quad u' = \frac{1}{(ax+b)^2}$$

gefunden wird. Aus (3) folgt nun

$$r = \frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q' - \frac{1}{(ax+b)^4}$$

und da

$$\frac{s'}{s} = -\frac{1}{2}q + \frac{a}{ax+b}$$

folglich

$$s = (ax+b)\,e^{-\frac{1}{2}\int q\,dx}$$

ist, so hat man das Resultat:

Das Integral der Differentialgleichung

$$y'' + qy' + \left[\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{2}q' - \frac{1}{(ax+b)^4}\right] \cdot y = 0$$

ist

$$y = (ax+b)\,e^{-\frac{1}{2}\int q\,dx}\left[C_1\, e^{\frac{1}{a(ax+b)}} + C_2\, e^{-\frac{1}{a(ax+b)}}\right]$$

Für $q = 0$ wird man auf ein am Schluss des Art. 7 bemerktes Beispiel zurückgeführt.

12.

Von den Bemerkungen des vorigen Art., insbesondere von der Gleichung (2) lassen sich noch andere Anwendungen machen. Man kann nämlich aus ihr unter verschiedenen auf r und q sich beziehenden Voraussetzungen, analog wie in früheren Fällen, die entsprechende Abhängigkeit der Function s von x ableiten.

Da

$$s'' + qs' = e^{-\int q\,dx} \cdot \frac{d\left(s' e^{\int q\,dx}\right)}{dx}$$

so kann die Gleichung (2) in der Form:

$$s' e^{\int q\,dx} \cdot \frac{d\left(s' e^{\int q\,dx}\right)}{dx} + r s s' e^{2\int q\,dx} = -a^2 \frac{s'}{s^3} \qquad \ldots (1)$$

geschrieben werden, aus welcher man, wenn

$$r = \frac{\varphi'(s)}{s} \cdot e^{-2\int q\,dx}$$

gesetzt wird, durch Integration die Gleichung

$$\left[s' e^{\int q\,dx}\right]^2 + 2\varphi(s) = \frac{a^2}{s^2}$$

findet. Eine Integrationsconstante braucht nicht beigefügt zu werden, da man sie als in $\varphi(s)$ enthalten betrachten kann. Aus der letztern Gleichung folgt nun:

$$\int \frac{s\,ds}{\sqrt{a^2 - 2s^2\varphi(s)}} = k + \int e^{-\int q\,dx}\,dx$$

Kann hieraus s für eine angenommene Form von $\varphi(s)$ gefunden werden, so ist das Integral der Differentialgleichung

$$y'' + qy' + \frac{\varphi'(s)}{s} \cdot e^{-2\int q\,dx} \cdot y = 0$$

durch die Formel

$$y = s\left[C_1 e^u + C_2 e^{-u}\right]$$

gegeben, worin

$$u = a\int \frac{dx}{s^2} \cdot e^{-\int q\,dx}$$

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass dieses Resultat von früheren, theilweise analogen Resultaten verschieden ist. Nur für $q=0$ erhält man wieder die Binet'schen Formeln (Art. 6).

In (1) werde

$$r = t'\varphi'(t)\,.\,\frac{e^{-2\int q\,dx}}{ss'}$$

gesetzt, unter t eine näher zu bestimmende Function von x verstanden. Man erhält dann durch Integration

$$\left[s' e^{\int q\,dx}\right]^2 + 2\varphi(t) = \frac{a^2}{s^2}$$

und hieraus

$$\int \frac{s\,e^{\int q\,dx}\,ds}{\sqrt{a^2 - 2s^2\varphi(t)}} = x + k$$

Wenn daher

$$q = t' f(t) \qquad \text{und} \qquad s = \psi(t)$$

gesetzt wird, so ergibt sich Folgendes:

Wird die Grösse t für gegebene Formen von $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(t)$ aus der Gleichung

$$\int \frac{\psi(t)\psi'(t)\,.\,e^{\int f(t)\,dt}}{\sqrt{a^2 - 2\varphi(t)\,\psi(t)^2}}\,.\,dt = x + k$$

als Function von x bestimmt, so entspricht der Differentialgleichung

$$y'' + t' f(t)\,.\,y' + \frac{\varphi'(t)\,e^{-2\int f(t)\,dt}}{\psi(t)\,\psi'(t)}\,.\,y = 0$$

als allgemeines Integral der Ausdruck:

$$y = \psi(t)\left[C_1\,e^{u} + C_2\,e^{-u}\right]$$

worin

$$u = a\int \frac{\psi'(t)\,dt}{\psi(t)\sqrt{a^2 - 2\varphi(t)\psi(t)^2}}$$

ist.

Es sei beispielsweise

$$\psi(t)^2 = \frac{2}{n+1}\cdot t^{n+1}\,, \quad f(t) = 0\,, \quad a^2 = \frac{2b^2}{n+1}$$

Man hat dann für t die Gleichung

$$\int \frac{t^n\,dt}{\sqrt{b^2 - 2t^{n+1}\varphi(t)}} = (x+k)\sqrt{\frac{2}{n+1}}$$

und der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{\varphi'(t)}{t^n}\cdot y = 0$$

entspricht, wenn

$$u = \frac{n+1}{2}\cdot b\int \frac{dt}{t\sqrt{b^2 - 2t^{n+1}\varphi(t)}}$$

gesetzt wird, das Integral

$$y = t^{\frac{n+1}{2}}\left[C_1 e^u + C_2 e^{-u}\right]$$

Für den Fall $n = 1$ ergeben sich hieraus die Gleichungen von Binet wieder, welche, wie man sieht, hier in einer andern Richtung als früher, wenigstens formell erweitert sind.

Übrigens ist es sehr leicht, eine viel allgemeinere Gleichung dieser Art aufzustellen. Denn setzt man:

$$\psi(t)\,\psi'(t) = \chi'(t)\,, \quad f(t) = 0$$

so folgt, dass, wenn t als Function von x aus der Gleichung

$$\int \frac{\chi'(t)\,dt}{\sqrt{a^2 - 4\varphi(t)\chi(t)}} = x + k$$

bestimmt wird, der Differentialgleichung:

$$y'' + \frac{\varphi'(t)}{\chi'(t)} \cdot y = 0$$

durch den Ausdruck

$$y = \sqrt{\chi(t)} \cdot [C_1 e^u + C_2 e^{-u}]$$

Genüge geschieht, wenn

$$u = \frac{a}{2} \int \frac{dx}{\chi(t)}$$

ist.

Krystallographisch-optische Bestimmungen. III.

Von dem w. M. **Viktor v. Lang.**

(Mit 9 Holzschnitten.)

1. Chlorwasserstoffsaures Äthylendiamin.

Krystalle von Prof. W. A. Hofmann.

Krystallsystem: monoklinisch.

Elemente: $a:b:c = 1\cdot4603:1:0\cdot6465$, $ac = 91°0'$.

Formen: 001, 110, 111.

Normalenwinkel:

	Berechnet	Beobachtet
110.111 =	51°20′	51° 5′
111.001	37 40	
110.001	89 0	89 32
110.00$\bar{1}$	91 0	90 59
110.1$\bar{1}$0	111 18	111 9
111.1$\bar{1}$1	60 32	60 18
111.$\bar{1}$10	76 58	

Fig. 1.

Spaltbarkeit: ausgezeichnet parallel Fläche 001.

Optisches Verhalten: Spaltungsstücke zeigen im Polarisations-Apparate eine optische Axe am Rande des Gesichtsfeldes gegen den stumpfen Winkel *ac* zu; hieraus folgt, dass die Ebene der optischen Axen parallel der Symmetrie-Ebene ist. Gegen die Mitte des Gesichtsfeldes erweist sich der optische Charakter als negativ. Untersucht man die Platte in Glycerin, so sieht man beide optische Axen, welche mit der Normale der zur Fläche 001 parallelen Platte folgende Winkel bilden.

	A 001	B 001
Roth (rothes Glas)	41°18′	64°53′
Gelb (Natriumflamme)	41 35	65 27
Blau (Kupfervitriollösung mit Ammoniak) .	42 55	68 30

Um hieraus die Richtung der Axen im Krystalle selbst finden zu können, muss man den mittleren Brechungsquotienten und den Brechungsquotienten (n) des Glycerins kennen. Für letzteren erhielt ich

	n
Roth. . . .	1·473
Gelb. . . .	1·475
Blau	1·479.

Zur Bestimmung des mittleren Brechungsquotienten (β) der Krystalle wurde ein Prisma verwendet, das parallel der mittleren Elasticitätsaxe war, gebildet durch die Spaltungsfläche und eine künstlich angeschliffene Fläche. Dasselbe gab bei einen brechenden Winkel gleich 52°36′

	Minim. Abl.	β
Roth	39°53′	1·629
Gelb	40 4	1·633
Blau	40 50	1·643.

Mit Hilfe der Werthe von n und β erhält man nun für die Winkel der wahren optischen Axen mit der Normale von (001)

	A 001	B 001
Roth	32°36′	47°40′
Gelb	32 56	48 8
Blau	33 40	49 16.

Die Dispersion ist also für beide Axen gegeben durch $\rho < \upsilon$ und nahezu auch gleich stark. Addirt man die nebeneinander stehenden Zahlen, so erhält man den wahren Winkel der optischen Axen.

	AB	φ
Roth	80°16′	7°32′
Gelb	81 4	7 36
Blau	82 56	7 48

Die mit φ bezeichnete halbe Differenz dieser Winkel gibt jedoch die Neigung der grössten Elasticitätsaxe $\mathfrak{a}$ zur Normale 001. Dieser Winkel wurde auch direct bestimmt mit Hilfe einer zur Symmetrie-Ebene parallel geschliffenen Platte und so der Werth $\varphi = 6°$ gefunden, welcher jedoch weniger genau sein dürfte als der frühere. Doch zeigte diese Platte in Übereinstimmung mit dem eingangs Gesagten, dass die grösste Elasticitätsaxe in den spitzen Winkel der krystallographischen Axen *a*, *c* zu liegen kommt. Das Symbol der optischen Orientirung wird daher für das Licht der Natriumflamme

$$\underline{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}(001) = 7°36' \quad \rho < \upsilon$$

2. Sulfocyanwasserstoffsaures Äthylendiamin.

Krystalle von Prof. W. A. Hofmann.

Krystallsystem: monoklinisch.
Elemente: $a : b : c = 1{\cdot}026 : 1 : 0{\cdot}453$, $ac = 100°40'$.
Formen: 100, 001, 110, 120, $\bar{1}21$.
Normalenwinkel:

	Berechnet	Beobachtet
100.001	= 79°20′	79° 6′
110.100	= 45 16	45 14
110.$\bar{1}$10	= 89 28	
120.100	= 63 39	63 30
120.$\bar{1}$20	= 52 42	52 42
110.$\bar{1}$20	= 18 23	
110.001	= 82 31	
120.001	= 85 17	85 46
$\bar{1}$20.$\bar{1}$21	= 53 31	
$\bar{1}$21.001	= 47 9	47 9
$\bar{1}$21.$\bar{1}\bar{2}$1	= 82 28	

Fig. 2.

Spaltbarkeit: ausgezeichnet parallel Fläche 100.

Optisches Verhalten: Spaltungsstücke in Luft untersucht, zeigen eine optische Axe genau senkrecht zur Spaltungsfläche; die Ebene der optischen Axen ist damit im Einklange parallel zur Symmetrie-Ebene. Man sieht ferner, dass gegen den stumpfen Winkel der krystallographischen Axen a, c die rothe optische Axe und die grössere Elasticitätsaxe liegt. Letztere ist auch ersichtlich die erste Mittellinie und der optische Charakter daher negativ. Die Platte in Glycerin untersucht, zeigt beide optische Axen unter einen Winkel $XY = 59°30'$ und bei starker Dispersion $\rho < \upsilon$.

Um die Neigung der Elasticitätsaxe $\mathfrak{a}$ zur Normale von 001 zu finden, wurde eine Platte parallel der Symmetrie-Ebene geschliffen. Diese gab für den Winkel von $\mathfrak{c}$ mit der Zone [110.100] $25^1/_2°$, so gross muss aber nach dem vorhergehenden auch der halbe wirkliche Axenwinkel sein, da die eine optische Axe senkrecht zur Zone [110.100], die erste Mittellinie $\mathfrak{a}$ aber natürlich senkrecht zu $\mathfrak{c}$ ist. Somit hat man für den wirklichen Winkel der optischen Axen

$$AB = 51°0'.$$

Da ferner die Winkel XY und AB zusammengehörige Einfalls- und Brechungswinkel sind, so erhält man aus denselben für den mittleren Brechungsquotienten der Krystalle gegen Glycerin

$$\frac{\sin 59°30'}{\sin 51°0'} = 1 \cdot 108$$

und somit mit Rücksicht auf den schon früher gegebenen Werth des Brechungsquotienten von Glycerin für den mittleren Brechungsquotienten der Krystalle gegen Luft

$$\beta = 1 \cdot 635.$$

Hieraus erhält man für eine zur ersten Mittellinie senkrechte Platte als scheinbaren Winkel der optischen Axen in Luft

$$(AB) = 89°20'.$$

Da nach dem Vorhergehenden

$$\mathfrak{a}.100 = \mathfrak{c}[110.100] = 25^1/_2°$$

und

$$001.\mathfrak{a} = 001.100 - \mathfrak{a}.100 = 53°50'$$

ist, so wird das Schema der optischen Orientirung, da $\mathfrak{a}$ in den stumpfen Axenwinkel fällt,

$$(001)\, \mathfrak{b}\underline{\mathfrak{a}} = 53°50' \quad \rho < \upsilon.$$

3. Antimonchlorür $SbCl_3$.

Krystalle von Prof. L. v. Pebal.

Diese Krystalle wurden schon von Herrn H. Topsöe [1] untersucht, welcher sie in das rhombische System einreihte: hiemit stimmen auch meine Beobachtungen überein, nur in den Winkeln zeigen sich Differenzen. Freilich sind meine Winkel nur mit dem Anlegegonimeter gefunden, es scheint mir aber kaum möglich, bei der grossen Zerfliesslichkeit dieser Krystalle, die Winkel auf andere Weise zu messen. Diese Messungsmethode lässt aber wohl grosse Differenzen zu. Nach meinen Messungen hätte man

$$a:b:c = 1:0\cdot795:0\cdot695$$

	Berechnet	Beobachtet	Topsöe	
$011.01\bar{1}$ =	103° 0′	103°	111½°	beobachtet
$101.10\bar{1}$ =	110 26	111½°	114½	„
011.101 =	50 0	51½	45°57′	berechnet.

Optisches Verhalten: Die Krystalle besitzen eine ungeheuer starke Doppelbrechung, so dass erst papierdünne Platten und nur bei Anwendung der Na-Flamme Interferenzcurven zeigen.

Eine Platte senkrecht zur grössten krystallographischen Axe zeigt positiven Charakter, wobei die Ebene der optischen Axen senkrecht zur kleinsten Krystallaxe ist. Dem entsprechend gab eine Platte senkrecht zur mittleren Krystallaxe negativen Charakter. Auf Platten senkrecht zur dritten Richtung konnten gar keine Interferenzcurven erhalten werden, was wohl darauf hinweist, dass dies die Richtung der mittleren Elasticitätsaxe ist.

---

[1] Sitz. Ber. Bd. 66. II. S. 42.

Eine weitere Untersuchung war nicht möglich. Die Orientirung der Elasticitätsaxen wäre somit gegeben durch das Schema

c a b.

4. Chlorzinkammoniak $Zn(H_3N_2)_2Cl_2$.

Krystalle von H. E. Priwoznik.

Es sind dies die schon von Prof. L. Ditscheiner[1] gemessenen rhombischen Krystalle. Derselbe fand

$$a:b:c = 1:0\cdot9523:0\cdot9179.$$

Optisches Verhalten: Die Ebene der optischen Axen ist parallel der Fläche 100, die erste Mittellinie senkrecht zu (001) und der optische Charakter positiv. Somit ist die optische Orientirung gegeben durch

b a c̣.

In Glycerin ist der scheinbare Winkel der optischen Axen gleich 87°30′ und $\rho<\upsilon$. Die Axen können somit nicht mehr in Luft austreten.

5. Salpetersaures Äthylendiamin.

Krystalle von Prof. W. A. Hofmann.

Krystallsystem: triklinisch.
Elemente; $a:b:c = 1:2\cdot540:1\cdot678$.

bc = 91°51′		010.001 = 89° 5′	
ca = 93 26		001.100 = 86 37	
ab = 82 10		100.010 = 97 7	

Formen: 010, 001, 110, 1$\bar{1}$0, 011, 0$\bar{1}$1.
Normalenwinkel:

	Berechnet	Beobachtet
010.001	= 89° 5′	*89° 5′
010.110	= 74 52	*74 52
110.1$\bar{1}$0	= 42 43	
1$\bar{1}$0.0$\bar{1}$0	= 62 25	*62 25

[1] Pogg. Ann. Bd. 142 (1871). S. 467.

	Berechnet	Beobachtet
010.011 =	53°35′	*53°35′
011.001 =	35 30	35 58
001.0$\bar{1}$1 =	36 7	35 45
0$\bar{1}$1.0$\bar{1}$0 =	54 48	55 10
011.0$\bar{1}$1 =	71 37	
110.001 =	86 27	*86 27
1$\bar{1}$0.001 =	87 19	87 48
110.011 =	77 6	

Fig. 3.

Spaltbarkeit: ausgezeichnet parallel Fläche 010.

Optisches Verhalten: auf der Spaltungsfläche sieht man beide Axen, doch ist ihre Ebene schief zur Platte. Die Dispersion der Axen ist anscheinend unsymmetrisch und der optische Charakter negativ.

6. Oxicitraconsäure $C_5H_5(HO)O_4$.

Krystalle von Herrn Th. Morawski.

Krystallsystem: monoklinisch.
Elemente: $a:b:c = 0\cdot8879:1:2\cdot3443$, $ac = 93°54'$.
Formen: 001, 101, $\bar{1}$01, 012, 111, 121, $\bar{1}$11, $\bar{1}$23.
Normalenwinkel:

	Berechnet	Beobachtet
012.001 =	49°28′	50°—
012.01$\bar{2}$ =	80 58	
001.101 =	65 50	65 50′
001.$\bar{1}$01 =	72 42	72 42
101.10$\bar{1}$ =	41 28	41 12
001.111 =	71 29	
001.11$\bar{1}$ =	103 16	
111.11$\bar{1}$ =	31 37	
001.121 =	77 36	
001.12$\bar{3}$ =	117 43	
12$\bar{3}$.121 =	40 7	

Fig. 4.

	Berechnet	Beobachtet
⌈101.111 =	39 2	
101.121 =	58 20	58°20′
⌊111.121 =	19 18	19 —
⌈$\bar{1}$01.111 =	125 37	125 20
$\bar{1}$01.012 =	78 52	
⌊111.012 =	46 45	46 50
⌈101.012 =	74 37	74 30
101.$\bar{1}$23 =	101 54	101 20
101.$\bar{1}$11 =	124 51	
012.$\bar{1}$23 =	27 17	
⌊$\bar{1}$23.$\bar{1}$11 =	22 57	
$\bar{1}$01.$\bar{1}$11 =	40 21	41 20
⌈$\bar{1}$01.121 =	113 21	113 44
$\bar{1}$01.$\bar{1}$23 =	56 26	
⌊121.$\bar{1}$23 =	56 55	57 —

Fig. 5.

7. Monochlorcitraconsäureanhydrid $C_5H_3ClO_3$.

Krystalle von Prof. J. Gottlieb.

Die untersuchten Krystalle waren von Prof. Gottlieb zufällig erhalten, als eine Lösung des Anhydrids in Äther in einem nicht vollkommen verschlossenen Kolben sehr langsam verdunstete; übrigens wurde hiebei der grösste Theil des Anhydrids nur in undeutlichen Krystallen erhalten.

Krystallsystem: rhombisch.

Elemente: $a : b : c = 1 : 0·6421 : 0·4075$.

Formen: 100, 010, 001, 011, 120, 111.

Normalenwinkel:

	Berechnet	Beobachtet
⌈011.001 =	32°24′	*32°24′
⌊011.01$\bar{1}$ =	115 12	115 20
⌈120.100 =	72 12	*72 12
⌊120.$\bar{1}$20 =	35 16	
011.120 =	58 32	59 —

	Berechnet	Beobachtet
[111.100 =	71° 1′	
[111.011 =	18 59	19°24′
111.001 =	37 1	
111.$\bar{1}1\bar{1}$ =	119 6	
111.120 =	54 25	

Fig. 6.

Spaltbarkeit: sehr gut parallel Fläche 100.

Optisches Verhalten: die erste Mittellinie mit positivem Charakter ist senkrecht zur Fläche 001, die zweite Mittellinie senkrecht zur Fläche 010. Das Schema der optischen Orientirung wird daher

$$\mathfrak{b}\;\mathfrak{a}\;\underset{\cdot}{\mathfrak{c}}.$$

Bei starker Doppelbrechung und Dispersion der optischen Axen ist $v < \rho$. In Luft wurde für den scheinbaren Winkel der optischen Axen gefunden

$$(AB) \text{ roth} = 109°10'$$
$$\text{blau} = 75\ \ 5$$

Ein aus den Flächen 011 und 001 gebildetes Prisma von 32°24′, welches der mittleren Elasticitätsaxe parallel ist, gab als Minimum-Ablenkung 19°0′, woraus für den mittleren Brechungsquotienten

$$\beta = 1 \cdot 547$$

und für den wahren Winkel der optischen Axen

$$AB \text{ roth} = 63°34'$$
$$\text{blau} = 46\ \ 24$$

folgt.

8. Saures citraconsaures Natron $NaHC_5H_4O_4$.

Krystalle von Prof. J. Gottlieb.

Prof. J. Gottlieb bemerkt über die Entstehung dieser Krystalle:

„Im Verlaufe meiner neueren Untersuchungen über Abkömmlinge der Citraconsäure habe ich beobachtet, dass das

saure citraconsaure Natrium, welchem die Formel $C_5H_5NaO_4$ zukommt, eine leicht und deutlich krystallisirbare Verbindung ist, während nach älteren Untersuchungen anderer Chemiker dieses Salz nur eine undeutlich krystallinische Masse vorstellen soll. Die Ihnen übergebenen Krystalle dieser Verbindung wurden durch Sättigen einer bestimmten Menge des Säurehydrats mit kohlensaurem Natrium und Zusatz einer, der neutralisirten Säure gleichen Quantität gelösten Hydrats, Eindampfen und einmaliges Umkrystallisiren leicht erhalten. Herr Th. Morawski hat den Natriumgehalt des Salzes bestimmt und zugleich nachgewiesen, dass es kein Krystallwasser enthalte, da es lufttrocken bei 100° C. nur einen höchst geringen Gewichtsverlust erlitt.

0·9025 Grm. des trockenen Salzes gaben 0·1362 Grm. schwefelsaures Natrium, entsprechend 15·09% Natrium. Die obige Formel verlangt 15·13% Natrium.“

Krystallsystem: monoklinisch.

Elemente: $a:b:c = 1{\cdot}8839 : 1 : 1{\cdot}1219$, $ac = 110°46'$.

Formen: 100, 001, 110, $\bar{1}11$.

Normalenwinkel:

Fig. 7.

	Berechnet	Beobachtet
100.001	= 69°14′	68°52′
110.100	= 60 25	*60 25
110.$\bar{1}$10	= 59 10	59 10
001.110	= 79 55	*79 55
00$\bar{1}$.11$\bar{1}$	= 56 25	57 —
110.11$\bar{1}$	= 43 40	*43 40
11$\bar{1}$.100	= 80 16	81 —
11$\bar{1}$.$\bar{1}$11	= 85 14	
11$\bar{1}$.$\bar{1}$10	= 56 11	

Spaltbarkeit: ausgezeichnet parallel Fläche 001.

Optisches Verhalten: Die Ebene der optischen Axen fällt mit der Symmetrie-Ebene zusammen; die erste Mittellinie hat negativen Charakter und ist nur wenig geneigt zur Normale der Spaltungsfläche 001, so dass man auf dieser Fläche beide

optische Axen sieht. Für eine solche Platte wurde in Luft abgelesen

(*A*)	Blau	26°20′
	Roth	27 40
(001)	. . . .	335 40
(*B*)	Roth	296 5
	Blau	290 55
(100)	. . . .	265 ca.

Ein aus den Flächen 100 und 001 gebildetes Prisma, das der mittleren Elasticitätsaxe parallel ist, gab mit Rücksicht auf den angegebenen Winkel 100.001 = 69°14′

	Min. Abl.	β
Roth	57°10′	1·571
Blau	61 10	1·598.

Mit diesen Werthen von β erhält man aus den früheren Zahlen für die Neigungen der wahren optischen Axen zur Normale von 001

	A.001	001.*B*
Roth	29°29′	23°56′
Blau	29 36	26 8

und hieraus für den wirklichen Axenwinkel und den Winkel, welche die erste Mittellinie ($\mathfrak{a}$) mit der Normale 001 bildet

	AB	$\mathfrak{a}$.001
Roth	53°25′	2°46′
Blau	55 44	1 42.

Da die Elasticitätsaxe $\mathfrak{a}$ nach den früheren Zahlen in den spitzen Winkel der Krystallaxen *a* und *c* fällt, so wird schliesslich das Schema der optischen Orientirung

$$\underline{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{b}\,(001) = 2°46' \quad \text{Roth}$$
$$= 1\ 42 \quad \text{Blau.}$$

9. Trichlorbuttersaures Ammonium $NH_4C_4H_4Cl_3O_2$.

Krystalle von Prof. J. Gottlieb.

Krystallsystem: rhombisch.
Elemente: $a:b:c = 1:0{\cdot}9169:0{\cdot}2742$.
Formen: 100, 010, 201, 111.
Normalenwinkel:

Fig. 8.

	Berechnet	Beobachtet
100.010 =	90° 0′	90° 4′
201.100 =	61 16	61 16
201.$\bar{2}$01 =	57 28	
111.100 =	75 16	74 50
111.$\bar{1}$11 =	29 28	
111.010 =	73 54	74 20
111.1$\bar{1}$1 =	32 12	31 —
111.1$\bar{1}$1 =	44 12	
111.201 =	20 50	21 17

Optisches Verhalten: die Krystalle zeigen, durch die Fläche 100 betrachtet, beide optische Axen am Rande des Gesichtsfeldes. Die Ebene derselben ist senkrecht zur Fläche 010, der optische Charakter positiv und $\rho < \upsilon$, somit ist die optische Orientirung gegeben durch

$$\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b};$$

für den scheinbaren Winkel der optischen Axen wurde gefunden

$$(AB) = 96°.$$

10. Monochlorcrotonsaurer Baryt $Ba2(C_4H_4ClO_2) + 4H_2O$.

Krystalle von Prof. J. Gottlieb.

Krystallsystem: monoklinisch.
Elemente: $a:b:c = 0{\cdot}406:1:0{\cdot}509$, $ac = 96°25'$.
Formen: 010, 110, 011.

Normalenwinkel:

Fig. 9.

	Berechnet	Beobachtet
[110.010 =	69°24′	69°44′
[110.1$\bar{1}$0 =	41 12	*41 12
[011.010 =	77 50	77 56
[011.0$\bar{1}$1 =	24 20	*24 20
110.011 =	79 50	*79 50

Die Krystalle, welche äusserst rasch an der Luft verwittern, eignen sich nicht zu genauen Messungen.

Über das Gentisin.

Von H. Hlasiwetz und J. Habermann.

Erste Abhandlung.

Unter den vielen ausgezeichneten und zum Theile seltenen chemischen Präparaten der Wiener Weltausstellung befand sich auch eine grössere Quantität Gentisin (Gentianin), welches Herr H. Tromsdorff eingesendet hatte: eine schöne krystallinische Verbindung, von der man bis jetzt kaum mehr kennt, als die empirische Formel.

Das Gentisin gehört heute noch unter die „corps à sérier" wie sie Gerhardt nannte, die den Anhang aller Lehr- und Handbücher bilden, und unter denen man, Dank unseren erweiterten Anschauungen und verbesserten Methoden, mehr und mehr aufzuräumen beginnt.

Da hier die Vorarbeit einer verlässlichen Fabrik der sehr mühsamen und langwierigen Darstellung eines seltenen Materials überhob, glaubten wir die Gelegenheit, uns in den Besitz des erwähnten Präparates von Trommsdorff setzen zu können, nicht unbenützt lassen zu sollen. Wir konnten demnach über 100 Grm. desselben verfügen, eine Quantität, die den früheren Untersuchern schwerlich zu Gebote stand. Denn allen Angaben nach ist die Ausbeute an diesem Körper, den Henry und Caventon in der Enzianwurzel *(Gentiana lutea)* entdeckten, sehr gering. Baumert erhielt aus 10 Kilo kaum 3 bis 4 Grm. Gentisin und nach dieses Chemikers Vorschrift (Ann. 62, 106) hat Herr Trommsdorff, einer freundlichen Mittheilung zufolge, das Präparat dargestellt.

Baumert widmete dem Gentisin eine sehr sorgfältige Untersuchung, die besonders durch eine zahlreiche Reihe von Verbindungen mit Basen die Formel $C_{14}H_{10}O_5$ festgestellt hat.

Auch wir haben bei der Analyse des Gentisins die dieser Formel entsprechenden Zahlen erhalten.

Für diese Analyse reinigten wir das käufliche Präparat durch neues Umkrystallisiren in der Weise, dass wir dasselbe mit einer grossen Menge Alkohol von 94% bis zum Sieden erhitzten, dann ein wenig Kalilauge bis zur Lösung hinzutröpfelten, filtrirten und das noch heisse Filtrat mit einigen Tropfen Essigsäure versetzten, den dadurch entstandenen Brei feiner, glänzender, schwefelgelber Krystallfäden absaugten, mit Wasser, dem etwas Weingeist zugesetzt war, wuschen, dann auf Fliesspapier lufttrocken werden liessen und endlich bei 120° ganz austrockneten.

Wir erhielten:

	Gefunden	Baumert im Mittel von drei Analysen	$C_{14}H_{10}O_5$
C ...	64·85	65·06	65·11
H ...	4·00	4·16	3·87.

Baumert beschrieb überdies ein Binitro- und Trinitrogentisin.

Die, sowohl von ihm, als auch den früheren Untersuchern, H. Trommsdorf (Ann. 21, 334), und Lecomte (Ann. 25, 200) angestellten Zersetzungsversuche (mit Chlor, Salpetersäure, zweifachchromsaurem Kali und Schwefelsäure, Ätzkali) liessen indess keine Schlüsse auf die Natur dieses Körpers zu.

Die Beschreibung der allgemeinen Eigenschaften des Gentisins ist bei allen Beobachtern übereinstimmend: „Luftbeständige, lichte, lange, blassgelbe, seidenglänzende Nadeln, die bis 250° ohne Zersetzung erhitzt werden können, bei höherer Temperatur theilweise sublimiren, im Wasser fast unlöslich (1 Theil braucht 5000 Theile kaltes Wasser), auch ziemlich schwer löslich im heissen Weingeist sind, aus dem die Substanz am besten umkrystallisirt wird, leicht und mit goldgelber Farbe löslich in wässrigen Alkalien, schwer löslich in Äther, Benzol und ähnlichen Kohlenwasserstoffen.“

Wir fanden durch ein paar Vorversuche bald die zweckmässigste Art, das Gentisin in diejenigen Verbindungen zu zerlegen, welchen es seinen Charakter verdankt.

Es zersetzt sich ohne Schwierigkeit bei einer angemessenen Behandlung mit Ätzalkalien in der Hitze. Wir haben Partien von 10 Grm. in einer, aus der fünffachen Menge Kalihydrat mit wenig Wasser gebildeten Ätzlauge gelöst, diese Lösung in einer Silberschale eingedampft und zuletzt bis zum Schmelzen erhitzt. Bei einer gewissen Concentration scheidet sich eine dunkelgelbe, krümliche Masse einer Kaliverbindung klumpig aus. Weiterhin wird die Masse feuerroth und schmilzt zuletzt mit lichterer, ins Bräunliche ziehender Farbe. Wenn der anfangs gebildete Schaum einsinkt und eine Probe der Schmelze, auf einem Uhrglas in Wasser gelöst, beim Absättigen mit einer Säure keine Ausscheidung mehr gibt, unterbricht man die Operation, löst und übersättigt die etwas überkühlte Masse möglichst schnell mit verdünnter Schwefelsäure.

Von der Schnelligkeit, mit der man diese Operation ausführt, hängt die Reinheit eines der gebildeten Produkte ab, welches in seiner alkalischen Lösung an der Luft unter Annahme einer feuerrothen Farbe sich leicht verändert.

Die saure Flüssigkeit ist schwach bräunlich gefärbt, wird, wenn nöthig, filtrirt und dann mit Äther wiederholt ausgeschüttelt. Der Äther hinterlässt nach dem Abdestilliren und Verdunsten eine bald krystallinisch erstarrende, syrupöse, nach Essigsäure riechende Masse.

In dieser befinden sich drei Verbindungen, die in folgender Weise isolirt werden können. Man löst sie in viel Wasser und treibt in einer mit einem Kühler versehenen Retorte das Flüchtige durch Kochen ab. Das saure Destillat sättigt man mit Ammoniak, concentrirt es stark durch Eindampfen auf dem Wasserbade, filtrirt und versetzt mit einer Lösung von Silbersalpeter. Man erhält ziemlich reichlich das leicht erkennbare Silbersalz der Essigsäure. Die Analyse wies darin einen Gehalt von 64·76% Silber nach. Berechnet ist 64·67%.

Die Flüssigkeit in der Retorte verdankt nun ihre noch stark saure Reaction einer zweiten, nicht flüchtigen Säure. Man sättigt sie, wieder angemessen verdünnt, in der Hitze mit kohlensaurem Baryt ab und filtrirt. Die etwas bräunliche Färbung kann man der Flüssigkeit durch Thierkohle oder durch einige Tropfen Bleizuckerlösung, die sie als braune Flocken fällen, grössten-

theils entziehen. Hat man in letzterem Falle mit einigen Blasen Schwefelwasserstoff den Bleiüberschuss wieder weggenommen, so besitzt die Flüssigkeit nur mehr eine lichtweingelbe Farbe.

Man schüttelt sie nunmehr neuerdings mit Äther tüchtig aus. Dadurch geht die zweite der vorhandenen Verbindungen in Lösung, die nach dem Verjagen des Äthers bald krystallinisch erstarrt. Aus wenig siedendem Wasser umkrystallisirt, bildet sie schwach gefärbte, intensiv süssschmeckende, kleine, meist blättchenartige Krystalle. Alle ihre Eigenschaften und ihre Zusammensetzung liessen keinen Zweifel, dass dieselbe Phloroglucin sei.

Sie verlor beim Trocknen bei 100° 22·40% Wasser. Die Formel $C_6H_6O_3+2H_2O$ verlangt 22·22%. Die getrocknete Substanz enthielt:

	Gefunden	$C_6H_6O_3$
C ...	56·91	57·14
H ...	4·76	4·76.

Die barythaltige, mit Äther vom Phloroglucin befreite Flüssigkeit wird nun mit Schwefelsäure angesäuert und filtrirt. Eine neue Behandlung des Filtrats mit Äther liefert dann auch die dritte und letzte der vorhandenen Substanzen.

Auch sie bleibt nach dem Abdestilliren des Äthers krystallinisch zurück und wird durch mehrmaliges Umkrystallisiren gereinigt. Sie ist im reinsten Zustande farblos, krystallisirt aus verdünnten Lösungen in der Form verwachsener, ziemlich langer Nadeln, aus concentrirteren in dickeren, prismatischen Krystallen. Wir wollen sie

Gentisinsäure

nennen. Sie besitzt einen schwach säuerlichen, adstringirenden Geschmack, löst sich in kaltem Wasser ziemlich reichlich, in warmem Wasser und Alkohol sehr leicht und ist zerfliesslich in Äther. Ein Tropfen der ätherischen Lösung auf einem Uhrglas verdunstet, hinterlässt sie in wawellitartigen Sternchen. Sie ist unlöslich in Benzol. Sie gibt zwei schöne Farbenreaktionen. In ihrer wässerigen Lösung erzeugt Eisenchlorid eine prächtig dunkelkornblumenblaue Färbung, die auf Zusatz von etwas Soda-

lösung schmutzigroth wird. Macht man die wässerige Lösung alkalisch und setzt sie auf einem Schälchen der Luft aus, so wird sie bald feuerroth, zuletzt braun.

Die Gentisinsäure schmilzt bei 197°. Sie krystallisirt ohne Krystallwasser.

Die bei 100° getrocknete Substanz gab folgende Zahlen:

	I	II	$C_7H_6O_4$
C ...	54·53	54·46	54·54
H ...	4·02	4·22	3·89.

Die Säure zersetzt kohlensaure Erden mit Leichtigkeit. Die erhaltenen Salzlösungen färben sich beim Verdunsten bräunlich und geben krystallinische Rückstände.

Wir haben vorläufig nur den Barytgehalt der strahlig krystallinischen Baryumverbindung zur Controle der obigen Formel bestimmt und fanden 30·11% Baryum. Die Formel $C_7H_5\overset{I}{b}aO_4$ verlangt 30·92.

Die Formel $C_7H_6O_4$ ist bekanntlich die der Protocatechusäure, der Dioxybenzoësäure, der Oxysalicylsäure und Hypogallussäure.

Die Gentisinsäure ist mit keiner der Vorstehenden identisch.

Pyrogentisinsäure.

Die Gentisinsäure schmilzt, wie bereits angegeben, bei 197° C. Über ihren Schmelzpunkt erhitzt, liefert sie unter Abgabe von Kohlensäure eine neue Verbindung.

Bei der Destillation aus einem Retörtchen erhält man sofort ein zunächst öliges, sehr schnell krystallinisch erstarrendes Destillat, welches, wenn es nicht gleich farblos sein sollte, durch eine neue Destillation ganz leicht gereinigt werden kann.

Die neue Verbindung ist auch gut sublimirbar und bildet nach dieser Reinigungsmethode leichte, glänzende, der Benzoësäure ähnliche, flache Nadeln. Sie hat, wie aus den nachstehenden Analysen hervorgeht, die Formel $C_6H_6O_2$, ist jedoch, wie gleich gezeigt werden soll, auch nicht identisch mit einer der schon bekannten dieser Formel entsprechenden Verbindungen.

	Gefunden I	Gefunden II	$C_6H_6O_2$
C ...	65·04	65·02	65·45
H ...	5·40	5·41	5·45.

Ihre Entstehung ist demnach ausgedrückt durch

$$\underbrace{C_7H_6O_4}_{\text{Gentisinsäure}} = \underbrace{C_6H_6O_2}_{\text{Pyrogentisinsäure}} + CO_2$$

Der Schmelzpunkt wurde im Mittel von vier Bestimmungen zu 169° gefunden. Der Erstarrungspunkt liegt bei 166—167°.

Die Pyrogentisinsäure löst sich in warmem Wasser, Alkohol und Äther sehr reichlich. In kaltem Wasser ist sie nicht allzu löslich. Ihr Geschmack ist schwach süss. Ihre wässerige Lösung gibt weder mit Bleizucker noch mit Bleiessig Niederschläge. Bringt man sie vorsichtig mit einer Eisenchloridlösung zusammen, so bemerkt man manchmal im ersten Moment eine ganz schwache, violette Färbung, die aber sofort wieder verschwindet und wohl nur von einer unwägbaren Spur noch anhängender Gentisinsäure herrühren mag.

Die ganz reine Pyrosäure wird, kann man sagen, von Eisenchlorid nicht verändert.

Eine Fehling'sche Kupferlösung wird, wenn die Lösung der Säure nicht allzu verdünnt war, schon in der Kälte reducirt. Zu ihren charakteristischen Reaktionen gehört ferner die Art, wie salpetersaures Silberoxyd von ihr reducirt wird. Auf Zusatz dieses Reagens verändert sich zunächst in der Kälte die Lösung der Pyrosäure nicht. Beim Erwärmen beschlagen sich die Wände der Eprouvette mit einem grauen, matten, fleckigen Silberhäutchen. Erhitzt man dann bis zum Kochen, so empfindet man den beissenden Geruch des Chinons, die Reduktion vollendet sich, und giesst man hierauf den Inhalt auf ein Uhrglas aus, so findet man das Silber in metallischen Flocken, meistens aber, besonders wenn die Lösung verdünnter war, in flimmernden Kryställchen ausgeschieden.

Wir haben auch gefunden, dass man das Chinon aus der Pyrogentisinsäure sehr leicht erhalten kann, wenn man eine Lösung derselben mit frisch gefälltem Silberoxyd in einer Retorte

kocht, die man mit einem Kühler verbunden hatte. Sehr bald sublimiren dann in den Kühler die gelben Nadeln dieser Verbindung, während ein Theil in der abdestillirenden Flüssigkeit sich gelöst befindet, mit der man alle charakteristischen Chinonreaktionen anstellen kann.

Die am Schlusse folgende Zusammenstellung der Reaktionen der nach den Formeln $C_7H_6O_4$ und $C_6H_6O_2$ zusammengesetzten, bisher bekannten Verbindungen wird zeigen, dass man die Gentisin- und Pyrogentisinsäure mit denselben nicht identificiren kann.

Essigsäure, Phloroglucin und Gentisinsäure sind die drei Produkte, in welche das Gentisin bei der Behandlung mit Ätzkali glatt zersetzt wird.

Voraussgesetzt, dass die Essigsäure nicht, wie in so vielen ähnlichen Fällen, ein nur secundäres Produkt ist, könnte man haben:

$$\underbrace{2C_{14}H_{10}O_5}_{\text{Gentisin}} + O_2 + 4H_2O = \underbrace{2C_6H_6O_3}_{\text{Phloroglucin}} + \underbrace{2C_7H_6O_4}_{\text{Gentisinsäure}} + \underbrace{C_2H_4O_2}_{\text{Essigsäure}}.$$

Die Grösse des Moleculargewichtes hat Baumert durch Verbindungen mit Alkalien festzustellen gesucht.

Er sagt (Ann. 62, 110): „Seiner Natur nach indifferent, verbindet sich das Gentisin mit Säuren wie mit Basen, ohne die Elemente des Wassers abzugeben. Auch die grosse Mannigfaltigkeit seiner Verbindungen, die nicht allein von der Darstellungsweise oder der Quantität der angewendeten Stoffe, sondern in gewissen Fällen sogar von dem öfteren oder selteneren Umkrystallisiren abhängt, spricht für diesen seinen indifferenten Charakter. Obschon es die Kohlensäure aus den löslichen kohlensauren Salzen austreibt, so ist andererseits schon die Kohlensäure der Luft fähig, gewisse Verbindungen des Gentisins, so lange dieselben nicht lufttrocken sind, zu zerlegen. Wenigstens tritt diese Zersetzung überall ein, wenn die Kohlensäure mit dem angewendeten Metalloxyde ein in Bezug auf das Menstruum schwer lösliches Salz bildet.“

Die Verbindungen, welche Baumert erhielt, sind ganz ungewöhnliche. Ihre Formeln sind mit Beibehaltung seiner Schreibweise: [1]

$$C_{28}H_{10}O_{10},\ KO$$
$$5C_{28}H_{10}O_{10},\ 4KO$$
$$2C_{28}H_{10}O_{10},\ KO$$

$$C_{28}H_{10}O_{10},\ NaO$$
$$3C_{28}H_{10}O_{10},\ 2NaO$$
$$7C_{28}H_{10}O_{10},\ 4NaO$$
$$3C_{28}H_{10}O_{10},\ NaO$$

$$C_{28}H_{10}O_{10},\ 2BaO$$

$$C_{28}H_{10}O_{10},\ 4PbO$$

Wir haben nur je eine Kali- und Natronverbindung untersucht, welche wir nach einem, von der Baumert'schen Vorschrift etwas abweichenden Verfahren dargestellt haben. Sie genügten uns zu zeigen, dass das Gentisin Salze nach Art schwacher Säuren gibt, die ganz normal zusammengesetzt sind. Diese Verbindungen halten jedoch hartnäckig Wasser zurück und müssen bei sehr hoher Temperatur (180—200°) getrocknet werden. Baumert trocknete jedoch stets nur bei 100° C.

Wir erhitzten Gentisin mit starkem Alkohol zum Sieden und tröpfelten so lange eine Lösung der ätzenden Alkalien hinzu, bis alles klar gelöst war, dann wurde heiss filtrirt, und falls die Flüssigkeit nicht bald nach dem Auskühlen krystallisirte, wurde sie mit Äther bis zur bleibenden Trübung versetzt.

Man erhält dann, je nachdem mit oder ohne Äther operirt wurde, entweder feine, seidenglänzende, goldgelbe Nadeln oder zu Sternchen verwachsene Krystallgruppen, die aus etwas dickeren, kürzeren, kleinen Prismen bestehen.

Wir fanden folgende Zusammensetzung für diese Verbindungen:

---

[1] Gmelin, 4. Aufl., 7, 2, 1110.

	Iypogallussäure iesson u. Foster ıal. Suppl. 1. 333	Gentisinsäure
Krystallform	nadelförmige Kry-	Nadeln und solide Prismen.
Krystallwass	roc.	Wasserfrei.
Schmelzpunk	?	197°.
Geschmack		Säuerlich adstringirend.
Verhalten gegen Eisenchl	v blau, durch Am- ık blutroth.	Schön tiefblau, durch doppelt-kohlensaures Natron schmutzig-roth.
Essigsau trales	?	Keine Fällung.
Salpeter	ısatz von Ammoniak ı in der Kälte redu-	Fällt in der Kälte weisse Flocken, die beim Erhitzen zu grauem Silber reducirt werden.
Alkalisc lösung	?	Wird in der Wärme reducirt.
Luft in Lösung	?	Wird feuerroth, in verdünnter Lösung röthlich, später bräunlich.
Trockne	lzt und sublimirt un- ıtzt.	Gibt Pyrogentisinsäure.
Concent felsäure		Ohne Zersetzung mit gelber Farbe löslich.

Resorcin	Pyrogentisinsäure
Tafeln, oder kurze dicke Säulen.	Benzoësäureartige glänzende Blättchen.
99°.	169°.
Süss, kratzend.	Süsslich.
Violett.	Unverändert.
Keine Fällung.	Keine Fällung.
In der Wärme reducirt.	Beim Kochen unter Chinonbildung reducirt.
Beim Kochen reducirt.	In der Wärme reducirt.
Röthlich, zuletzt braun.	Rothgelb, zuletzt braun.
Gibt eine Sulfosäure.	Ohne Zersetzung löslich.

Gentisinkalium. Bei 180° C. getrocknet.

	$C_{14}H_9KO_5$	Gefunden
C ...	56·74	56·40
H ...	3·04	3·54
K ...	13·20	13·67

Die lufttrockene Substanz ist: $C_{14}H_9KO_5 + H_2O$

	Berechnet	Gefunden
H_2O ...	5·73	5·98

Gentisinnatrium. Bei 180° getrocknet.

	$C_{14}H_9NaO_5$	Gefunden
C ...	60·00	59·63
H ...	3·21	3·59
Na ...	8·21	8·59

Das lufttrockene Salz ist: $C_{14}H_9NaO_5 + 2H_2O$

	Berechnet	Gefunden
H_2O ...	11·36	12·00

Acetyl-Gentisin. Lässt man Gentisin mit Acetylchlorid an einem Rückflusskühler kochen, so löst es sich allmälig unter Entfärbung ganz auf und nach dem Abdestilliren des überschüssigen Chlorids hinterbleibt im Kölbchen eine silberglänzende, wawellitartig erstarrte Krystallmasse. Man bringt diese am besten zuerst auf eine poröse Platte und krystallisirt sie hierauf aus viel siedendem Alkohol um.

Das Filtrat krystallisirt während des Erkaltens zu haarfeinen, verworrenen Krystallfäden, die absolut farblos sind und zuletzt die ganze Flüssigkeit breiig erfüllen. Das getrocknete Acetyl-Gentisin bildet eine sehr hübsche, atlasglänzende, verfilzte, blendendweisse Krystallmasse. Es wird beim Zerreiben ausserordentlich elektrisch. Der Schmelzpunkt wurde bei 196—196·5, der Erstarrungspunkt bei 192—193° gefunden.

Die Analyse ergab die Zusammensetzung $C_{14}H_8O_5(C_2H_3O)_2$.

	$C_{14}H_8O_5(C_2H_3O)_2$	Gefunden I	Gefunden II
C	63·15	62·91	63·13
H	4·09	4·28	4·27

Wir behalten uns für eine zweite Mittheilung vor, eine Constitutionsformel des Gentisins zu entwickeln. In dieser werden wir auch noch einmal ausführlicher auf die Eigenthümlichkeiten der Gentisinsäure und Pyrogentisinsäure eingehen müssen.

Beide Verbindungen beanspruchen ein nicht gewöhnliches Interesse schon darum, weil durch sie die Zahl der Isomeren von den Formeln $C_7H_6O_4$ und $C_6H_6O_2$ wieder vermehrt wird, während doch nach den heutigen Ansichten die Formel $C_6H_6O_2$ eine vierte Verbindung (ausser Resorcin, Hydrochinon, Brenzcatechin) nicht mehr zulässt, vorausgesetzt, dass sie von einem Benzolkern mit der gewöhnlichen Bindungsweise des Kohlenstoffes abgeleitet sein sollte.

Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium der Universität Innsbruck.

20. Über die Constitution der Dioxybenzoësäure.

Von L. Barth und C. Senhofer.

In unseren früheren Arbeiten über die Dioxybenzoësäure haben wir mehrerer Versuche erwähnt, die Constitution dieser Verbindung aufzuklären.

Es ist uns dies damals nicht vollständig gelungen und wenn wir auch heute noch kein unbestreitbares Resultat vorlegen können, so scheinen uns doch die ermittelten Thatsachen der Mittheilung werth.

Nachdem wir auf keine andere Weise gut verwendbare Anhaltspunkte erlangen konnten, blieb noch der Versuch auszuführen, aus der Disulfobenzoësäure, der Muttersubstanz der Dioxybenzoësäure durch Destillation ihres Kalisalzes mit Cyankalium, unter gleichzeitiger Eliminirung der Carboxylgruppe, ein Dicyanbenzol zu erzeugen, das nach Verwandlung in eine der bekannten Phtalsäuren Aufschluss über die relative Stellung der SHO_3 Gruppen in der Disulfosäure, resp. der Hydroxyle in der Dioxysäure geben und daher die Constitution der letzteren in so ferne klarlegen musste, als wir schon früher die Stellung des Carboxyls zu einem der Hydroxyle durch Überführung der Sulfosäure mittels ameisensauren Kalis in Isophtalsäure dargethan hatten und verschiedene Combinationen von vorneherein ausgeschlossen waren.

Destillirt man disulfobenzoësaures Kali mit der entsprechenden Menge Cyankalium, so erhält man ein schon im Retorten-

halse erstarrendes Sublimat, krystallinisch, von bittermandelartigem Geruche, das grösstentheils farblos ist und nur an den der heissen Retorte zunächstliegenden Theilen gelblich gefärbt erscheint. Nach gehöriger Reinigung durch Umkrystallisiren und Sublimiren wurde der Geruch fast nicht mehr bemerkbar und zeigte sich vornehmlich nur beim Kochen der wässerigen Lösung.

Der Schmelzpunkt der Substanz lag bei 158—159°. Zu gleicher Zeit stellten wir aus Benzol Benzoldisulfosäure nach Hofmann und Buckton dar und verwandelten das Kalisalz derselben durch Destillation mit Cyankalium in das bekannte Dicyanbenzol. Eine Vergleichung beider Substanzen zeigte sofort ihre Identität.

Beide zeigten gleiche Löslichkeitsverhältnisse, gleiche Krystallform und vollkommen gleichen Schmelzpunkt. Beide sublimiren schon vor dem Schmelzen, beide sind in kochendem Wasser etwas löslich und scheiden sich beim Erkalten in baumartig verästelten, sehr feinen Krystallgebilden aus, beide sind endlich mit Wasserdämpfen flüchtig. Da man nun wohl mit Gewissheit annehmen konnte, die beiden Cyangruppen seien statt der Schwefelsäurereste eingetreten, so war, natürlich abgesehen von Umlagerungen während der Reaction, die Stellung der Hydroxyle in der Disulfobenzoësäure bestimmt, denn beide Forscher, welche das Dicyanbenzol erhalten hatten, Irelan und Garrick, erhielten daraus nach dem Kochen mit Ätz-Kali Terephtalsäure.

Darnach wäre, wie wir früher selbst annahmen, die Disulfo-, also auch die Dioxybenzoësäure 1, 3, 6 (mit 1 die Stelle der Carboxylgruppe bezeichnet). Der Vorsicht halber stellten wir jedoch auch aus unserem Dicyanbenzol die entsprechende Benzoldicarbonsäure dar, welche nach dem Ansäuern der kalischen Lösung als weisses Pulver herausfiel. Als wir die Säure reinigen wollten, fiel uns sofort auf, dass dieselbe in Äther durchaus nicht unlöslich, vielmehr ziemlich löslich sei, und wir wurden dadurch veranlasst, weitere Vergleiche anzustellen.

Zunächst nun ergab sich eine ziemliche Löslichkeit unserer Säure im kochenden Wasser, ja in Alkohol war dieselbe geradezu leicht löslich. Nach diesen Erfahrungen dachten wir zunächst

uns durch eine Elementar-Analyse von der Zusammensetzung der Säure zu überzeugen.

Dieselbe führte aber unzweifelhaft zur Formel $C_8H_6O_4$.

	Gefunden	Berechnet
C	57·84	57·83
H	3·61	3·61.

Der Körper war demnach wirklich eine der isomeren Phtalsäuren.

Nach mehrmaligem Umkrystallisiren aus Wasser, zuletzt aus salzsäurehaltigem, erschien er in der Form haarfeiner, 2—3 Linien langer Nädelchen, welche einen Schmelzpunkt über 300° besassen und nach dem Absättigen mit Baryt ein Barytsalz lieferten, das in Wasser leicht löslich war und in hübschen, wohlausgebildeten flachen Nadeln krystallisirte. Dasselbe enthielt 3 Mol. Krystallwasser.

	$C_8H_4BaO_4+3H_2O$	Gefunden
H_2O	15·21	14·98—15·02.

Darnach musste die Säure als Isophtalsäure angesprochen werden.

Um jeden Zweifel zu beseitigen, stellten wir das Silbersalz dar und daraus durch Erwärmen mit Jodmethyl den Methyläther. Nach dem Umkrystallisiren aus verdünntem Alkohol erschien er in prachtvollen, farblosen, langen, verfilzten Nadeln, die einen Schmelzpunkt von 64° zeigten. Dadurch war die Identität unserer Säure mit Isophtalsäure unzweifelhaft festgestellt. Wir konnten demgemäss für unsere Disulfo- und Dioxybenzoësäure die Stellung 1, 3, 5 annehmen, vorausgesetzt, dass die jetzt gewöhnlichen Annahmen über die Constitution der Isophtalsäure richtig waren. Da wir nun aber, wie Eingangs bemerkt, unser Dicyanbenzol als identisch mit dem von Irelan und Garrick früher dargestellten erkannt hatten, so schien es uns von hohem Interesse, das von den genannten Forschern als Terephtalsäure bezeichnete Product der Einwirkung von ätzendem Kali auf das Dicyanbenzol aus Brombenzolsulfosäure und Benzol-Disulfosäure nochmals darzustellen und seine Eigenschaften zu constatiren.

Disulfobenzoësaures Kali, das in der Kalischmelze fast die theoretische Menge Resorcin lieferte (90—95 Perc.), mit Cyankalium erhitzt, lieferte uns wiederholt ein Dicyanbenzol vom Schmelzpunkte 158—159° von anfangs bittermandelartigem, später verschwindendem Geruche.

Beim Kochen mit Kalilauge entweicht viel Ammoniak und Salzsäure fällt aus der gelblichen Lösung, eine weisse Säure in Flocken, die sich in heissem Wasser und Äther nicht schwierig lösten, nach mehrmaligem Umkrystallisiren, vornehmlich aus saurem Wasser, feine Nadeln darstellten, über 300° schmolzen und durch die Elementaranalyse als nach der Formel $C_8H_6O_4$ zusammengesetzt erschienen.

	Gefunden	Berechnet
C	57·99	57·83
H	3·52	3·61

Die Säure lieferte ein leicht lösliches Barytsalz von den Formen des isophtalsauren Baryts, das mit 3 Mol. Krystallwasser anschoss.

	Gefunden	Berechnet
H_2O	15·00	15·21

Der Methyläther auf bekannte Weise dargestellt krystallisirte in farblosen, langen Nadeln und zeigte einen Schmelzpunkt von 64°. — Die Säure war demnach ebenfalls Isophtalsäure.

Wir haben zum Überfluss noch Terephtalsäure aus Terpentinöl dargestellt und uns durch directen Vergleich der Krystallform und der Löslichkeitsverhältnisse der freien Säure, sowie der sehr grossen Schwerlöslichkeit und des Krystallwassergehaltes des Barytsalzes (4 Mol.) und endlich durch den Schmelzpunkt des Methyläthers von der Verschiedenheit derselben mit den von uns als Isophtalsäure erkannten Verbindungen überzeugt.

Wenn es uns gestattet ist, eine Vermuthung auszusprechen, warum Irelan sowohl als Garrick die Säure aus Dicyanbenzol für Terephtalsäure angesprochen haben, so glauben wir den Grund darin suchen zu dürfen, dass diese Chemiker mit nicht allzugrossen Mengen von Substanz gearbeitet haben, und durch die damals als sicher angenommene 1. 4. Stellung des

Resorcins und die scheinbare Schwerlöslichkeit der als kaum krystallinisches Pulver ausgeschiedenen Säure zu der irrigen Annahme geführt wurden. Durch die directe Verknüpfung von Resorcin und Isophtalsäure ist ein Widerspruch beseitigt, der nach der jetzt unhaltbar gewordenen Parastellung des Resorcins bisher bestand und auf den schon Fittig und Armstrong hingewiesen haben. Ob aber damit auch schon die 1.3. Stellung der genannten Verbindungen als sicher angenommen werden darf, muss noch dahin gestellt bleiben.

Abgesehen von anderen in neuerer Zeit aufgedeckten Widersprüchen, die Ortsbestimmungen der aromatischen Reihe betreffend, wollen wir nur auf einzelne verweisen, die sich aus unseren Arbeiten ergeben. In unseren Abhandlungen über Dioxybenzoësäure haben wir aus den dort angeführten Gründen, namentlich wegen der leichten Überführbarkeit der Monobromdioxybenzoësäure in Gallussäure, für erstgenannte Säure die Stellungen 1, 2, 3 oder 1, 3, 6 als die wahrscheinlichsten hervorgehoben und von diesen beiden wieder der letzteren den Vorzug gegeben. Es gründete sich dies darauf, dass Gallussäure aus Dijodsalicylsäure und Bromprotokatechusäure (wie in einer späteren Abhandlung gezeigt werden soll, auch aus Dijodparaoxybenzoësäure) dargestellt werden konnte. Somit mussten, wie wir schon früher hervorhoben, in der Gallussäure die Hydroxyle die Stellungen 2, 3, 4 oder 3, 4, 6 zu Carboxyl (dieses bei 1 angenommen) besitzen. Durch die nun neuerlich wahrscheinlich gemachte Stellung der Hydroxyle in der Dioxybenzoësäure war diese Schlussfolgerung aber angefochten und man musste zur Erklärung eine Umlagerung während einer der Reactionen annehmen. Es scheint nun allerdings, dass die Einwirkungen von Cyankalium und ameisensaurem Kali keine recht glatt verlaufenden sind.

Die Temperatur ist dabei gewöhnlich sehr hoch, die Ausbeute an der zu erwartenden Substanz meistens sehr weit von der der Theorie nach gegebenen Menge entfernt. Andererseits können doch auch, wenigstens in einzelnen Fällen Bedenken gegen die Kalischmelze erhoben werden. Vor allem bleibt es auffallend, dass diese Reaction manchmal ganz versagt oder nur sehr geringe Mengen des gehofften Productes entstehen lässt, so

bei Phenoldisulfosäure, Dibrom- und Dijodphenol, der sog. Phenolparasulfosäure, der Sulfosalicylsäure etc.; häufiger allerdings geht dieselbe merkwürdig glatt, fast ohne irgend welche Nebenproducte und bei relativ niedriger Temperatur vor sich, so bei Disulfobenzoësäure, Dijodparaoxybenzoësäure, Monobromdioxybenzoësäure, Monojodparaoxybenzoësäure, Bromanissäure, Sulfanissäure, Benzoldisulfosäure etc. Es scheint danach fast, als ob zur Auslösung derselben noch irgend ein Moment erforderlich wäre, das wir nicht kennen und das trotzdem nöthig ist, von den Reactionen gar nicht zu reden, die beim Überschmelzen eintreten und Körper entstehen lassen, die durchaus nicht erwartet waren, wie der Eine von uns bei anderen Gelegenheiten gezeigt hat. Es ist ferner bemerkenswerth, dass aus so verschiedenen Substitutionsproducten der Oxy- und Dioxybenzoësäuren stets Gallussäure entsteht, und man möchte beinahe die Ansicht bekommen, dass die Lagerung, welche die substituirenden Reste in dieser Verbindung einnehmen, eine solche sei, zu der sie besonders hinneigen und die sie auch einzunehmen trachten, wenn in der ursprünglichen Substanz die betreffenden Stellungen nicht genau so vorhanden waren, mit einem Worte, dass dann eine theilweise Umlagerung eintritt.

Freilich, wenn man der Ascher'schen Säure eine andere Stellung als 1, 2, 4 zuschreiben könnte, so wäre es möglich, diese genannte der Protokatechusäure zu ertheilen.

Oxybenzoësäure und Isophtalsäure werden dann Ortho (1, 2)-Verbindungen, wie dies auch Ladenburg in seiner letzten Arbeit über die Constitution des Benzols für möglich hält, Dioxybenzoësäure 1, 2, 3 und Gallussäure 1, 2, 3, 4.

Nach dem Gesagten wäre eine nähere Untersuchung der Säure von Ascher höchst wünschenswerth, denn jedenfalls können nur Thatsachen die scheinbaren Widersprüche beseitigen.

NACHSCHRIFT.

Nachdem die vorliegende Arbeit bereits beendet war, kamen uns noch nachträglich Zweifel über die Identität der Dicyanbenzole, welche von Irelan und Garrick erhalten wurden.

Obwohl Garrick angibt, dass brombenzolsulfosaures Kali in der Kalischmelze Resorcin liefert und demgemäss eine vollständige Identität der aus Brombenzolsulfosäure und Disulfobenzoësäure dargestellten Dicyanbenzole voraussichtlich bestand, stellten wir doch noch selbst Brombenzolsulfosäure aus Brombenzol und schwach rauchender Schwefelsäure dar, um auch mit dieser Substanz die Versuche von Irelan und Garrick zu wiederholen.

Dabei zeigte sich nun eine sehr bemerkenswerthe Thatsache. Brombenzolsulfosäure liefert mit Kali geschmolzen eine sehr reichliche Ausbeute an Resorcin, wenn auch nicht so reichlich wie Disulfobenzoësäure, mit Cyankalium destillirt jedoch ein Dicyanbenzol, das mit dem aus Disulfobenzoësäure und Benzoldisulfosäure nicht identisch war. Es bildete schon im Retortenhalse schöne lange, glänzende Nadeln, sublimirte beim langsamen Erhitzen, ohne zu schmelzen, beim raschen Erhitzen schmolz es über 200°. Mit Kalilauge gekocht, liefert es, wie Irelan angibt, Terephtalsäure, die durch ihre charakteristischen Reactionen und durch den Schmelzpunkt des Methyläthers, der bei 137° (uncorrigirt) lag, als solche sicher erkannt wurde.

Nach Constatirung dieser Thatsache müssen die in der vorstehenden Abhandlung über die Säure von Irelan durch eine falsche, wenn auch verzeihliche Voraussetzung hervorgerufenen Angaben berichtiget werden.

Es ergibt sich aber aus diesen Versuchen der wichtige Schluss, dass bei den angeführten Reactionen Umlagerungen eintreten können, und wie uns scheint, sind dieselben jedenfalls bei der Destillation mit Cyankalium und nicht bei der mit schmelzendem Kali zu suchen, da die Kalischmelze vortreffliche Ausbeuten, die Destillation mit Cyankalium aber, wenigstens im vorliegenden Falle, nur sehr wenig (kaum 2—3 Proc.) des erwarteten Körpers lieferte.

Innsbruck, im Juli 1874.

21. Über Benzoltrisulfosäure.

Von **C. Senhofer.**

Bisher hatte man aus dem Benzol nur eine Mono- und eine Disulfosäure dargestellt und es erschien von Interesse, zu untersuchen, ob die Reaction, die die Bildung einer Phenoltrisulfosäure veranlasst, nicht auch zur Darstellung einer Benzoltrisulfosäure benützt werden könne.

Der Versuch überzeugte mich bald, dass bei der Einwirkung eines Gemisches von Phosphorsäureanhydrid und Vitriolöl auf Benzol drei Wasserstoffe des letzteren durch drei SHO_3-Gruppen ersetzt werden können.

Das Benzol, dessen ich mich zu meinen Versuchen bediente, war durch Destillation aus benzoësaurem Kalk dargestellt worden.

Nachdem mir ein Vorversuch gezeigt hatte, dass bei einer Temperatur von 180°, bei der die Phenoltrisulfosäure sich bildet, nur Benzoldisulfosäure und zwar die schon bekannte, beim Schmelzen mit Kali Resorcin gebende Verbindung entsteht, wandte ich folgendes Verfahren zur Darstellung der Benzoltrisulfosäure an.

10 Grm. Benzol wurden in einem Kolben unter Abkühlen durch langsames Schwenken in 70 Grm. Vitriolöl gelöst, das dickflüssige Liquidum rasch mit 35—40 Grm. Phosphorsäureanhydrid bis zur vollständigen Lösung in einer Schale verrührt. Die dadurch gebildete zähflüssige Masse wurde in starke Glasröhren eingeschlossen und durch 5—6 Stunden im Luftbade auf 280—290° erhitzt.

Nach dem Auskühlen war der Röhreninhalt gelb gefärbt und über der Hauptmasse hatten sich einige Tropfen flüssiger schwefliger Säure gebildet. Beim Öffnen zeigte sich ein ziemlich starker Druck. Die Masse wurde in Wasser gegossen und die

wässerige Lösung bis zum Verschwinden des Geruches nach schwefliger Säure erhitzt.

Bei den ersten Versuchen arbeitete ich von hier ab direct durch Neutralisation mit Baryumcarbonat auf die Bildung des Barytsalzes hin. Da aber dasselbe wegen seiner geringen Krystallisationsfähigkeit keine Garantie vollkommener Reinheit bot, so zog ich es später vor, die Bildung des Kalisalzes anzustreben, das viel leichter durch Krystallisation zu reinigen ist.

Die kochende wässerige Lösung wurde zu dem Behufe bis zur alkalischen Reaction mit Kalkmilch versetzt, der ausgeschiedene schwefelsaure und phosphorsaure Kalk auf dem Filter gesammelt und nach nochmaligem Auskochen mit Wasser entfernt. Die vereinigten Filtrate, die das Kalksalz der neuen Säure enthalten, versetzte ich bei 100° so lange mit doppelkohlensaurem Kali, bis die Reaction neutral geworden war und fügte dann noch so lange vorsichtig neutrales kohlensaures Kali zu, als noch eine abfiltrirte Probe auf weiteren Zusatz kohlensauren Kalk fallen liess.

Nach Entfernung des Kalkes durch das Filter verdampft man das Filtrat, bis sich an der Oberfläche leichte Krystallansätze zu zeigen beginnen. Beim Auskühlen und längerem Stehen scheidet sich ein grosser Theil des benzoltrisulfosauren Kalis aus, dessen Menge noch durch Eindampfen der Mutterlaugen um ein Bedeutendes vermehrt werden kann. Die vereinigten Krystallisationen wurden öfters aus Wasser umkrystallisirt und zeigten dabei eine ausserordentliche Krystallisationsfähigkeit, zumal wenn die Ausscheidung durch freiwilliges Verdunsten des Lösungsmittels an der Luft oder im Vacuum über Schwefelsäure erfolgte.

20—30 Grammen des Salzes im Wasser gelöst, gaben häufig schiefe Prismen oder Tafeln, deren Querachsen $^1/_2$ Zoll messen. Das Salz entspricht lufttrocken der Formel

$$C_6H_3\begin{cases}SO_3K\\SO_3K\\SO_3K\end{cases} + 3H_2O,$$

es verlor bei 260° getrocknet 11·13 und 10·99%. Wasser für obige Formel berechnen sich 11·11%.

Bei 100° getrocknet, verlor es nur die Hälfte seines Krystallwassers

	Gefunden	Berechnet
$1^1/_2H_2O$	5·48	5·56

Das bei 260° getrocknete Salz gab analysirt folgende Zahlen:

	$C_6H_3S_3O_9K_3$	Gefunden
C	16·67	16·86
H	0·69	0·76
S	22·22	21·91
K	27·08	27·15.

Die Krystalle verwittern bei langem Liegen an trockener warmer Luft allmälig, in heisses Wasser geworfen, werden sie, bevor sie sich lösen, opak.

Weder neutrales, noch basisch essigsaures Bleioxyd erzeugt in ihrer Lösung einen Niederschlag.

Zur Darstellung der freien Säure wurde die wässerige Lösung des Kalisalzes mit einer Lösung von essigsaurem Blei versetzt und darauf so lange Ätzammoniak zugefügt, als dadurch noch ein Niederschlag entstand. Zersetzt man den Niederschlag, nachdem man ihn gut gewaschen, mit Schwefelwasserstoff, so enthält das Filtrat stets neben freier Benzoltrisulfosäure noch Essigsäure (herrührend von dem mitgefallenen sechstelessigsauren Bleioxyd), die dadurch entfernt wird, dass man die Flüssigkeit mit einem Überschuss von kohlensaurem Blei kocht, das zur Trockene verdampfte Filtrat durch wiederholtes Auskochen oder Behandeln im Extractionsapparate mit Alkohol vom essigsauren Blei befreit, den Rückstand mit heissem Wasser anrührt und mit Schwefelwasserstoff zersetzt.

Aus dem Filtrate scheidet sich, nachdem es anfangs auf dem Wasserbade, dann im Vacuum über Schwefelsäure eingeengt wurde, die freie Säure in langen flachen, meist concentrisch gruppirten Krystallnadeln aus, die an der Luft schnell zerfliessen und beim langen Stehen über Schwefelsäure opak werden. Mit Eisenchlorid gibt ihre Lösung keine Farbenreaction.

Der Wassergehalt der Säure lässt sich nicht bestimmen; bei 100° getrocknet, hält sie noch 3 Moleküle Wasser zurück.

Die Analyse ergab:

	$C_6H_3\begin{cases}SO_3H\\SO_3H\\SO_3H\end{cases}+3H_2O$	Gefunden
C	19·35	19·27
H	3·23	3·59
S	25·81	25·41.

Höher erhitzt, zersetzt sich die Verbindung, wird theilweise unlöslich in Wasser und braun, aber selbst bei 130° ist noch nicht alles Wasser weggegangen.

Barytsalz. Versetzt man die Lösung des Kalisalzes mit Brombaryum, so scheidet sich je nach der Concentration der Flüssigkeit schnell oder nach längerem Stehen ein krystallinischer Niederschlag aus, der durch Zugabe von wenig Alkohol bedeutend vermehrt wird. Durch öfteres Lösen im Wasser und Fällen mit Alkohol wurde er gereiniget. Die wässerige Lösung schied die Barytverbindung beim langsamen Verdunsten in kleinen, mit freiem Auge oft nur mehr schwer erkennbaren concentrisch gruppirten Krystallnadeln aus.

Das Salz enthält kein Krystallwasser.

Es gab bei der Analyse folgende Procentgehalte:

	$C_6H_3S_3O_9ba_3$	Gefunden I	Gefunden II
C	13·83	14·08	13·94
H	0·58	0·74	0·91
S	18·44	18·33	—
Ba	39·48	39·61	39·59

Die unter II aufgeführte Analyse war mit einer Substanz ausgeführt worden, die durch directes Behandeln des Gemisches von Phosphorsäure, Schwefelsäure und Benzoltrisulfosäure mit Baryumcarbonat, Eindampfen und Krystallisiren des Filtrates erhalten worden war. Das Salz, auf letztere Weise dargestellt, verlor bei 260° getrocknet 9·49 und 8·90% Wasser, der Formel $C_6H_3S_3O_9ba_3+3H_2O$ entsprechen 9·40%.

Silbersalz. Es wurde dargestellt durch Kochen der freien Säure mit frisch gefälltem Silberoxyd. Aus dem Filtrate schei-

den sich beim Stehen im Vacuum farblose, wohlausgebildete Krystallnadeln aus, die sich am Lichte nur langsam schwärzen.

Bei 180° getrocknet, verlor die Substanz 5·12% Wasser. Der Formel $C_6H_3S_3O_9Ag_3 + 2H_2O$ entsprechen 5·33%.

Die Analyse des getrockneten Salzes ergab folgende Zahlen:

	$C_6H_3S_3O_9Ag_3$	Gefunden
C	11·27	11·53
H	0·47	0·77
Ag	50·70	50·48
S	15·02	—

über 180° erhitzt, schwärzt sich das Salz rasch.

Das Bleisalz, erhalten durch Kochen der wässerigen Lösung der freien Säure mit kohlensaurem Bleioxyd und Einengen des Filtrates auf dem Wasserbade, scheidet sich in feinen Nadeln aus, die in Wasser leicht löslich sind.

Die lufttrockene Substanz entspricht der Formel

$$C_6H_3S_3O_9pb_3 + 2H_2O,$$

sie gab bei 190° getrocknet:

	Berechnet	Gefunden
$2H_2O$	5·44	5·27

Die Analyse des getrockneten Salzes gab folgende Zahlen:

	$C_6H_3S_3O_9pb_3$	Gefunden
C	11·51	11·80
H	0·48	0·78

Das Cadmiumsalz, wie das Bleisalz erhalten, stellt kleine Krystallblättchen vor und ist in Wasser sehr leicht löslich.

Das Kalisalz gibt, mit Ätzkali verschmolzen, einen gut krystallisirenden Körper, der durch Bleiacetat nicht fällbar ist, mit Eisenchlorid eine schwach violette Färbung zeigt. Seine grosse Neigung, sich in eine amorphe, in Wasser unlösliche Verbindung umzusetzen, erschwert seine Untersuchung wesentlich.

Beim Destilliren mit Cyankalium gibt das Kalisalz ein weisses krystallinisches Destillat, das beim Kochen mit Ätzkali eine Säure in kleinen gekreuzten Nadeln liefert, die, nach den Löslichkeitsverhältnissen zu schliessen, übrigens keine der bekannten Tricarbonsäuren sein dürfte. Ich bin mit der Untersuchung der angedeuteten Körper beschäftiget. — Die letzten Mutterlaugen des Kalisalzes geben bei weiterem Eindampfen neben den wohlausgebildeten Krystallen des benzoltrisulfosauren Kalis eine mikroskopisch krystallinische Ausscheidung, die aber nicht vollkommen vom genannten Salze befreit werden konnte und in zu geringer Menge erhalten wurde, um sie in eine zur Analyse taugliche Form bringen zu können.

Zur Kenntniss der Rhabarberstoffe Chrysophansäure und Emodin.[1]

Von Zd. Hanns Skraup.

Im Jahre 1843 stellten Rochleder und Heldt aus der *Parmelia Parietina* die Chrysophansäure zuerst rein dar, und stellten für selbe die Formel $C_{10}H_8O_3$ auf. 1844 wiesen Schlossberger und Döping die Identität dieser mit der gelben krystallisirbaren Substanz in der Rhabarberwurzel nach. Gerhardt erachtete in seinem Lehrbuche die Formel $C_{14}H_{10}O_4$ für wahrscheinlicher, welche auch von Thann 1858 und Rochleder 1869 analytisch bestätigt wurde. 1868 plaidirten Graebe und Liebermann für die Formel $C_{14}H_8O_4$, sich auf die Einführung von zwei Acetyl und zwei Benzoyl in die Chrysophansäure, auf das chinonähnliche Verhalten derselben und den Umstand sich stützend, dass die Chrysophansäure mit Zinkstaub destillirt Anthracen gibt, mit welcher Formel jedoch alle gemachten Analysen, dann die von Hesse, Warren de la Rue und Müller gemachte Wahrnehmung, dass sich beim Schmelzen der genannten Substanz mit Ätzkali Fettsäuren bilden, im Widerspruche standen.

Bei dieser Sachlage nun musste auf die Reinheit der Substanz besonderes Augenmerk verwendet werden und entschloss ich mich daher, die Darstellung aus Rhabarberwurzel selbst vorzunehmen.

Als Material verwandte ich 7 Pfund österreichische Rhabarber, dann zur Vergleichung 1 Pfund russische Kronrhabarber, beide bezogen aus dem Pulverisirungsetablissement des Herrn Stapf zu Innichen in Tirol.

[1] Eine vollständige Zusammenstellung der Literaturangaben findet sich in dem Werke: „Die Pflanzenstoffe“ von Dr. Aug. u. Dr. Theodor Husemann.

Es sei gleich hier bemerkt, dass die österreichische Rhabarber, trotzdem sie viel lichter gefärbt war als die fast rothe russische, relativ mehr Chrysophansäure lieferte, ein Ergebniss, das bei dem namhaften Preisunterschiede der zwei Wurzelsorten besondere Beachtung verdient. Emodin darzustellen gelang mir nicht; die Ausbeute an Chrysophansäure betrug circa 25 Grm. fast ganz reiner Substanz.

Nach verschiedenen Versuchen gelangte ich zu folgendem Darstellungsverfahren, das im Wesentlichen eine Vereinigung der ursprünglichen Rochleder'schen und der Methode de la Rue ist:

Das Rhabarberpulver wird mit dem gleichen Gewichte Salzsäure und so viel Wasser angerührt, dass ein mässig dicker Brei entsteht und unter Rühren zum Kochen erhitzt. Hiedurch wird das von Kubly nachgewiesene Chrysophan gespalten dann aber auch, offenbar durch Zerstörung der Begleitsubstanzen das Filtriren der alkalischen Lösungen, wie sie weiters erhalten, werden, wesentlich erleichtert.

Die braune, deutlich nach Caramel riechende Masse wird nun mit Wasser ausgewaschen, auf Leinwand filtrirt, ausgepresst, getrocknet, neuerlich zerrieben und mit einer alkoholischen Kalilösung wiederholt kalt ausgezogen, bis ein Aufguss nur mehr schwach roth gefärbt wird, welcher Punkt nach drei bis vier Operationen erreicht werden kann.

Die kalische Lösung wird jetzt mit verdünnter Schwefelsäure schwach angesäuert der bei genügender Concentration entstehende gelbe Niederschlag abfiltrirt, und das Filtrat abdestillirt, wobei ein trocken bräunliches, krystallisch schimmerndes Pulver, gemengt mit harzigen Körpern zurückbleibt. Diese zwei Partien, von denen die erste reicher an Chrysophansäure ist, werden nun mit käuflichem Benzol wiederholt heiss extrahirt und durch Abdestilliren orangerothe deutliche Krystalle von körnigem Aussehen erhalten. Bemerkt muss werden, dass selbst nach 10—15maligem Ausziehen immer noch, wenn auch in nur höchst geringer Menge Chrysophansäure abgegeben wird.

Ein Versuch, durch Fällen der kalisch-alkoholischen Lösung mit Kohlensäure Chrysophansäure zu erhalten, und sie dadurch vom Emodin zu trennen, lieferte gleich ein fast reines Produkt,

doch war das Abfiltriren der überaus feinen Krystalle von der dicken Flüssigkeit mit so viel Schwierigkeiten verbunden, dass von einer Verarbeitung grösserer Menge in der Art gar nicht die Rede sein konnte.

Die Warren de la Rue'sche Methode, die Rhabarberwurzel direct im Extraktionsapparate mit Benzol auszuziehen, konnte ich in Ermanglung einer geeigneten Vorrichtung nicht versuchen, glaube aber, dass bei der geringen Adhäsion des Benzols an die Wurzel die oben beschriebene Concentration der Chrysophansäure immer vortheilhaft sein wird.

Zur Trennung des Emodins wurde nach dem Vorschlage von Rochleder das krystallisirte Gemenge wiederholt mit heisser Sodalösung ausgekocht, auch 3 Grm. in Lösung gebracht, die sich aber später als Chrysophansäure erwiesen.

Die rückständige Partie wurde nun wiederholt aus Eisessig umkrystallisirt und so endlich rein goldgelbe blättrige Krystalle erhalten, die unter dem Mikroskop rein erschienen und im Wesentlichen die bisher beschriebenen Eigenschaften der Chrysophansäure zeigten. Einige Richtigstellungen der theilweise widersprechenden Angaben gebe ich weiter unten.

Bei der Elementaranalyse erhielt ich Procentzahlen, die der Gerhardt'schen Formel $C_{14}H_{10}O_4$ nahe kamen, doch nicht genügend übereinstimmten und die im Kohlenstoff um so niedriger wurden, je öfter umkrystallisirt wurde; gleichzeitig ergab sich ein niedrigerer Schmelzpunkt.

Es wurde daher nochmals in Ätzkali gelöst, mit Kohlensäure ausgefällt, was jetzt ganz entsprechend von Statten ging, dann aus Eisessig und endlich absolutem Alkohol krystallisirt und jetzt folgende übereinstimmende Zahlen erhalten:

Die Verbrennungen 1 und 2, dann 3, wurden mit zwei verschiedenen Partien ausgeführt; alle mit Kupferoxyd im Sauerstoffstrome vorgenommen, so auch alle folgenden, bei denen nichts Anderes bemerkt ist.

1. 0·2511 Grm. bei 130° C. 5 Stunden im Vacuum getrocknet gaben 0·6234 CO_2 und 0·0884 H_2O.
2. 0·2610 Grm. bei 130° C. 5 Stunden im CO_2-Strome getrocknet gaben 0·6487 CO_2 und 0·0923 H_2O.

3. 0·2455 Grm. bei 130° C. 5 Stunden im CO_2-Strome getrocknet gaben 0·6101 CO_2 und 0·0871 H_2O.

Der Trockenverlust betrug in allen drei Fällen nur 2 bis 3 Decimilligramm und muss er ganz vernachlässigt werden, da die Chrysophansäure aus dem Schiffchen, wenn auch nur in ganz geringer Menge, sublimirte.

Als einfachste Formel berechnet sich $C_{32}H_{22}O_{10}$.

$C_{32}H_{22}O_{10}$	Berechnet	1	2	3	$C_{14}H_{10}O_4$	$C_{14}H_8O_4$
C_{32} 384	67·84%	67·71	67·77	67·81	69·42	70·00
H_{22} 22	3·88%	3·91	3·92	3·94	4·13	3·33
O_{10} 160	28·28%	—	—	—	26·45	26·67.

Von früher ausgeführten Analysen stimmen folgende am besten mit meinen Resultaten überein:

	Rochleder und Held		Schlossberger und Döping	Pilz
C	67·90	68·09	68·12	68·00
H	4·57	4·60	4·24	4·51

Den Schmelzpunkt fand ich bei 162—164° C. in einem, 165—172° C. in anderem Falle, es stimmten selbst Bestimmungen mit einer und derselben Substanz nicht ganz überein. Die höher (165—172) schmelzende Partie war ganz aschenfrei, möglich, dass ein auch noch so geringer Aschengehalt auf die Höhe des Schmelzpunktes influirt, Analogien liegen ja vor.

Die Chrysophansäure in dieser Reinheit ist in Ammoniak in allerdings geringer Menge löslich, zur vollständigen Lösung muss sie höchst fein zerrieben werden, grössere Krystalle werden kaum angegriffen, welcher Umstand die widersprechenden Angaben erklärt. Auf eine bisher nirgends angegebene Veränderung der ammoniakalischen Lösung bei längerem Stehen komme ich unten zu sprechen.

Die alkalische Lösung mit Zinkstaub gekocht wird nicht klar, sondern scheidet braune Flocken aus, die allerdings bei fortgesetztem Kochen sich zusammenballen und theilweise in den Zinkstaub übergehen. Es gelang mir nicht, das Reductionsprodukt zu erhalten. Die Reduction wurde in einem Kolben vorgenommen, dessen Entbindungsrohr unter verdünnte Schwefelsäure tauchte. Die Erhitzung wurde so lange fortgesetzt, bis jede

Spur einer rothen Färbung verschwand, dann die Schwefelsäure zurücksteigen gelassen und sofort mit Äther ausgeschüttelt. Dieser färbte sich augenblicklich dunkelgelb und hinterliess beim Abdestilliren gelbe, körnige Krystalle, die selbst durch oftmaliges Umkrystallisiren nicht von harziger Beimengung befreit werden konnten, ihrem äusseren Ansehen nach mit unreiner Chrysophansäure übereinstimmten. Natriumamalgam reducirt sehr schwierig, Jodwasserstoffsäure im zugeschmolzenen Rohr bei 170° C. (Habermann'scher Röhrenofen) gar nicht. Chromsäure greift auch bei langem Kochen gar nicht an.

Für die oben aufgestellte Formel spricht weiters die acetylirte Chrysophansäure.

Die Acetylirung wurde mit Essigsäureanhydrid sowohl im Kolben vor dem Rückflusskühler, als auch im zugeschmolzenen Rohr bei 150—160° C. vorgenommen und in beiden Fällen lichtgelbe, ziemlich grossblättrige Krystalle erhalten, die aus Essigsäure leicht rein krystallisirt werden konnten. Die Ausbeute betrug aus 2 Grm. nicht ganz 1 Grm. Der Schmelzpunkt liegt unter vorhergehendem Erweichen bei 195° C. Durch Kochen mit Ätzkali wird das Acetylprodukt leicht zersetzt.

1. 0·2033 bei 115° im CO_2-Strome getr., gaben 0·4946 CO_2 und 0·0796 H_2O.
2. 0·2122 bei 115° im CO_2-Strome getr., gaben 0·5161 CO_2 und 0·0808 H_2O.

$C_{22}H_{20}(C_2H_2O)_2O_{10}$	Berechnet	Gefunden 1	Gefunden 2
C_{36} 432	66·46%	66·35	66·33
H_{26} 26	4·00	4·28	4·22
O_{12} 192	—	—	—

Bromprodukt. Wie ich fand, löst sich die Chrysophansäure ziemlich leicht in Schwefelkohlenstoff und lag es nahe, hierauf die Bromirung zu basiren. Es gelingt jedoch nicht, die Chrysophansäure derart auch bei grossem Bromüberschusse und Erwärmen vor dem Rückflusskühler zu verändern. Leicht geschieht dies jedoch durch Erhitzen mit Brom und Wasser, doch ist die Reindarstellung des Bromproduktes sehr schwer, dies auch nach dem Erhitzen im zugeschmolzenen Rohre bei 100 und

130°. Selbst im letzteren Falle bleibt ein Theil der Chrysophansäure unverändert und bilden sich zwei in verschiedener Höhe gebromte Produkte. Zur Trennung wurde mit Schwefelkohlenstoff fractionirt ausgezogen, wobei schliesslich überaus schwerlösliche granatrothe Krystalle zurückblieben, deren Menge zur weiteren Untersuchung zu gering war. Die zur Krystallisation abdestillirten Auszüge ergaben seidenglänzende Krystalle von der Farbe des Goldschwefels, die leicht verfilzten, im Alkohol, Äther, Benzol, Petroleumäther und Eisessig gleich schwer, am besten in Schwefelkohlenstoff löslich sind, mit Alkalien schwerlösliche beständige Salze von dunkelrother Farbe gaben. Den Brombestimmungen zufolge enthielten, trotzdem das Mikroskop volle Homogenität wies, die ersten Auszüge noch unveränderte Chrysophansäure, die letzten eine höher gebromte Substanz, nur die zwei mittleren erwiesen sich als rein.

0·2878 mit chromsaurem Blei verbrannt gaben 0·3389 CO_2 und 0·0407 H_2O.

$C_{32}H_{14}Br_8O_{10}$	Berechnet	Gefunden
C	32·05	32·12
H	1·16	1·57
Br	52·42	
O	14·37	

Ich verwandte nur 3 Grm. zur Bromirung und konnte bei so geringer Menge eine vollständige Trennung der zwei Bromprodukte, von denen das höher gebromte unstreitig der in Schwefelkohlenstoff fast unlösliche Körper ist, nicht durchgeführt werden.

Wie ich schon oben bemerkte, geht mit der ammoniakalischen Lösung der Chrysophansäure eine interessante Veränderung vor sich. Nach einigem Stehen, insbesondere im directen Sonnenlichte, wird sie violett, endlich nach längerer Zeit rein blau. Auf Zusatz von Säuren fällt ein dunkelblauer Körper zu Boden, der nach dem Trocknen Kupferschiller zeigt. In Ammoniak und fixen Alkalien ist er wieder mit blauer Farbe leicht löslich.

Die Bildung desselben beruht wahrscheinlich auf einem sekundären Processe; denn während nach vollständiger Umwandlung mit Säuren ausgefällt, die obenstehende Flüssigkeit

nur schwach weinroth gefärbt ist, erscheint sie in Zwischenstadien dunkelroth bis gelbroth, eine Erscheinung, die noch unzersetzte Chrysophansäure nicht zeigen würde.

Der Körper ist stickstoffhältig, schmilzt und sublimirt nicht, hinterlässt bei starkem Erhitzen eine sehr schwer verbrennbare Kohle. Ich konnte mir bisher von demselben nur höchst geringe Mengen verschaffen, beabsichtige jedoch seine fernere Darstellung demnächst vorzunehmen.

Durch Vorstehendes dürfte die Formel $C_{32}H_{22}O_{10}$ festgestellt sein. Sie ermöglicht die Angaben Graebe's einerseits, der aus der Chrysophansäure Anthracen gewann und Warren de la Rue's und Müller's, dann die von Hesse andererseits, die beim Schmelzen derselben Substanz mit Ätzkali Fettsäure wahrnahmen, in Zusammenhang zu bringen, der bei den bisherigen Formeln nicht leicht möglich war.

Eine Lagerungsformel aufzustellen, wäre heute ziemlich vage; ich unterlasse dies umsomehr, als ich eine weitere Untersuchung der Chrysophansäure mir vorbehalte.

Emodin.

Dasselbe wurde zuerst von Warren de la Rue und Müller beschrieben, die die Formel $C_{40}H_{30}O_{13}$ aufstellten, dann folgte bloss eine kurze Mittheilung von Rochleder, der insbesondere auf die Löslichkeit des Emodins in Sodalösung hinwies.

Das von mir untersuchte Präparat ist von Herrn Trommsdorf nach den Angaben Rochleder's bereitet, stellt orangerothe, feine Nadeln dar; beim Umkrystallisiren aus Eisessig schossen prachtvoll hochorangefärbige Nadeln an, die sehr leicht verfilzten und sich gegen Lösungsmittel und Agenzien den bisherigen Beobachtungen gemäss verhielten.

Ich machte in dieser Richtung die Erfahrung, dass es in kaltem Wasser absolut unlöslich ist, auch in kalter Essigsäure und kaltem Eisessig schwer, leichtlöslich jedoch in heissem Eisessig und Alkohol ist. Über 200° erhitzt, beginnt es sich zu zersetzen und schmilzt endlich bei 246° zu einer dunkelbraunen Flüssigkeit (Warren fand den Schmelzpunkt bei 250).

1. 0·2493 bei 125° 4 Stunden im CO_2-Strome getrocknet, gaben 0·6036 CO_2—0·0907 H_2O.
2. 0·2374 bei 125° 4 Stunden im CO_2-Strome getrocknet, gaben 0·5736 CO_2—0·0841 H_2O.

Daraus berechnet sich als einfachste Formel $C_{32}H_{24}O_{11}$, die bei der offenbaren Verwandtschaft des Emodins mit der Chrysophansäure um so wahrscheinlicher erscheint.

	Berechnet	1	2	$C_{40}H_{30}O_{13}$
C_{32} 384	65·75	66·05	65·89	66·85
H_{24} 24	4·28	4·04	3·93	4·17
O_{11} 176	29·97	—	—	28·97.

Im zugeschmolzenen Rohr mit Essigsäureanhydrid 3 Stunden auf 170° C. erhitzt, erhielt ich ein in feinen, gelben Nadeln krystallisirendes Acetylprodukt.

Das Emodin gibt ein in gelben Nadeln krystallisirendes Silbersalz, das sich sehr leicht zersetzt. Die Kalk- und Barytsalze sind gleich denen der Alkalien kirschroth, beständig, in Wasser ziemlich schwerlöslich, unlöslich im Überschusse von Kalk-, respective Barytwasser.

Ich habe das Barytsalz durch Fällen einer alkoholischen Emodinlösung mit überschüssigem Barytwasser dargestellt, konnte dasselbe aber, sowie das Acetylprodukt, bisher nicht in genügender Menge rein darstellen, indem ja die ganze mir zu Gebote stehende Menge von Emodin 5 Grm. betrug.

Es ist mir schliesslich eine überaus angenehme Pflicht, Herrn Prof. Rochleder für das meiner Arbeit freundlichst zugewandte Interesse meinen wärmsten Dank auszusprechen.

Wien, Universitätslaboratorium des Prof. Rochleder, Juli 1874.

Über die Reibungsconstante der Luft als Function der Temperatur.

Von **J. Puluj,**

Assistenten an der k. k. Marine-Akademie in Fiume.

Zweite Abhandlung.

(Mit 1 Holzschnitt.)

Die Berechnung meiner nach der Beobachtungsmethode des Prof. v. Lang ausgeführten, in der ersten Abhandlung[1] mitgetheilten Versuche lieferte für die Abhängigkeit der inneren Reibung der Luft von der Temperatur die Formel

$$\eta = \eta_0(1+\alpha\vartheta)^{\frac{2}{3}},$$

worin η_0 den absoluten Werth der Reibungsconstante,

$$\alpha = 0{,}003665$$

den Ausdehnungscoëfficienten und ϑ die Temperatur der Luft bedeutet. Bei jener Berechnung ist es stillschweigend angenommen worden, dass die Luft am Glase nicht gleitet, sondern haftet, dass somit der Gleitungscoëfficient

$$\zeta = \frac{\eta}{E} = 0$$

ist, worin E die Reibungsconstante der Luft an Glas bedeutet. Zu dieser Annahme berechtigen die Resultate der Versuche, welche O. E. Meyer mit Röhren von verschiedenem Querschnitte angestellt hat.

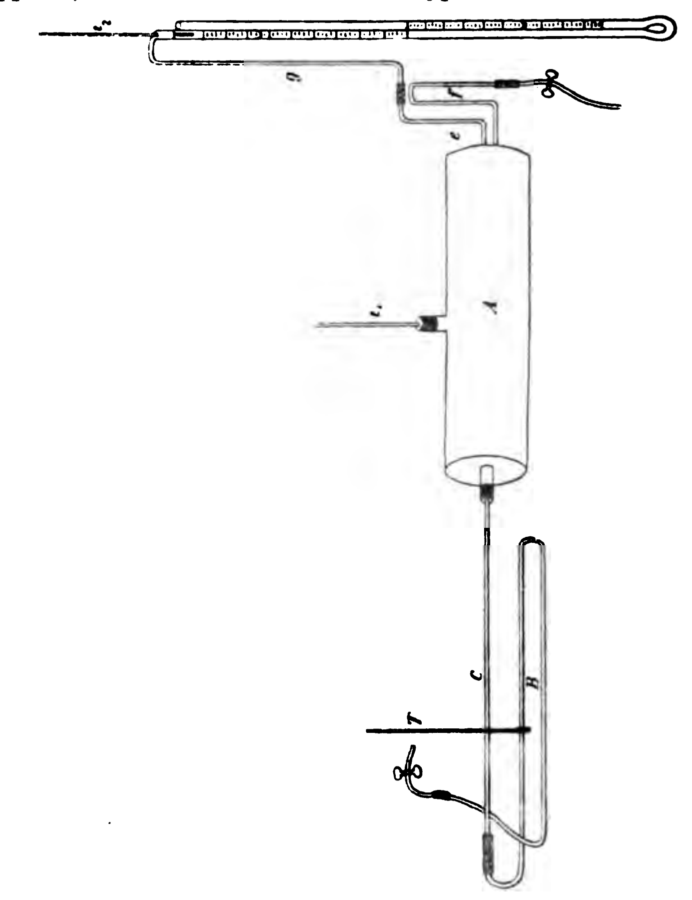
Die Versuchsreihe, welche zur Berechnung jener Formel verwendet wurde, umfasste ein Temperaturintervall von 13°4—27°2 C. Da eine genaue Bestimmung des Abhängigkeitsgesetzes der Luftreibung von der Temperatur ausser dem praktischen auch ein nicht geringes wissenschaftliches Interesse darbietet,

---

[1] Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. II. Abth. Febr.-Heft. Bd. LXIX. Jahrg. 1874.

so entschloss ich mich, die Versuche wieder aufzunehmen und das gewonnene Resultat innerhalb weiterer Temperaturgrenzen zu prüfen.

Zu den neuen Versuchen, die ich ebenfalls im physikalischen Cabinete der Wiener Universität ausführte, diente mir die schon zu meinen ersten Versuchen benützte Capillare, und ein Apparat, der im Wesentlichen vom Apparate des Prof. v. Lang



nicht verschieden ist. Derselbe bestand aus einem cylinderförmigen Gefässe *A* aus Weissblech, in welches die Capillare *C* und ein Thermometer t_1 mittelst Kork und Siegellack eingekittet waren. Die verkitteten Stellen sind noch mit passenden Kautschukröhrchen überzogen und mit Draht fest umsponnen wor-

den, damit bei höheren Temperaturen der weichgewordene Siegellack nicht abfliesse. Bei dieser Art der Verkittung hat sich der Apparat selbst bei einer Temperatur von 91° C. als vollkommen wasserdicht bewährt. Von den zwei am Gefässe angelötheten Bleiröhren diente die eine dazu, um die Luft im Apparate zu verdünnen, die zweite um den letzteren mit dem Wassermanometer, in welches ein Thermometer t_2 eingekittet war, in Verbindung zu setzen. Zwischen der Capillare und dem Trockenapparate war eine 4 Meter lange Bleiröhre *B* eingeschaltet, welche den Zweck hatte, die Luft vor ihrer Einströmung in die Capillare auf eine beliebige Temperatur zu erwärmen. Der ganze Apparat, mit Ausnahme des Manometers und des Trockenapparates, befand sich in einer Wanne unter Wasser. Das Volumen der aus dem Wasser herausragenden Stücke der Bleiröhren *c* und *f*, der gläsernen Verbindungsröhre *g* und der Manometerröhre bis zum Nullstriche war 45·651 CC. Zwischen der Wanne und dem Manometer waren mehrere Schirme von Pappendeckel aufgestellt, um die Erwärmung des Manometers zu verhindern. An beiden Schenkeln des Manometers waren von der Mitte desselben nach entgegengesetzter Richtung Centimeterskalen angebracht. Im Manometer war destillirtes Wasser.

Die Beobachtung geschah auf folgende Weise: Nachdem der Kautschukschlauch zwischen der Bleiröhre *B* und dem Trockenapparate durch einen Quetschhahn festgeklemmt war, wurde durch die Bleiröhre *C*, welche ebenfalls einen Kautschukschlauch mit Quetschhahn trug, die Luft im Gefässe *A* verdünnt und der Kautschukschlauch festgeklemmt. In Folge der Verdünnung der Luft erhob sich das Wasser in einem und fiel im zweiten Schenkel des Manometers. Wurde hierauf der Quetschhahn vor der Bleiröhre *B* aufgemacht, so strömte die Luft, nachdem sie in der Bleiröhre *B* die Temperatur des Wassers angenommen hat, durch die Capillare *C* in das Gefäss *A* ein und in Folge dessen fiel die Wasserkuppe in einem und stieg zugleich im zweiten Schenkel des Manometers. Wenn die Wasserkuppe eine der Beobachtungsmarken

45, 35, 25, 20 Ctm.

passirte, wurde die Zeit in Sekunden notirt. Es wurde nur die Wasserkuppe im fallenden Schenkel beobachtet; die Wasser-

kuppe im steigenden Schenkel stand beziehungsweise bei

45·90 35·85 25·72 20·60 Ctm.

Es waren somit die Höhen der Manometerstände, bei denen beobachtet wurde:

$h = 90{\cdot}90 \quad 70{\cdot}85 \quad 50{\cdot}72 \quad 40{\cdot}60$ Ctm.

Vor jedem Versuche wurde in der Regel 10 Mm. gewartet, bis die in Folge der Verdünnung abgekühlte Luft im Gefässe A wieder die Temperatur des Wassers angenommen hat.

Um die Haltbarkeit des Apparates zu prüfen, wurde beobachtet, ob bei verdünnter Luft im Gefässe A und bei festgeklemmten Kautschukschläuchen der Manometerstand sich ändere.

Die Erwärmung des Apparates geschah mittelst dreier Gasflammen, und dauerte gewöhnlich 3—4 Stunden.

Für das Volumen des fallenden Manometerschenkels ist durch wiederholtes Ausmessen gefunden worden:

von der Marke	45—35	8·674 CC.
„ „ „	45—25	17·545 „
„ „ „	45—20	22·072 „
„ „ „	45— 0	40·631 „

Durch Division der drei ersten Zahlen durch den mittleren Querschnitt

$$q = \frac{22{\cdot}072}{25} = 0{\cdot}88288$$

erhält man:

9·825 19·873 25,

woraus sich die Nothwendigkeit einer Correction der Transpirationszeiten wegen ungleichen Querschnittes des Manometerschenkels ergibt. Die corrigirten Transpirationszeiten sind:

$$t.\frac{10}{9{\cdot}825} = t(1+0{\cdot}017812),$$

$$t.\frac{20}{19{\cdot}873} = t(1+0{\cdot}006391),$$

$$t.\ \frac{25}{25} \ = t.$$

Das Volumen des ganzen Apparates habe ich auf die Weise bestimmt, dass ich in demselben die Luft verdünnte und hierauf beobachtete, um wie viel sich der Druck änderte, wenn der Apparat mit einem bekannten Volumen, in welchem Luft unter einem Atmosphärendrucke stand, in Verbindung gesetzt wurde. Zu dieser Bestimmung benützte ich eine Flasche, deren Inhalt von 1089·94 CC. mittelst cubicirter Röhre ausgemessen wurde. Für das Volumen des Apparates bis zur Beobachtungsmarke 45 im fallenden Manometerschenkel fand ich 2510·89 CC. mit einem mittleren Fehler von 4·65 CC. Diese Ausmessung ist bei 15°4 C. gemacht, und gilt für alle Versuche, die ich im April und Mai angestellt habe. Anfangs Juni ist der Apparat neu verkittet, die alten Kautschukschläuche durch neue ersetzt, und in den fallenden Manometerschenkel ein Thermometer eingekittet worden. Durch wiederholtes Ausmessen mittelst einer Flasche von 3592·2 CC. ergab sich für das Volumen des Apparates bis zur Marke 45 des Manometers 2520·71 CC. mit einem mittleren Fehler von 4·71 CC. Bei dieser Bestimmung war die Temperatur 22°6 C. Bei beiden Messungen waren Flasche und Apparat unter Wasser, das auf die Zimmertemperatur gebracht wurde.

Da die auseinandergesetzte Beobachtungsmethode von der des Prof. v. Lang im Wesentlichen nicht verschieden ist, so wird auch die Theorie der Versuche mit geringer Modification dieselbe bleiben können. Bedeutet v das Volumen Luft im Apparate zu irgend einer Zeit t, gemessen unter dem Drucke p_2, und strömt durch die Capillare in einem sehr kleinen Zeitelemente dt eine unendlich kleine Luftmenge dV ein, so wird zur Zeit $t+dt$ aus v und p_2 beziehungsweise $v+dv$ und p_2+dp_2 und es muss zwischen den veränderlichen Grössen nach dem Boyle-Mariotte'schen Gesetze die Relation bestehen:

$$(v+dV)\,p_2 = (v+dv)\,(p_2+dp_2),$$

oder mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Grösse zweiter Ordnung

$$p_2 dV = v dp_2 + p_2 dv.$$

Die Gleichung ist unter Voraussetzung einer gleichen Temperatur in allen Theilen des Apparates aufgestellt worden. Bedeutet T die Temperatur der Luft vor der Transpiration, t_1

nach der Transpiration in demjenigen Theile des Apparates, der im Wasser sich befindet, und t_2 im übrigen Theile desselben, der aus dem Wasser herausragt, so ist mit Berücksichtigung, dass

$$v_2 = U + u - \frac{q}{2} h$$

ist, worin U das Volumen des Apparates im Wasser, u das übrige Volumen bis zum Nullstriche des Manometers, q den mittleren Querschnitt des Manometerschenkels und h den Wasserstand im Manometer bedeutet,

$$p_2 \frac{dV}{1+\alpha T} = \left(\frac{U}{1+\alpha t_1} + \frac{u - \frac{q}{2} h}{1+\alpha t_2} \right) dp_2 + p_2 \frac{dv_2}{1+\alpha t_2},$$

oder

$$p_2 dV = [\varkappa U + \lambda(u - \frac{q}{2} h)] dp_2 + \lambda p_2 dv_2,$$

worin $\varkappa$ und λ folgende Bedeutung haben:

$$\varkappa = \frac{1+\alpha T}{1+\alpha t_1}, \quad \lambda = \frac{1+\alpha T}{1+\alpha t_2}.$$

Bei der Aufstellung dieser Gleichung ist jedes Volumen auf 0° reducirt worden.

Mit Hilfe des Poisseuille'schen Gesetzes

$$dV = K \frac{p_1^2 - p_2^2}{2p} \cdot dt,$$

welches das während eines Zeitelementes dt durch die Capillare eingeströmte unendlich kleine Luftvolumen angibt, erhält man

$$[\varkappa U + \lambda(u - \frac{q}{2} h)] dp_2 + \lambda p_2 dv_2 = \frac{1}{2} K(p_1^2 - p_2^2) dt.$$

Da ferner in Übereinstimmung mit der ersten Abhandlung

$$p_1 = gbs,$$
$$p_2 = g(bs - h),$$

$$v = U + u - \frac{q}{2} \left(bs - \frac{p_2}{g} \right),$$

und

$$dv = \frac{q}{2g}\, dp_2$$

ist, so erhält man durch Elimination von dv aus der obigen Gleichung

$$2[\varkappa \dot{U} + \lambda(u - \frac{q}{2}\, bs)] \cdot \frac{dp_2}{p_1^2 - p_2^2} + \frac{2\varkappa q}{g} \cdot \frac{p_2 dp_2}{p_1^2 - p_2^2} = K dt,$$

und durch Integration der letzteren und nachherige Substitution der Werthe für p_1 und p_2

$$\log - L . \log (2bs - h) = M - Nt. \tag{I}$$

worin die Constanten folgende Bedeutung haben:

$$L = \frac{2\varkappa U + \lambda(2u - 3gbs)}{2\varkappa U + \lambda(2u + gbs)},$$

$$N = 0{\cdot}86858 . \frac{K gbs}{2\varkappa U + \lambda(2u + gbs)},$$

und

$$K = \frac{\pi R^4}{8\eta\lambda}.$$

Wäre die Gleitungsconstante von Null verschieden, so hätte man statt der letzten Constante

$$K = \frac{\pi R^4}{8\eta\lambda}\left(1 + 4\,\frac{\zeta}{R}\right)$$

zu setzen. M erhält seine Bedeutung aus dem Werthe h für $t = 0$. Die Formel (I) ist mit Brigg'schen Logarithmen zu rechnen.

Wird die Constante L aus den Werthen U, q, b, s, $\varkappa$, λ bestimmt, so können mittelst Methode der kleinsten Quadrate aus den zusammengehörigen Werthen von h und t die Constanten M und N, und aus N die Reibungsconstante η nach der Formel

$$\eta = 0{\cdot}86858\, \frac{\pi R^4}{8\lambda N} \cdot \frac{gbs}{2\varkappa U + \lambda(2u + gbs)} \tag{II}$$

berechnet werden. Aus den correspondirenden Werthen von η und ϑ kann schliesslich nach der Formel

$$\eta = A + B\vartheta$$

auch die Abhängigkeit der Luftreibung von der Temperatur bestimmt werden.

Setzt man η von der Form

$$\eta = \eta_0(1+\alpha\vartheta)^n,$$

worin α den Ausdehnungscoëfficienten der Luft bedeutet, so hat man wegen der Kleinheit von α

$$\eta = \eta_0 + \eta_0 \alpha n \vartheta = A + B\vartheta,$$

woraus sich ergibt

$$\eta_0 = A, \quad n = \frac{B}{\alpha A}. \tag{III}$$

Aus meinen ersten Versuchen fand ich für

$$\eta_0 = 0{\cdot}00017889,$$

und

$$n = 0{\cdot}652776 \pm 0{\cdot}020893,$$

somit für die Abhängigkeit der Luftreibung von der Temperatur

$$\eta = \eta_0(1+\alpha\vartheta)^{\frac{2}{3}}.$$

Die Theorie führt bekanntlich zur Formel

$$\eta = \eta_0(1+\alpha\vartheta)^{\frac{1}{2}},$$

dagegen ergaben die Versuche

von O. Meyer ...... $\eta = \eta_0(1+\alpha\vartheta)^{\frac{3}{4}}$,

„ Maxwell ...... $\eta = \eta_0(1+\alpha\vartheta)$.

Beobachtungen.

Im Folgenden werden drei Versuchsreihen mitgetheilt. Die erste Reihe umfasst die Versuche 1—13, die zweite 14—19 und die dritte 20—33. Bei der Berechnung der zwei ersten Versuchsreihen ist angenommen worden, dass die Temperatur der Luft im Manometerschenkel dieselbe ist, wie die Zimmertemperatur. Bei der dritten Versuchsreihe ist im Manometerschenkel ein

Thermometer eingekittet worden. Die Thermometer t_1 und t_2 wurden mit T verglichen und auf dasselbe reducirt.

In die nachfolgende Aufzählung der Versuche wird aufgenommen:

1. b Barometerstand in Ctm., nicht reducirt;
2. β die beim Barometer abgelesene Temperatur;
3. T Temperatur des Wassers;
4. t_1 Temperatur im Gefässe;
5. t_2 Temperatur im Manometer;
6. z Zimmertemperatur;
7. Mittel aus den beobachteten Transpirationszeiten;
8. dasselbe corrigirt wegen Ungleichheit des Querschnittes des Manometerschenkels;
9. die aus beobachteten Grössen mittelst Methode der kleinsten Quadrate berechnete Relation zwischen Druckhöhen des Wassers im Manometer und der Transpirationszeit;
10. $B-R$ Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung.

Länge der Capillare . . . . . . $\lambda = 155{\cdot}76$ Ct.

Halbmesser der Capillare . $R = 0{\cdot}0197353$ Ctm.

Versuch 1.

14., 15. April 1874. Neun Beobachtungen.

$b = 73{\cdot}79$ $\qquad t_1 = 15°3$ C.

$\beta = 16°7$ C. $\qquad z_2 = 15°3$ C.

14. April	0	364·7	854·3	1182·6
15. „	0	364·7	855·8	1182·8
Mittel	0	364·7	855·0	1182·7
	0	371·2	860·5	1182·7

$$\log h - 0{\cdot}4099198 \log (2000{\cdot}43 - h)$$
$$= 0{\cdot}6142233 - 0{\cdot}000299929 \cdot t$$

$B-R = -1{\cdot}9 \quad +2{\cdot}2 \quad +1{\cdot}4 \quad -1{\cdot}7$

Versuch 2.

16. April. Fünf Beobachtungen.

$b = 73{\cdot}83$ $\quad t_1 = 51^\circ 9$ C.

$\beta = 22^\circ 7$ C. $\quad z = 20^\circ 5$ C.

0	402·0	946·4	1309·0
0	409·2	952·5	1309·0

$$\log h - 0{\cdot}35985 \log (1999{\cdot}347 - h) = 0{\cdot}7784263 - 0{\cdot}0002704398 . t$$

$B-R = -1{\cdot}5 \quad +1{\cdot}4 \quad +2{\cdot}0 \quad -1{\cdot}9$

Versuch 3.

19. April. Zwei Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}93$ $\quad t_1 = 15^\circ 4$ C.

$\beta = 16^\circ 6$ C. $\quad z = 16^\circ 1$ C.

0	369·3	867·5	1202·2
0	375·9	873·0	1202·0

$$\log h - 0{\cdot}4030737 \log (2031{\cdot}376 - h) = 0{\cdot}6336824 - 0{\cdot}00029505 . t$$

$B-R = -1{\cdot}3 \quad +1{\cdot}6 \quad +0{\cdot}7 \quad -0{\cdot}9$

Versuch 4.

21. April. Fünf Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}08$ $\quad t_1 = 15^\circ 6$ C.

$\beta = 17^\circ 5$ C. $\quad z = 17^\circ 0$ C.

0	367·7	861·9	1190·1
0	374·3	867·4	1190·1

$$\log h - 0{\cdot}4037902 \log (2035{\cdot}112 - h) = 0{\cdot}6313211 - 0{\cdot}0002978703 . t$$

$B-R = -2{\cdot}4 \quad +2{\cdot}6 \quad +2{\cdot}3 \quad -2{\cdot}5$

Versuch 5.

Apparat neu verkittet.

22. April. Sieben Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}10$ $t_1 = 53°1$ C.

$\beta = 23°1$ C. $t_2 = 22°8$ C.

0	407·9	954·3	1314·7
0	415·2	960·4	1314·7

$$\log h - 0{\cdot}3517701 \log (2033{\cdot}578 - h)$$
$$= 0{\cdot}8027597 - 0{\cdot}000269143 . t$$

$B-R = -3{\cdot}5 \quad +3{\cdot}7 \quad +3{\cdot}8 \quad -4{\cdot}1$

Versuch 6.

24., 27. April. Acht Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}03$ $t_1 = 15°9$ C.

$\beta = 17°7$ C. $t_2 = 16°9$ C.

0	370·5	869·5	1203·5
0	377·1	875·0	1203·5

$$\log h - 0{\cdot}403643 \log (2032{\cdot}762 - h)$$
$$= 0{\cdot}6339387 - 0{\cdot}000298144 . t$$

$B-R = -8{\cdot}9 \quad -0{\cdot}8 \quad +4{\cdot}2 \quad +5{\cdot}5$

Versuch 7.

27. April. Fünf Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}97$ $t_1 = 53°2$ C.

$\beta = 22°0$ C, $t_2 = 22°0$ C.

0	407·3	961·0	1332·5
0	414·6	967·1	1332·5

$$\log h - 0{\cdot}3509928 \log (2030{\cdot}476 - h)$$
$$= 0{\cdot}8047664 - 0{\cdot}000265603 . t$$

$B-R = -0{\cdot}6 \quad +0{\cdot}6 \quad +0{\cdot}7 \quad -0{\cdot}7$

Versuch 8.

28., 29. April. Neun Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}19$ $t_1 = 15°6$ C.
$\beta = 17°0$ C. $t_2 = 16°2$ C.

0	367·4	860·2	1190·1
0	373·9	865·7	1190·1

$$\log h - 0{\cdot}4004302 \log (2038{\cdot}277 - h) = 0{\cdot}6419975 - 0{\cdot}00029795 . t$$

$B - R = -2{\cdot}1 \quad +2{\cdot}6 \quad +1{\cdot}2 \quad -1{\cdot}7$

Versuch 9.

30. April. Vier Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}49$ $t_1 = 70°2$ C.
$\beta = 22°2$ C. $t_2 = 22°2$ C.

0	439·2	1007·3	1403·3
0	447·0	1013·7	1403·3

$$\log h - 0{\cdot}3279583 \log (2017{\cdot}584 - h) = 0{\cdot}8824904 - 0{\cdot}000252996 . t$$

$B - R = -4{\cdot}8 \quad +8{\cdot}6 \quad -4{\cdot}2 \quad +0{\cdot}4$

Versuch 10.

Das Thermometer t_1 neu eingekittet.

3., 6. Mai. Sieben Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}12$ $t_1 = 13°6$ C.
$\beta = 14°2$ C. $t_2 = 14°5$ C.

0	370·9	871·1	1206·1
0	377·5	876·7	1206·1

$$\log h - 0{\cdot}4074434 \log (2010{\cdot}289 - h) = 0{\cdot}6212963 - 0{\cdot}000294058 . t$$

$B - R = -1{\cdot}5 \quad +1{\cdot}7 \quad +1{\cdot}1 \quad -1{\cdot}3$

Versuch 11.

5. Mai. Fünf Beobachtungen.

$b = 74\cdot12$ $t_1 = 72°5$ C.

$\beta = 18°5$ C. $t_2 = 20°2$ C.

0	446·4	1027·6	1393·1
0	454·4	1034·2	1393·1

$$\log h - 0\cdot3229630 \log (2008\cdot726 - h) = 0\cdot9010356 - 0\cdot000253473 . t$$

$B-R = -10\cdot6 \quad +11\cdot0 \quad +12\cdot4 \quad -12\cdot8$

Versuch 12.

7. Mai. Fünf Beobachtungen.

$b = 74\cdot36$ $t_1 = 76°7$ C.

$\beta = 16°3$ C. $t_2 = 19°0$ C.

0	442·0	1020·6	1384·9
0	449·9	1027·1	1384·9

$$\log h - 0\cdot3066522 \log (2016\cdot033 - h) = 0\cdot9538785 - 0\cdot000254802 . t$$

$B-R = -9\cdot8 \quad +9\cdot9 \quad +12\cdot0 \quad -12\cdot2$

Versuch 13.

11. Mai. Drei Beobachtungen.

$b = 74\cdot24$ $t_1 = 14°7$ C.

$\beta = 16°2$ C. $t_2 = 16°4$ C.

0	368·1	864·4	1197·3
0	374·7	869·9	1197·3

$$\log h - 0\cdot4098236 \log (2012\cdot779 - h) = 0\cdot6134361 - 0\cdot000296478 . t$$

$B-R = -1\cdot1 \quad +1\cdot3 \quad +0\cdot7 \quad -1\cdot0$

Versuch 14.

13. Mai. Der Apparat neu verkittet.

Sechs Beobachtungen.

$b = 73{\cdot}87$ $t_1 = 1°1$ C.

$\beta = 13°6$ C. $t_2 = 13°8$ C.

0	360·7	844·8	1169·0
0	367·1	850·2	1169·0

$$\log h - 0{\cdot}4312489 \log (2003{\cdot}726 - h) = 0{\cdot}5439313 - 0{\cdot}000303692 \, . \, t$$

$B-R = -1{\cdot}9 \quad +2{\cdot}4 \quad +1{\cdot}1 \quad -1{\cdot}5$

Versuch 15.

14. Mai. Acht Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}00$ $t_1 = 14°8$ C.

$\beta = 13°8$ C. $t_2 = 14°2$ C.

0	370·8	873·1	1208·4
0	377·4	878·7	1208·4

$$\log h - 0{\cdot}4006000 \log (2034{\cdot}304 - h) = 0{\cdot}6417229 - 0{\cdot}000293636 \, . \, t$$

$B-R = -1{\cdot}9 \quad +0{\cdot}9 \quad +1{\cdot}7 \quad -0{\cdot}7$

Versuch 16.

15. Mai. Vier Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}61$ $t_1 = 37°$ C.

$\beta = 15°4$ C. $t_2 = 15°9$ C.

0	399·8	933·4	1286·2
0	406·9	939·4	1286·2

$$\log h - 0{\cdot}3693103 \log (2023{\cdot}14 - h) = 0{\cdot}7460133 - 0{\cdot}000275339 \, . \, t$$

$B-R = -3{\cdot}7 \quad +4{\cdot}1 \quad +3{\cdot}4 \quad -4{\cdot}8$

Versuch 17.

16. Mai. Fünf Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}51$ $t_1 = 13^\circ 2$ C.

$\beta = 13^\circ 7$ C. $t_2 = 14^\circ 1$ C.

0	369·8	867·4	1199·5
0	376·4	872·9	1199·5

$$\log h - 0{\cdot}4063861 \log (2021{\cdot}05 - h) = 0{\cdot}6239222 - 0{\cdot}000295635 . t$$

$B-R = -1{\cdot}9 \quad +2{\cdot}2 \quad +1{\cdot}6 \quad -1{\cdot}8$

Versuch 18.

16. Mai. Fünf Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}65$ $t_1 = 28^\circ 6$ C.

$\beta = 14^\circ 4$ C. $t_2 = 14^\circ 9$ C.

0	386·5	902·5	1248·3
0	393·4	908·3	1248·3

$$\log h - 0{\cdot}3808645 \log (2024{\cdot}59 - h) = 0{\cdot}7076776 - 0{\cdot}0002839751 . t$$

$B-R = -2{\cdot}8 \quad +3{\cdot}5 \quad +1{\cdot}3 \quad -2{\cdot}0$

Versuch 19.

17., 19. Mai. Eilf Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}61$ $t_1 = 77^\circ 4$ C.

$\beta = 17^\circ 8$ C. $t_2 = 19^\circ 6$ C.

0	439·3	1020·6	1403·3
0	447·1	1027·1	1403·3

$$\log h - 0{\cdot}3107003 \log (2022{\cdot}26 - h) = 0{\cdot}9390595 - 0{\cdot}0002519348 . t)$$

$B-R = -5{\cdot}6 \quad +6{\cdot}4 \quad +4{\cdot}7 \quad -5{\cdot}8$

Versuch 20.

18. Mai. Fünf Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}57$ $t_1 = 12°7$ C.
$\beta = 13°2$ C. $t_2 = 13°5$ C.

0	368·7	865·8	1196·7
0	375·3	871·3	1196·7

$$\log h - 0{\cdot}4057722 \log (2022{\cdot}86 - h) = 0{\cdot}6257524 - 0{\cdot}000296256 . t$$

$B-R = -1{\cdot}9 \quad +2{\cdot}0 \quad +1{\cdot}9 \quad -2{\cdot}0$

Versuch 21.

9. Juni. Das Thermometer t_1 und die Capillare neu verkittet; Kautschukschläuche durch neue ersetzt; im Manometerschenkel ein Thermometer t_2 eingekittet.

$b = 75{\cdot}35$ $T = 23°7$ C. $t_1 = 25°4$ C. $z = 25°4$ C.
$\beta = 26°4$ C. $t_2 = 25°7$ C.

0	373·5	873·9	1209·2
0	380·2	879·5	1209·2

$$\log h - 0{\cdot}4058342 \log (2039{\cdot}15 - h) = 0{\cdot}6242102 - 0{\cdot}000293341 . t$$

$B-R = -2{\cdot}4 \quad +3{\cdot}0 \quad +1{\cdot}1 \quad -1{\cdot}7$

Versuch 22.

10. Juni. Apparat mittelst Wasserdampf erwärmt. Sechs Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}00$ $T = 71°9$ C. $t_1 = 71°4$ C. $z = 27°3$ C.
$\beta = 28°2$ C. $t_2 = 27°6$ C.

0	427·7	989·8	1353·2
0	435·3	996·1	1353·2

$$\log h - 0{\cdot}3716153 \log (2029{\cdot}01 - h) = 0{\cdot}7388419 - 0{\cdot}000261592 . t$$

$B-R = -7{\cdot}3 \quad +7{\cdot}9 \quad +7{\cdot}5 \quad -8{\cdot}0$

Versuch 23.

11. Juni. Drei Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}18$ $T = 52°4$ C. $t_1 = 52°9$ C. $z = 26°8$ C.
$\beta = 27°0$ C. $t_2 = 27°1$ C.

0	408·1	953·7	1311·9
0	415·4	959·8	1311·9

$$\log h - 0{\cdot}3648905 \log (2034{\cdot}32 - h) = 0{\cdot}7596924 - 0{\cdot}000269787\,.\,t$$

Versuch 24.

11. Juni. Vier Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}11$ $T = 70°1$ C. $t_1 = 69°5$ C. $z = 28°$ C.
$\beta = 28°4$ C. $t_2 = 28°$ C.

0	427·2	984·3	1362·6
0	434·8	990·6	1362·6

$$\log h - 0{\cdot}339035 \log (2031{\cdot}92 - h) = 0{\cdot}8451792 - 0{\cdot}00026019\,.\,t$$

$B - R = -5{\cdot}3 \quad +7{\cdot}8 \quad -0{\cdot}1 \quad -2{\cdot}4$

Versuch 25.

12., 13. Juni. Sechs Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}95$ $T = 61°7$ C. $t_1 = 61°4$ C. $z = 26°4$ C.
$\beta = 26°8$ C. $t_2 = 26°6$ C.

12. Juni	0	417·1	966·8	1339·0
13. „	0	415·7	967·9	1343·2
Mittel	0	416·4	967·3	1341·1
	0	423·8	973·5	1341·1

$$\log h - 0{\cdot}3498871 \log (2027{\cdot}68 - h) = 0{\cdot}8093466 - 0.00026431\,.\,t$$

$B - R = -3{\cdot}4 \quad +5{\cdot}0 \quad -0{\cdot}3 \quad -1{\cdot}4$

Versuch 26.

14. Juni. Vier Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}10$ $T = 41^\circ 8$ C. $t_1 = 41^\circ 6$ C. $z = 23^\circ 6$ C.
$\beta = 23^\circ 4$ C. $t_2 = 23^\circ 7$ C.

0	394·5	925·5	1270·9
0	401·5	931·4	1270·9

$$\log h - 0{\cdot}3742046 \log (2033{\cdot}48 - h)$$
$$= 0{\cdot}7290465 - 0{\cdot}000278374 . t$$
$$B-R = -3{\cdot}6 \quad +3{\cdot}1 \quad +5{\cdot}6 \quad -5{\cdot}1$$

Versuch 27.

15., 16. Juni. Sieben Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}93$ $T = 18^\circ 1$ C. $t_1 = 18^\circ 3$ C. $z = 20^\circ 3$ C.
$\beta = 20^\circ 4$ C. $t_2 = 20^\circ 3$ C.

0	370·2	864·8	1195·9
0	376·8	870·3	1195·9

$$\log h - 0{\cdot}4083927 \log (2029{\cdot}98 - h)$$
$$= 0{\cdot}6167852 - 0{\cdot}000296769 . t.$$
$$B-R = -2{\cdot}9 \quad +3{\cdot}1 \quad +1{\cdot}4 \quad -1{\cdot}8$$

Versuch 28.

15. Juni. Drei Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}97$ $T = 34^\circ 4$ C. $t_1 = 34^\circ 2$ C. $z = 21^\circ 1$ C.
$\beta = 21^\circ 5$ C. $t_2 = 21^\circ 3$ C.

0	389·1	912·2	1263·1
0	396·1	918·0	1263·1

$$\log h - 0{\cdot}3824503 \log (2030{\cdot}66 - h)$$
$$= 0{\cdot}7016952 - 0{\cdot}0002805787 . t$$
$$B-R = -1{\cdot}9 \quad +2{\cdot}0 \quad +0{\cdot}9 \quad -1{\cdot}4$$

Versuch 29.

16. Juni. Sieben Beobachtungen. Mit Wasserdampf erwärmt.

$b = 74{\cdot}74$ $\quad T = 92°7$ C. $\quad t_1 = 92°7$ C. $\quad z = 24°1$ C.
$\beta = 22°8$ C. $\quad t_2 = 25°1$ C.

0	439·7	1025·0	1413·9
0	446·9	1031·6	1413·9

$$\log h - 0{\cdot}2987315 \log (2023{\cdot}95 - h) = 0{\cdot}9778606 - 0{\cdot}000249962 . t$$

$B - R = -4{\cdot}0 \quad +4{\cdot}6 \quad +3{\cdot}2 \quad -3{\cdot}7$.

Versuch 30.

17. Juni. Fünf Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}13$ $\quad T = 91°2$ C. $\quad t_1 = 89°3$ C. $\quad z = 24°7$ C.
$\beta = 24°7$ C. $\quad t_2 = 25°7$ C.

0	439·1	1035·0	1426·4
0	446·9	1041·6	1426·4

$$\log h - 0{\cdot}3032704 \log (2033{\cdot}82 - h) = 0{\cdot}9618749 - 0{\cdot}000247511 . t$$

$B - R = -2{\cdot}4 \quad +1{\cdot}7 \quad +4{\cdot}5 \quad -3{\cdot}9$

Versuch 31.

18. Juni. Drei Beobachtungen.

$b = 75{\cdot}01$ $\quad T = 22°4$ C. $\quad t_1 = 22°7$ C. $\quad z = 23°0$ C.
$\beta = 23°2$ C. $\quad t_2 = 23°0$ C.

0	374·1	882·0	1218·2
0	380·8	887·6	1218·2

$$\log h - 0{\cdot}404006 \log (2031{\cdot}12 - h) = 0{\cdot}6306681 - 0{\cdot}0002908397 . t$$

$B - R = -1{\cdot}4 \quad +1{\cdot}1 \quad +2{\cdot}6 \quad -22.$

Versuch 32.

19. Juni. Sechs Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}78$ $T = 1°5$ C. $t_1 = 1°9$ C. $z = 23°4$ C.
$\beta = 23°6$ C. $t_2 = 23°9$ C.

0	349·5	830·4	1147·6
0	355·7	835·7	1147·6

$$\log h - 0{\cdot}4426338 \log(2024{\cdot}74 - h) = 0{\cdot}5038759 - 0{\cdot}000308888 \, . \, t$$

$B-R = 0 \quad -1{\cdot}1 \quad +2{\cdot}6 \quad -1{\cdot}6$

Versuch 33.

19., 22., 23. Juni. Zehn Beobachtungen.

$b = 74{\cdot}91$ $T = 20°6$ C. $t_1 = 21°0$ C. $z = 22°3$ C.
$\beta = 22°8$ C. $t_2 = 22°5$ C.

0	372·9	873·9	1210·3
0	379·6	879·5	1210·3

$$\log h - 0{\cdot}4076237 \log(2028{\cdot}56 - h) = 0{\cdot}6191213 - 0{\cdot}0002930904 \, . \, t$$

$B-R = -1{\cdot}8 \quad +2{\cdot}3 \quad +0{\cdot}8 \quad -1{\cdot}3$

Berechnung der Reibungsconstante und ihrer Abhängigkeit von der Temperatur.

Mit Berücksichtigung entsprechender Correctionen wegen Temperaturänderung an R und A erhält man nach der Formel II, die entsprechenden Werthe der Reibungsconstante. Wird für die Acceleration, den Ausdehnungscoëfficienten des Glases, den des Quecksilbers und das specifische Gewicht des letzteren beziehungsweise

$$g = 980{\cdot}9 \text{ Ctm.}$$
$$\gamma = 0{\cdot}000008969,$$
$$\alpha = 0{\cdot}00018153,$$
$$s = 13{\cdot}596$$

gesetzt, so liefert die erste Beobachtungsreihe folgende Werthe der Reibungsconstante:

Versuch		ϑ	η
1	14., 15. April	15°3 C.	0·00018153
2	16. „	51·9	19782
3	19. „	15·4	18701
4	21. „	15·6	18563
5	22. „	53·1	0·00020178
6	24., 27. „	15·9	18526
7	27. .	53·2	20408
8	28., 29. „	15·6	18567
9	30. „	70·2	21114
10	3., 6. Mai	13·6	0·00018593
11	5. „	72·5	20948
12	7. „	76·7	20821
13	11. „	14·7	18478

Während dieser Beobachtungsreihe wurden am Apparate kleine Veränderungen vorgenommen, desshalb sollen zur Berechnung der Abhängigkeit der Reibungsconstante von der Temperatur nur die aus nahe aufeinander folgenden Versuchen gewonnenen Zahlen mit einander combinirt werden. Die eingeklammerten Ziffern geben an, aus welchen Versuchen die daneben stehenden Zahlen sich als arithmetisches Mittel ergeben.

Versuch	ϑ	η
[1, 3, 4]	15°4	0·00018472
2	51·9	19782
6	15·9	0·00018526
[5, 7]	53·1	20293
8	15·6	0·00018567
9	70·2	21114
10	13·6	0·00018593
11	72·5	20948
12	76·7	0·00020821
13	14·7	18478.

Je zwei dieser Zahlen η mit den entsprechenden ϑ lieferten für A, B und n Werthe, die ich hier folgen lasse:

$A = \eta_0$	B	n
0·00017919	0·00000035890	0·546501
17771	47500	0·729302
17839	46648	0·713497
18049	39983	0·604429
17922	37790	0·575334.

Daraus ergibt sich für den absoluten Werth der Reibungsconstante

$$\eta_0 = 0{\cdot}00017900,$$

und für n

$$n = 0{\cdot}633812 \pm 0{\cdot}028274,$$

welche Zahlen mit den aus meinen ersten Versuchen gewonnenen Resultaten in sehr guter Übereinstimmung sind. S. 250.

Aus der zweiten Versuchsreihe erhielt ich:

Versuch		ϑ	η
14	13. Mai	1°1 C.	0·00018077
20	18. „	12·7	18561
17	16. „	13·2	18588
15	14. „	14·8	18793
18	16. „	28·6	19210
16	15. „	37·0	19721
19	17., 19. „	77·4	21122

Die Berechnung dieser Zahlen mittelst Methode der kleinsten Quadrate lieferte:

$$A = 0{\cdot}00018102 \pm 0{\cdot}00000036$$
$$B = 0{\cdot}00000039832 \pm 0{\cdot}00000001028.$$

Mit Hilfe der Constanten A und B berechnete ich aus den beobachteten Temperaturen die Reibungsconstanten, und erhielt:

ϑ	η Beobachtet	η Berechnet	$B-R$
1°1 C.	0·00018077	0·00018146	— 69
12·7	18561	18608	— 47
13·2	18588	18628	— 40
14·8	18793	18692	+101
28·6	19210	19241	— 31
37·0	19721	19576	+145
77·4	21122	21185	— 63

und aus den Werthen der Constanten A und B

$$n = 0\cdot600398 \pm 0\cdot0155341,$$

was mit den früheren Resultaten ebenfalls sehr gut übereinstimmt.

Die dritte Versuchsreihe lieferte:

Versuch		ϑ	η
32	19. Juni	1°5 C.	0·00017996
27	15., 16. „	18·1	18538
33	19., 22., 23. „	20·6	18777
31	18. „	22·4	18948
21	9. „	23·7	0·00018826
28	15. „	34·2	19460
26	14. „	41·8	19558
23	11. „	52·4	20146
25	12., 13. „	61·7	0·00020361
24	11. „	70·1	20625
30	17. „	91·2	21338
22	10. „	71·9	20462
29	16. „	92·7	21137.

Bei Versuchen 22 und 29 wurde der Apparat mit Wasserdampf, der sich aus dem in der Wanne kochenden Wasser entwickelte, erwärmt. Die Wanne wurde mit Brettern und Tüchern zugedeckt. Da aber die Temperatur in ungleichen Tiefen der Wanne ein wenig verschieden war, so sind die letzten zwei

Zahlen zur Berechnung von A, B und n nicht benützt worden. Aus der übrigen Reihe von Zahlen ergab sich:

$$A = 0\cdot00018001 \pm 0\cdot00000042,$$
$$B = 0\cdot00000037838 \pm 0\cdot00000000882,$$

und mit Hilfe dieser Constanten aus den beobachteten Temperaturen folgende Tabelle:

ϑ	η Beobachtet	η Berechnet	$B-R$
1°5 C.	0·00017996	0·00018058	— 62
18·1	18538	18686	—148
20·6	18777	18781	— 4
22·4	18948	18849	+ 99
23·7	0·00018826	0·00018898	— 72
34·2	19460	19295	+165
41·8	19558	19583	— 25
52·4	20146	19984	+162
61·7	0·00020361	0·00020336	+ 25
70·1	20625	20654	— 29
91·2	21338	21452	—114.

Schliesslich fand ich für den Exponenten:

$$n = 0\cdot573533 \pm 0\cdot013435.$$

Hier sollen noch die Resultate, zu denen die drei Versuchsreihen führten, zusammengestellt werden:

Reihe	n r
I.	0·633812±0·028274
II.	0·600398±0·015534
III.	0·573533±0·013435.

Mit Berücksichtigung der Gewichte der Bestimmungen erhält man als Endresultat:

$$n = 0\cdot590609 \pm 0\cdot009510.$$

Dasselbe ist noch etwas kleiner ausgefallen als meine erste Bestimmung:

$$n = 0\cdot652776 \pm 0\cdot020893,$$

und es dürfte somit der Potenzexponent der sogenannten absoluten Temperatur auch innerhalb weiterer Temperaturgrenzen den Werth des Bruches $\frac{2}{3}$ nicht übersteigen, und die Abhängigkeit der Reibungsconstante von der Temperatur angenähert gegeben sein durch die Formel:

$$\eta = \eta_0(1+\alpha\vartheta)^{\frac{2}{3}}.$$



Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und von dieser eine erhöhte Auflage in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe werden daher vom Jahre 1862 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen** erscheinen, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Von der I. und II. Abtheilung werden jährlich 5—7 und von der III. 3—4 Hefte erscheinen.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Der Preis des ganzen Jahrganges sämmtlicher drei Abtheilungen beträgt 24 fl.

Von allen in den Sitzungsberichten erscheinenden Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) bezogen werden.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlung enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

July 24

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. BAND. III. HEFT.

Jahrgang 1874. — October.

(Mit 3 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

INHALT

des 3. Heftes (October 1874) des 70. Bandes, II. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. = 20 Ngr.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

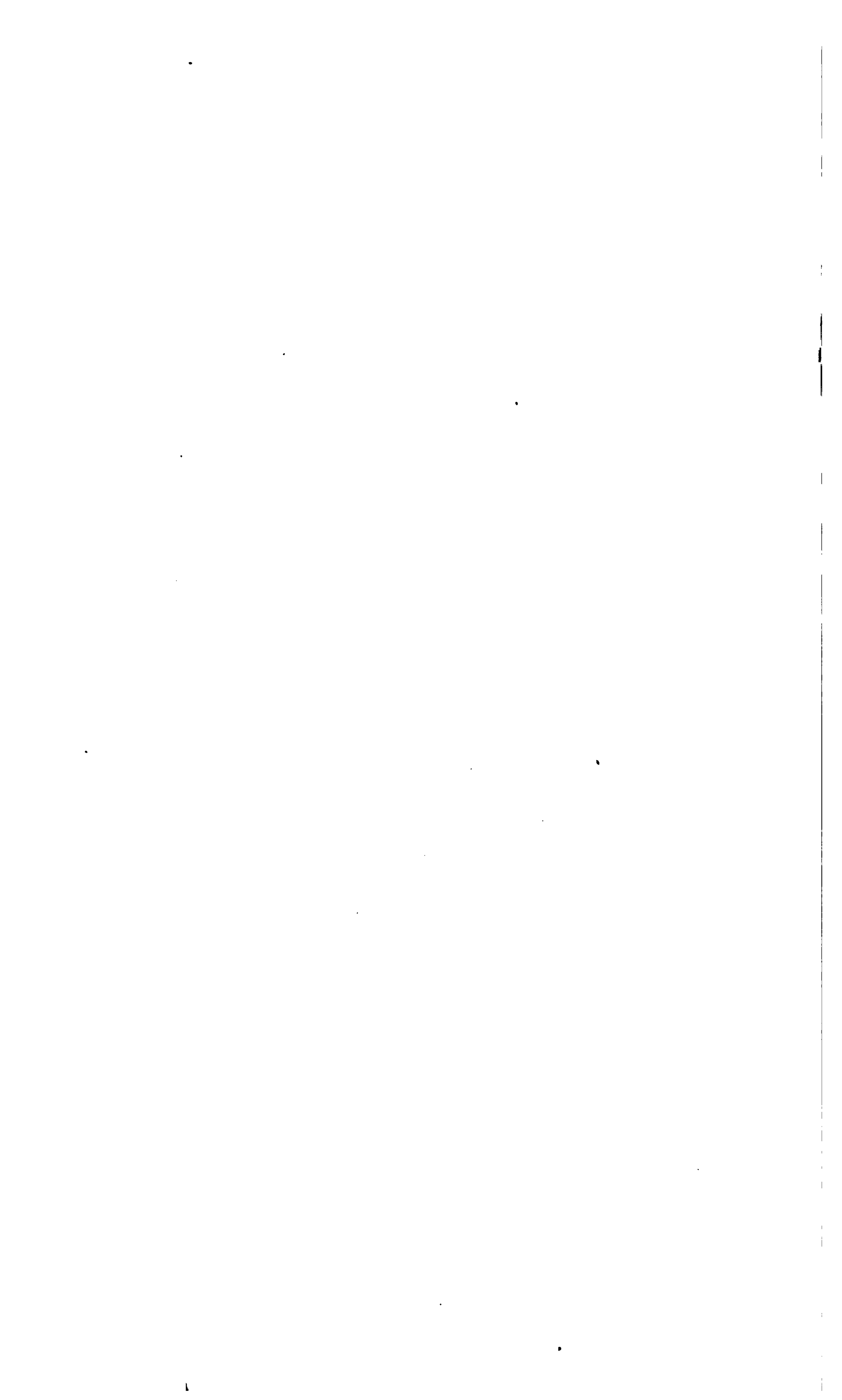
LXX. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

8.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

/



XXI. SITZUNG VOM 8. OCTOBER 1874.

Der Präsident gibt Nachricht von dem am 21. September zu Paris erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes, Herrn Léonce Elie de Beaumont.

Sämmtliche Anwesenden geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Der Secretär legt Dankschreiben vor von dem General Sir Edward Sabine in London für seine Wahl zum ausländischen Ehrenmitgliede der Classe; dann von den Herren Professoren Dr. A. Toepler in Graz, J. V. Carus in Leipzig, Max v. Pettenkofer in München und dem Sternwarte-Director G. V. Schiaparelli in Mailand für ihre Wahl zu correspondirenden Mitgliedern.

Herr Dr. L. J. Fitzinger dankt, mit Schreiben vom 1. August, für die ihm zur Vornahme von Untersuchungen über die Bastardirung der Fische in den oberösterreichischen Seen bewilligte Subvention von 250 fl.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt, mit Noten vom 22. Juli und 29. August, die graphischen Darstellungen der Eisverhältnisse der Donau und March in Niederösterreich und der Donau in Oberösterreich während des Winters 1873/4.

Das Curatorium der Franz Josephs-Universität in Agram ladet, mit Zuschrift vom 1. September, die Akademie zur Theilnahme an der am 19. October stattfindenden feierlichen Eröffnung dieser Hochschule ein.

Herr Regierungsrath Dr. E. Mach in Prag übersendet eine für den „Anzeiger“ bestimmte Notiz „über den Gleichgewichtssinn“ IV. Reihe.

Herr Dr. J. Dienger, vorm. Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe, übermittelt eine Abhandlung, betitelt: „Die La-

place'sche Methode der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern bei zahlreichen Beobachtungen."

Herr Regierungsrath Dr. K. v. Littrow berichtet über zwei neue Entdeckungen teleskopischer Kometen, wovon die eine durch Herrn A. Borelly in Marseille am 25. Juli, und die andere durch Herrn J. Coggia ebendaselbst am 19. August gemacht worden ist.

Herr Dr. Fr. Steindachner überreicht eine Abhandlung: „Über eine neue Gattung und Art aus der Familie der Pleuronectiden und über eine neue Thymallus-Art."

Herr Professor Dr. L. Boltzmann legt folgende fünf Abhandlungen vor: 1. „Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. I. Aufsuchung des mathematischen Ausdruckes für die elastische Nachwirkung." — 2. „Über einige an meinen Versuchen über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper anzubringende Correctionen." — 3. „Über die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante des krystallisirten Schwefels nach verschiedenen Richtungen." — 4. „Experimentaluntersuchung über die Fernwirkung dielektrischer Körper", von den Herren Romich und Fajdiga. — 5. „Experimentaluntersuchung dielektrischer Körper in Bezug auf ihre dielektrische Nachwirkung" von den Herren Romich und Nowak. Die letztgenannten beiden Arbeiten wurden im physikalischen Institute der Grazer Universität unter der Leitung Boltzmann's ausgeführt.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, Kgl. Preuss., zu Berlin: Abhandlungen. Aus dem Jahre 1873. Berlin, 1874; 4°. — Monatsbericht. Mai, Juni, Juli 1874. Berlin; 8°. — Verzeichniss der Bibliothek. Berlin 1874; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 22—28. Wien, 1874; 8°

Astronomische Nachrichten. Nr. 2003—2009 (Bd. 84. 11—17.) Kiel, 1874; 4°.

Bericht des k. k. Krankenhauses Wieden vom Solarjahre 1872 und 1873. Wien, 1874; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nrs. 2—12. Paris, 1874; 4°.

Gesellschaft, Deutsche geologische: Zeitschrift. XXVI. Band, 2. Heft. Berlin, 1874; 8°.

— naturforschende, zu Freiburg i. Br.: Berichte über die Verhandlungen. Band VI., Heft 2 und 3. Freiburg i. Br., 1873; 8°.

— k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XVII. (neuer Folge VII.), Nr. 7—8. Wien, 1874; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 15—19. Wien, 1874; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang Nr. 30—40. Wien, 1874; 4°.

Göttingen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1873. 4° und 8°.

Kasan, Universität: Bulletin et Mémoires. Tome XLI. 1874, Nrs. 1—2. Kasan; 8°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgaug, Nr. 15—20. Graz, 1874; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1874. Nr. 11—12. Wien; 4°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administrat. Militär-Comité. Jahrgang 1874, 7.—9. Heft. Wien; 8°.

— Mineralogische, von G. Tschermak. Jahrgang 1874. Heft 2. Wien; 4°.

Moniteur scientifique du D^teur^ Quesneville. 392e & 394e Livraisons. Paris, 1874; 4°.

Nature. Nrs. 247, 249, 251—257, Vol. X. London, 1874; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Abhandlungen. Band VII, Heft Nr. 1—2. Wien, 1874; Folio. — Jahrbuch. Jahrgang 1874. XXIV. Band, Nr. 2. Wien; 4°. — Verhandlungen. Jahrgang 1874, Nr. 11—12. Wien; 4°.

Reichsforstverein, österr: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXIV. Band, 1874. August- und Septemberheft. Wien; 8°.

„Revue politique et littéraire", et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". IVe année, 2e Série, Nrs. 4—14. Paris, 1874; 4^{0}.

Rostock, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1873/4. Fol., 4^{0} und 8^{0}.

Studenten-Kalender, Fromme's Österreichischer, für das Studienjahr 1874. XI. Jahrgang. Wien; 12^{0}.

Vaughan, D., Physics of the Internal Earth. Cincinnati, O., 1874; (1 Blatt) 4^{0}.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 30—39. Wien, 1874; 4^{0}.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang, 11.—13. Heft. Wien, 1874; 4^{0}.

Zur Theorie der elastischen Nachwirkung.

Von dem c. M. **Ludwig Boltzmann** in Wien.

I. Aufsuchung des mathematischen Ausdruckes für die elastische Nachwirkung.

Schon Weber und Kohlrausch, welche zuerst die elastische Nachwirkung untersuchten (Pogg. Ann. Bd. 54, 119 und 128), waren bemüht, eine allgemeine, und zwar sogar eine auf Betrachtungen über die Molecularconstitution der Körper gegründete Formel für die Gesetze derselben aufzustellen. Ihre Formeln sind jedoch nur auf die speciellen von ihnen untersuchten Fälle anwendbar. Sie lösen das Problem nicht vollkommen allgemein, d. h. sie sind nicht im Stande, folgende Frage zu beantworten: wie gross ist die elastische Nachwirkung, wenn die vorangegangene Deformation des Körpers eine ganz beliebige Function der Zeit ist. Später wurde meines Wissens nur noch eine Theorie der elastischen Nachwirkung aufgestellt, und zwar von Herrn Oskar Emil Meyer (Pogg. Ann. Bd. 131, S. 108). Dieselbe sucht allerdings das Problem in dieser Allgemeinheit zu lösen; allein die Gleichungen Herrn Meyer's sind so beschaffen, dass man sich unschwer überzeugen kann, dass sie die charakteristischen Eigenthümlichkeiten der elastischen Nachwirkung auch nicht qualitativ wiederzugeben im Stande sind. Dieselben enthalten nämlich nur Differentialquotienten der Verschiebungen nach den Coordinaten und nach der Zeit, woraus folgt, dass die auf eine Deformation folgende elastische Nachwirkung wesentlich von der Art und Weise abhängt, wie der Körper aus der Deformation wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt. Sie müsste ganz verschwinden, wenn jedes Ele-

ment des Körpers nach einer beliebigen Deformation desselben auch nur sehr kurze Zeit durch entsprechende Kräfte in seiner ursprünglichen Lage ruhend erhalten würde, und sie müsste ausserordentlich klein werden, wenn man den Körper langsam in seine Ruhelage zurückkehren liesse. Natürlich kann auch die Anwendung der Meyer'schen Formeln auf specielle Fälle nicht mit der Erfahrung stimmen. In den beiden Fällen, die Herr Meyer der Betrachtung unterzieht, dem der Dehnung und dem der Torsion eines Drahtes, findet er allerdings elastische Nachwirkung, allein dieselbe rührt blos daher, dass die hohen Obertöne in gewissen Fällen schwächer als der Grundton gedämpft werden.

Ein in Folge der elastischen Nachwirkung gedehnter Draht müsste also keineswegs gleichförmig gedehnt sein; in demselben wäre vielmehr das untere Ende am stärksten nach abwärts verschoben. Dann würden solche Stellen kommen, welche fast gar nicht nach abwärts, vielleicht sogar nach aufwärts verschoben wären, dann wieder solche, die stärker nach abwärts verschoben wären u. s. w. Ähnlich verhielte sich ein tordirter Draht. Ausserdem würde der von Herrn Meyer hervorgehobene Fall, dass die elastische Nachwirkung länger dauert, als die (nicht von aussen gedämpften) Schwingungen, nur dann eintreten, wenn die Bewegung des Drahtes bereits bei $\sqrt{2}$mal kleinerer Länge desselben aperiodisch würde. Doch dies alles ist noch nicht die Hauptsache. Herr Meyer hat sich nämlich die Integration dadurch sehr erschwert, dass er einen Fall der Rechnung unterzog, der von den bisher experimentell geprüften und leicht zu prüfenden total verschieden ist, indem er das dehnende (resp. tordirende) Gewicht als massenlos betrachtet. Das Gewicht spielt bei Herrn Meyer keine andere Rolle, als dass zu den Schwingungen eine constante Dehnung (resp. Torsion) des Fadens hinzukömmt, welcher sonst ganz so schwingt, als ob sein unteres Ende vollkommen frei wäre, und er unter entsprechender Anregung schwänge. Legt man dem angehängten Gewichte eine Masse bei, so verwandelt sich die für das freie Ende geltende Bedingung in folgende:

$$A - B\frac{d^2u}{dt^2} = a\frac{du}{dx} + 2b\frac{d^2u}{dx\,dt}, \tag{1}$$

wobei für den Fall der Dehnung $A = \frac{P}{\varepsilon Q}$, $B = \frac{M}{\varepsilon Q}$, für den der Torsion $A = \frac{2D}{\pi R^4 \varepsilon}$, $B = \frac{2K}{\pi R^4 \varepsilon}$ ist. M ist die Masse, K das Trägheitsmoment des dehnenden Gewichts. Im Übrigen sind die Bezeichnungen die Meyer'schen. Setzt man

$$u = \frac{A}{a}x + \omega$$

und

$$\omega = \Sigma\, C e^{-\alpha t} \sin\gamma x\,,$$

so muss γ eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$\gamma\, tg\, \gamma\lambda = \frac{1}{B} \tag{2}$$

sein; das dazu gehörige α ist durch die Gleichung:

$$\alpha^2 + a\gamma^2 - 2b\,\alpha\gamma^2 = 0$$

bestimmt. B ist die Länge, welche man dem Drahte, ohne dessen Dichte und Querschnitt zu ändern, geben müsste, damit er im Falle von Longitudinalschwingungen dieselbe Masse, im Falle von Torsionsschwingungen bezüglich seiner Mittellinie dasselbe Trägheitsmoment, wie das angehängte Gewicht hätte. Dieselbe ist bei den Beobachtungen meist sehr gross gegen die wirkliche Länge des Drahtes. Dann ist eine Wurzel der Gleichung 2) nahe gleich $\frac{1}{\sqrt{B\lambda}}$, die übrige nahe gleich $\frac{k\pi}{\lambda}$, wobei k irgend eine ganze Zahl bedeutet. Die erste Wurzel entspricht einer einfachen Pendelschwingung, die unverhältnissmässig langsam gegen alle übrigen geschieht, und welche allein der Beobachtung unterzogen zu werden pflegt.

Ihre Schwingungsdauer sei τ_1.

Alle anderen Wurzeln entsprechen sehr raschen Pendelschwingungen, welche fast so vor sich gehen, als ob das untere Ende des Drahtes ebenfalls fix wäre.

Bezeichnen wir den reellen (positiven) Theil von α als den Extinctionscoëfficienten. Dann ist der Extinctionscoëfficient ε_1 der langsamsten Pendelschwingungen $= \frac{b}{B\lambda}$, der kleinste Extinctionscoëfficient ε_2 jener raschen Schwingungen, denen Herr Meyer die elastische Nachwirkung zuschreibt, aber ist $= \frac{a}{2b}$. Das Verhältniss $\varepsilon_1 : \varepsilon_2$ ist also nahe gleich $\frac{1}{2\pi^2} \varepsilon_1^2 \tau_1^2$. Denn für die Schwingungsdauer τ_1^2 der langsamsten Schwingungen findet man den Werth $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{a}{B\lambda} - \frac{b^2}{B^2\lambda^2}}}$, also nahezu $2\pi\sqrt{\frac{B\lambda}{a}}$.

$\varepsilon_1 \tau_1$ ist die Grösse, welche man gewöhnlich als das logarithmische Decrement bezeichnet. Dieselbe war sowohl bei den Versuchen Warburg's (Berl. Monatsb. Juli 1869) als auch bei denen Streintz's (Wiener Sitzungsber. Bd. 69), die sich auf gewöhnliche Temperaturen bezogen, kleiner als 0·01. Es folgt daraus, dass die langsamsten Schwingungen unter den Verhältnissen, wie sie bei den bisher untersuchten Fällen statt hatten, nach den Meyer'schen Gleichungen weitaus den kleinsten Extinctionscoëfficienten haben, und daher die Formeln Meyer's keine Spur elastischer Nachwirkung liefern, nicht einmal dann, wenn die langsamsten Schwingungen durch äussere Einflüsse hunderttausendmal so rasch beruhigt würden. Wenn man das dehnende Gewicht mittelst der Hand langsam in seine ursprüngliche Lage zurückkehren lässt, so werden übrigens dadurch nicht blos die langsamsten, sondern auch die raschen Schwingungen aufgehalten.

Bei dieser Sachlage dürfte es kaum überflüssig sein, wenn ich hier einige Formeln mittheile, welche ebenfalls eine allgemeine Auflösung des oben angeführten Problems der elastischen Nachwirkung in seiner grössten Allgemeinheit geben, und welche jedenfalls qualitativ die Phänomene der elastischen Nachwirkung richtig liefern dürften; ob auch quantitativ, wird erst entschieden werden können, wenn mannigfaltigere experimentelle Daten vorliegen. Doch habe ich wenigstens in den wichtigsten Fällen die Rechnung so weit durchgeführt, dass

eine unmittelbare Vergleichung mit dem Experimente ohne alle Schwierigkeit möglich ist. Dass behufs einer unbedingten Übereinstimmung mit der Erfahrung meine Formeln noch einer Correction bedürfen werden, darauf deutet schon der von Weber und Kohlrausch beobachtete Umstand hin, dass dauernde Deformationen (unvollkommene Elasticität) eintritt, wenn der Draht nicht vorher einigemal hin und her tordirt wurde, sowie auch der von Streintz gefundene Einfluss vorangegangener Deformationen auf das logarithmische Decrement. Trotzdem dürften meine Formeln den Experimentatoren vielleicht willkommene Anhaltspunkte geben.

Die Grundvorstellung, welche meinen Formeln zu Grunde liegt, ist folgende. Denken wir uns einen elastischen parallelepipedischen Körper, dessen Kanten parallel den Coordinatenaxen sind. Derselbe sei in der Richtung jeder der Coordinatenaxen gleichförmig gedehnt. Die Dehnung der Längeneinheit sei α in der Richtung der x-Axe, β in der Richtung der y-Axe, γ in der Richtung der z-Axe. Dann müssten auf die Begrenzungsfläche des Körpers lauter constante normale Zugkräfte wirken, und zwar auf die beiden Flächen, welche senkrecht zur x-Axe stehen, muss auf die Flächeneinheit eine Zugkraft von der Intensität

$$N_1 = \lambda(\alpha + \beta + \gamma) + 2\mu\alpha \qquad 3)$$

wirken. Analoges gilt von der y- und z-Axe. λ und μ sind die bekannten von Lamé in seiner Elasticitätslehre gebrauchten Constanten. Aus dieser Thatsache lassen sich die allgemeinen Gleichgewichts- und Bewegungsgleichungen für den als isotrop vorausgesetzten Körper ableiten, sobald man nur die Voraussetzung hinzunimmt, dass auch bei ungleichförmiger Dehnung sehr kleine Parallelepipede als gleichförmig gedehnt betrachtet werden können. (Vergleiche die Elasticitätstheorie von Clebsch.) Von denselben Principien gehe auch ich aus; nur nehme ich an, dass die Kräfte, die auf die Begrenzungsflächen des Parallelepipedes zu einer bestimmten Zeit wirken, nicht blos abhängen von den Dehnungen des Parallelepipeds zu jener Zeit, sondern auch von den vorhergegangenen Dehnungen desselben, wobei jedoch eine Dehnung einen um so geringeren

Einfluss hat, vor je längerer Zeit sie stattfand; und zwar ist die Kraft, welche zur Erzeugung einer bestimmten Dehnung erforderlich ist, geringer, wenn schon früher eine Deformation im gleichen Sinne Statt hatte. Ich will diese Thatsache, dass eine früher vorhandene Dehnung die Kraft, welche zur Erzeugung einer Dehnung im gleichen Sinne nothwendig ist, vermindert, „die durch jene frühere Dehnung erzeugte Kraftverminderung" nennen. Wenn zu irgend einer Zeit τ während des Zeitdifferentials $d\tau$ der Körper die Dehnung $\alpha(\tau)$ hatte, so nehme ich an, dass die Kraftverminderung, welche diese Dehnung auf die zur Zeit t wirkende Kraft ausübt, proportional $d\tau$, $\alpha(\tau)$ und einer Function der Zeit $t-\tau$ ist, vor welcher die Dehnung Statt hatte.

Hiezu braucht man nur noch die Annahme hinzuzufügen, dass sich der Einfluss der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Deformationen superponirt, d. h. dass die Kraftverminderung, welche eine bestimmte vor einer bestimmten Zeit stattgefundene Dehnung erzeugt, nicht abhängt von den Zuständen, welche der Körper inzwischen durchlaufen hat [1], um sofort bis auf zwei Functionen der Zeit $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, welche angeben, in welcher Weise die kräftevermindernde Eigenschaft vorangegangener Deformationen von der Zeit abhängt, die Bewegungsgleichungen für isotrope Körper mit elastischer Nachwirkung aufstellen zu können. Wir betrachten zunächst wieder ein Parallelepiped der Substanz. Die drei Dehnungen α, β, γ der Längeneinheit der drei Seiten seien zu jeder Zeit gleichförmig, aber zu verschiedenen Zeiten verschieden gewesen. Sie werden also Functionen der Zeit t sein, wesshalb wir sie mit $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ bezeichnen wollen.

Aus meinen Voraussetzungen ergibt sich dann, wenn man $t-\tau=\omega$ setzt und auch $d\omega$ für $d\tau$ einführt, statt der Formel 3) folgende:

$$N_1 = \lambda[\alpha(t)+\beta(t)+\gamma(t)] + 2\mu\,\alpha(t) -$$

[1] Dieses Princip der Superposition ist für nicht allzugrosse Deformationen ziemlich plausibel, während es für sehr starke vielleicht nicht mehr anwendbar ist, für welche dann natürlich auch meine später entwickelten Formeln nicht mehr gelten würden.

$$-\int_0^\infty d\omega \, . \, \varphi(\omega) \, . \, [\alpha(t-\omega) + \beta(t-\omega) + \gamma(t-\omega)]$$

$$-2\int_0^\infty d\omega \, \psi(\omega) \, . \, \alpha(t-\omega).$$

Hieraus findet man, wenn man genau so verfährt, wie es Clebsch an der citirten Stelle thut, folgende allgemeine Gleichungen:

$$N_1 = \lambda(t) + 2\mu \frac{du(t)}{dx} - \int_0^\infty d\omega \left[\varphi(\omega) \, . \, \theta(t-\omega) + 2\psi(\omega) \frac{du(t-\omega)}{dx}\right]$$

4)

$$T_1 = \mu\left(\frac{dv(t)}{dz} + \frac{dw(t)}{dy}\right) - \int_0^\infty d\omega \, \psi(\omega) \left[\frac{dv(t-\omega)}{dz} + \frac{dw(t-\omega)}{dy}\right].$$

Die Gleichungen für die übrigen Kräfte können nach Analogie gebildet werden. Die Bezeichnungen sind ganz die Lamé's; $\theta(s)$, $u(s)$.. sind die Werthe dieser Grössen zur Zeit s; die Bewegungsgleichungen (Lamé, Leçons sur la théorie de l'élasticité, p. 66, équations [4]) bleiben vollständig unverändert.

Die Function ψ wird durch Torsionsversuche bestimmt.

Werde ein Draht, der die Gestalt eines Cylinders von der Länge l und dem Radius R hat, tordirt; die Cylinderaxe sei die x-Axe, für den obersten fixen Querschnitt sei $x=0$.

Wir könnten die langsamsten Schwingungen, sowie sämmtliche Obertöne genau nach der Methode berechnen, von der wir sahen, dass sie bei Lösung der Meyer'schen Gleichungen angewendet werden muss. Da wir jedoch annehmen, das Trägheitsmoment des Gewichtes, mit dem der Draht beschwert ist, sei sehr gross, so erzielen wir sicher eine genügende Genauigkeit, wenn wir annehmen, dass der Draht in jedem Augenblicke gleichförmig tordirt ist. Wir haben dann zu setzen:

$$u = 0, \quad v = -\frac{xz\vartheta(t)}{l}, \quad w = \frac{xy\vartheta(t)}{l}$$

und erhalten, indem wir nach Berechnung des Momentes sämmtlicher elastischer Kräfte, die auf den untersten Quer-

schnitt des Drahtes wirken, die Bewegungsgleichung für das angehängte Gewicht aufstellen:

$$D - K\frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2l}\left[\mu \vartheta(t) - \int_0^\infty d\omega\, \psi(\omega)\, \vartheta(t-\omega)\right]. \qquad 5)$$

Dabei ist $\vartheta(t)$ der Winkel, um den in Folge der Torsion der unterste Querschnitt des Drahtes zur Zeit t verdreht ist; D das auf denselben zur selben Zeit von aussen wirkende Drehungsmoment.

Die Function ψ kann durch verschiedene Versuche bestimmt werden.

1. Der Draht sei anfangs vollkommen untordirt; dann werde er um einen gewissen Winkel c tordirt und diese Torsion constant erhalten. (Ich sage immer, der Draht sei um einen gewissen Winkel tordirt, wenn sein unterster Querschnitt um diesen Winkel gedreht ist, sowie ich sage, ein Drehungsmoment wirkt auf den Draht, statt auf dessen untersten Querschnitt.) Sieht man von den jedenfalls rasch wieder verschwindenden, durch die Torsion erzeugten Schwingungen ab, so ist also zu setzen: von $t=-\infty$ bis $t=0$, $\vartheta(t)=0$; für alle späteren t aber $\vartheta(t)=c$, und man erhält:

$$D = \frac{\pi R^4 c}{2l}\left[\mu - \int_0^t d\omega\, \psi(\omega)\right], \qquad 6)$$

folglich

$$\psi(t) = -\frac{2l}{\pi R^4 c}\cdot\frac{dD}{dt}. \qquad 7)$$

Bezeichnet man das Drehungsmoment, welches gleich nach der Torsion wirkte, mit D_0, so ist

$$D_0 = \frac{\pi R^4 c \mu}{2l}, \qquad 8)$$

daher

$$\psi(t) = \frac{\mu}{D_0}\,\frac{dD}{dt}. \qquad 9)$$

Führt man lieber die übrigens nur um eine Grösse von der Ordnung der elastischen Nachwirkung von D_0 verschiedene Grenze D_∞ ein, der sich das Drehungsmoment nach sehr langer Zeit nähert, und bezeichnet mit μ' die Constante

$$\mu - \int_0^\infty d\omega\, \psi(\omega),$$

so ist

$$\psi(t) = \frac{\mu'}{D_\infty} \frac{dD}{dt}. \qquad 10)$$

Die Function $\psi(t)$ kann also bestimmt werden, wenn man D als Function der Zeit bestimmt hat. μ' ist der Werth der Lamé'schen Constante μ, den man erhält, wenn man die elastischen Kräfte durch jene Verschiebungen ausdrückt, die nach sehr langer Zeit unter deren Einfluss entstehen.

2. Man ertheilt dem Drahte nur während kurzer Zeit (von $t = -\frac{\tau}{2}$ bis $t = +\frac{\tau}{2}$) eine constante Torsion um den Winkel γ. Er würde dann, wenn nach der Zeit $+\frac{\tau}{2}$ auf sein unteres Ende keine Kraft mehr wirken würde, in Folge der Nachwirkung noch längere Zeit ein wenig in demselben Sinne tordirt bleiben. Man bestimmt das Moment, welches zu irgend einer Zeit $t > +\frac{\tau}{2}$ auf das untere Ende wirken muss, um dasselbe fortwährend in jener Lage zu erhalten, welche es vor aller Torsion inne hatte. In diesem Falle ist $\vartheta(t)$ immer gleich Null, nur von $t = -\frac{\tau}{2}$ bis $t = +\frac{\tau}{2}$ ist es gleich γ.

Man hat also

$$D = -\frac{\pi R^4 \gamma}{2l} \int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\frac{\tau}{2}} d\omega\, \psi(\omega), \qquad 11)$$

und weil τ klein ist, nahe

$$D = -\frac{\pi R^4 \gamma \tau}{2l} \psi(t) \tag{12)}$$

$$\psi(t) = -\frac{2lD}{\pi R^4 \gamma \tau},$$

oder wenn μ' dieselbe Bedeutung wie früher hat, Δ_0, Δ_∞ aber die Werthe sind, die aus den früher mit D_0, D_∞ bezeichneten Grössen entstehen, wenn man darin γ für c substituirt

$$\psi(t) = -\frac{\mu}{\tau}\frac{D}{\Delta_0} = -\frac{\mu'}{\tau}\frac{D}{\Delta_\infty}. \tag{13)}$$

Wir haben bisher während der Zeit, während welcher die Nachwirkung beobachtet wird, die Torsion auf einem constanten Werthe c erhalten, und die Art und Weise studirt, wie sich das hiezu nothwendige Drehungsmoment D verändert; wir wollen diesen Fall immer den der Kraftnachwirkung nennen. Unter „Verschiebungsnachwirkung" dagegen wollen wir den Fall verstehen, wo das auf das freie Ende wirkende Drehungsmoment auf einem constanten Werthe D' erhalten wird, und die Verdrehung ϑ des unteren Querschnittes beobachtet wird. Es wäre daher bei der Verschiebungsnachwirkung in jedem Momente $D—D'$ dasjenige Drehungsmoment, welches zu dem schon vorhandenen D hinzugefügt werden müsste, um die Torsion auf c zu bringen, also um $c—\vartheta$ zu vermehren. Weil die Nachwirkung immer klein ist, so kann man sie bei Aufstellung der Relation zwischen dem Momente $D—D'$ und der dadurch erzeugten Torsion $c—\vartheta$ vernachlässigen, wodurch man erhält:

$$c - \vartheta = \frac{2l(D-D')}{\pi R^4 \mu}. \tag{14)}$$

Aus dem sub 1 betrachteten Falle wird dadurch folgender:

3. Von $t = -\infty$ bis $t = 0$ war der Draht untordirt, für die folgenden Zeiten wirke auf ihn das constante Drehungsmoment D'. Im ersten Momente der Wirksamkeit des Drehungsmomentes D' verhält sich der Draht dann ganz, wie in dem

sub 1 betrachteten Falle, wesshalb c und D' durch dieselbe Gleichung wie dort c und D_0 verbunden sind, also durch die Gleichung 8). Man hat also:

$$D' = \frac{\pi R^4 c \mu}{2l}.$$

Die Torsion ϑ des Drahtes zur Zeit t findet man, indem man den durch Formel 6) gegebenen Werth von D in die Formel 14) substituirt und daraus ϑ berechnet, wodurch sich ergibt:

$$\vartheta = c + \frac{c}{\mu}\int_0^t d\omega\, \psi(\omega)\,, \tag{15}$$

oder wenn man die Grösse D' einführt:

$$\vartheta = \frac{2lD'}{\pi R^4 \mu}\left[1 + \frac{1}{\mu}\int_0^t d\omega\, \psi(\omega)\right]. \tag{16}$$

Die nach sehr langer Zeit eintretende Verdrehung c_∞ ist

$$c + \frac{c}{\mu}\int_0^\infty d\omega\, \psi\omega.$$

4. Vergleichen wir hiemit noch folgenden Fall. Von $t = -\infty$ bis $t = 0$ sei der Draht um einen gewissen Winkel c_∞ verdreht gewesen, für alle folgenden Zeiten wirke keine Kraft auf denselben, in Folge der Nachwirkung sei er zur Zeit t noch um den Winkel ϑ' gedreht. Dann ist $\vartheta' = c_\infty - \vartheta$, wobei ϑ die durch Formel 15) gegebene Grösse ist. Man hat also

$$\left.\begin{aligned} \vartheta' &= \frac{c_\infty}{\mu}\int_t^\infty d\omega\, \psi(\omega)\,, \\ \psi(t) &= -\frac{\mu}{c_\infty}\frac{d\vartheta}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Beobachtet man bei dem sub 2 betrachteten Falle die Verschiebungsnachwirkung, so hat man in Formel 14) $c = 0$, $D' = 0$, für D aber dessen Werth aus Gleichung 12) zu setzen, und erhält folgenden Fall:

5. Sei der Draht von $t = -\infty$ bis $t = -\frac{\tau}{2}$ unterordinirt, von $t = -\frac{\tau}{2}$ bis $t = +\frac{\tau}{2}$ um den Winkel γ tordirt gewesen, worauf auf den unteren Querschnitt keine Kraft mehr wirke, dann ist er in Folge der Nachwirkung zur Zeit t noch um den Winkel

$$\vartheta = \frac{\gamma\tau}{\mu}\psi(t) \tag{18}$$

tordirt. Sucht man aus derartigen Versuchen ψ, so ist also

$$\psi(t) = \frac{\mu}{\gamma\tau}\vartheta. \tag{19}$$

6. Wir hängen an ein und denselben Draht Gewichte von verschiedenem Trägheitsmomente K an und bestimmen das logarithmische Decrement $\varepsilon\tau$ oder der Extinctionscoëfficienten ε als Function der Schwingungsdauer τ, wenn während der Schwingungen auf den Draht und das angehängte Gewicht keine anderen als die elastischen Kräfte wirken. Dann ist in Formel 5) $D = 0$ zu setzen.

Setzen wir jetzt

$$\vartheta(t) = Ce^{-\varepsilon t}\sin.(n+\alpha)t,$$

wobei $n = \sqrt{\frac{\pi R^4 \mu}{2lK}}$, so werden ε und α sehr klein sein; man kann daher in dem bestimmten Integrale der Gleichung 5), welches ebenfalls klein ist, $\varepsilon = \alpha = 0$ setzen und erhält:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{n}{2\mu}\int_0^\infty \sin(n\omega)\,\psi(\omega)\,d\omega \\ \alpha &= -\frac{n}{2\mu}\int_0^\infty \cos(n\omega)\,\psi(\omega)\,d\omega. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Bezeichnet man ε als Function von n mit $\varepsilon(n)$, so erhält man aus der ersten der Gleichungen 20) leicht $\psi(t)$ mittelst des Fourier'schen Satzes.

Es ist nämlich:

$$\psi(t) = \frac{4\mu}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varepsilon(n)}{n}\sin.(nt)\,dn. \qquad 21)$$

Das logarithmische Decrement L ist $\varepsilon\tau$, τ aber ist $\frac{2\pi}{n}$. Sei $L = \chi(\tau)$, so ist also

$$\varepsilon = \frac{1}{\tau}\chi(\tau) = \frac{n}{2\pi}\chi\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

woraus man findet

$$\psi(t) = 2\mu\int_0^\infty \chi\left(\frac{2\pi}{n}\right)\sin(nt)\,dn. \qquad 22)$$

Dies ist die Formel, nach welcher die Function $\psi(t)$ aus dem Schwingungsversuche berechnet werden kann. Wirkt auch eine äussere ϑ proportionale Kraft auf den Draht, so vereinigt sie sich mit μ, was aber dann eventuell unter dem Integralzeichen stehen muss.

Die Function φ kann in ganz analoger Weise aus Drehungsversuchen bestimmt werden. Da jedoch die meisten Nachwirkungsversuche bisher die Torsion zum Gegenstande hatten, und da zudem höchst wahrscheinlich φ dieselbe Form wie ψ hat, so will ich mich hierauf vorläufig nicht weiter einlassen.

Mittelst der Formeln 7) und 19) könnte man leicht aus den verschiedenen Beobachtungen Kohlrausch's (l. c.) die Function ψ bestimmen, wobei nur noch ein für sehr grosse t verschwindender Factor hinzuzufügen wäre, um das Unendlichwerden von $\int_t^\infty \psi(\omega)\,d\omega$ zu verhindern. Doch erhält man in dieser Weise nur wenig übereinstimmende Werthe von ψ, weil Kohlrausch's Zahlen dem Principe der Superposition nur sehr unvollkommen genügen.

Aus Neesen's Versuchen (Berl. Monatsber. Febr. 1874) würde $\psi(t) = a\mu e^{-bt}$ folgen, wobei a und b zu bestimmende Constanten sind. Es ginge also die Formel 6) über in

$$D = \frac{\pi R^4 c}{2l}\left(\mu + \frac{a\mu}{b} e^{-bt}\right) = D_0\left(1 + \frac{a}{b} e^{-bt}\right)$$
$$= D_\infty\left[1 - \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})\right], \tag{23}$$

die Formel 18) in

$$\vartheta(t) = \gamma \tau a e^{-bt}, \tag{24}$$

die Formel 20) in

$$\varepsilon = \frac{a n^2}{2(n^2 + b^2)} = \frac{a}{2\left(1 + \frac{\tau^2 b^2}{4\pi^2}\right)}, \quad \alpha = -\frac{a b n}{2(n^2 + b^2)}. \tag{25}$$

Hat man also die auf eine kurze Torsion γ während der Zeit τ folgende Nachwirkung $\vartheta(t)$ beobachtet und in der Form 24) dargestellt, so lässt sich aus den Constanten a und b der Extinctionscoëfficient ε berechnen und mit der Erfahrung vergleichen. Ebenso, wenn die auf eine sehr lange Deformation folgende Nachwirkung beobachtet worden wäre. Sei von $t = \infty$ bis $t = 0$ der unterste Querschnitt um den Winkel c gedreht gewesen, dann ist nämlich die Drehung ϑ, welche zur Zeit t in Folge der elastischen Nachwirkung noch vorhanden ist, nach Formel 17)

$$\vartheta' = \frac{ca}{b} e^{-bt}. \tag{26}$$

Schwingungsversuche, aus denen die Function $\psi(t)$ nach Formel 21) bestimmt werden kann, wurden von Streintz angestellt.

Derselbe fand das logarithmische Decrement von der Schwingungsdauer unabhängig, also $\chi\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ in Formel 22) constant. Die Formel 22) wird dann unbestimmt. Man kann aber diesem Übelstande abhelfen, indem man annimmt, dass $\chi(\tau)$ für mässige τ constant ist, wenn aber τ ausserordentlich klein wird, continuirlich abnimmt, was den Beobachtungen Streintz's jedenfalls nicht widerspricht. Dann liefert die For-

mel 22) $\psi(t) = \frac{B}{t}$, wobei B eine Constante ist. Dieser Werth von ψ kann noch nicht unmittelbar in die Formeln eingesetzt werden, weil sowohl $\int_t^\infty \psi(t)\,dt$ als auch $\int_0^t \psi(t)\,dt$ unendlich wird. Dem ersten Übelstande hilft man ab, indem man im Zähler von $\psi(t)$ statt der Constanten B eine Function $f(t)$ substituirt, die für mässige t fast constant ist, und erst für sehr grosse t immer kleiner wird, z. B. die Function Ae^{-kt} oder $\frac{A}{t^k}$, wobei k sehr klein ist.

Dem zweiten Übelstande kann man dadurch abhelfen, dass man $\mu = \int_0^\infty \frac{f(\omega)\,d\omega}{\omega}$ setzt, und dann beide Glieder der Formel 5) in eins zusammenzieht.

II. Aufstellung und Discussion jener Formeln für die elastische Nachwirkung, welche mir als die wahrscheinlichsten erscheinen.

Wir wollen voraussetzen, dass die Function φ denselben Bau wie Function ψ besitzt.

Dann können wir die allgemeinen Gleichungen für die elastischen Kräfte so schreiben:

$$N_1 = \lambda\theta(t) + \int_0^\infty [\theta(t) - \theta(t-\omega)]\, F(\omega) \frac{d\omega}{\omega}$$

$$+ 2\int_0^\infty \left[\frac{du(t)}{dx} - \frac{du(t-\omega)}{dx}\right] f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} \qquad 27)$$

$$T_1 = \int_0^\infty \left[\frac{dv(t)}{dz} + \frac{dw(t)}{dy} - \frac{dv(t-\omega)}{dz} - \frac{dv\,(t-\omega)}{dy}\right] f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}.$$

Von den beiden Functionen $F(\omega)$ und $f(\omega)$ genügt es, zu wissen, dass sie für mässige ω constante Werthe haben, für sehr grosse ω aber sich so der Grenze Null nähern, dass $\int_1^\infty f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}$ und

$\int_1^\infty F(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$ convergiren. Dabei sind $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ die Verschiebungen des Punktes mit den Coordinaten x, y, z parallel den Coordinatenaxen, $\theta(t)$ ist $=\frac{du(t)}{dx}+\frac{dv(t)}{dy}+\frac{dw(t)}{dz}$. Auf ein Flächenelement vom Flächeninhalte df, welches senkrecht auf der x-Axe steht, wirken die Kräfte $N_1 df$, $T_3 df$, $T_2 df$ parallel der x-, y- und z-Axe. Die Ausdrücke für die übrigen Kräfte können nach Analogie gebildet werden. Dazu kommen noch dieselben Bewegungsgleichungen, welche Lamé (l. c.) aufstellt, nämlich:

$$\rho\frac{d^2u(t)}{dt^2}=\frac{dN_1}{dx}+\frac{dT_3}{dy}+\frac{dT_2}{dz}+X$$

$$\rho\frac{d^2v(t)}{dt^2}=\frac{dT_3}{dx}+\frac{dN_2}{dy}+\frac{dT_1}{dz}+Y \qquad 28)$$

$$\rho\frac{d^2w(t)}{dt^2}=\frac{dT_2}{dx}+\frac{dT_1}{dy}+\frac{dN_3}{dz}+Z.$$

Dabei ist ρ die Dichte, X, Y, Z sind die beschleunigenden Kräfte, die auf das Innere des Körpers wirken. Ich will diese Formeln wieder vorläufig nur auf denjenigen Fall anwenden, welcher am leichtesten zu untersuchen ist, nämlich auf den der Torsion.

Der vertical herabhängende Draht sei genau wie früher ein gerader Kreiscylinder von der Länge l und dem Radius R. Das Centrum seiner oberen fixen Endfläche sei der Coordinatenanfangspunkt, seine Axe die Abscissenaxe, sein unteres Ende mit einem Gewichte belastet, dessen Trägheitsmoment K sehr gross ist gegenüber dem des Drahtes (alles bezogen auf die gemeinsame Drehungsaxe). Dann werden, wenn wir von der durch die Schwere des Gewichtes erzeugten Dehnung abstrahiren, die sich nur zur Schwingungsbewegung superponirt, die Verschiebungen u, v, w folgende Werthe besitzen:

$$u=0,\quad v=\frac{-zx\vartheta(t)}{l},\quad w=\frac{yx\vartheta(t)}{l},$$

wobei $\vartheta(t)$ der Winkel ist, um welchen zur Zeit t der unterste Querschnitt verdreht ist, und wenn D das Moment ist, mit welchem zur Zeit t der unterste Querschnitt gedreht wird, so hat man

$$D - K\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = \frac{\pi R^4}{2l}\int_0^\infty [\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)]\, f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}. \qquad 29)$$

Wir wollen nun wieder diese Formel auf die wichtigsten in der Praxis vorkommenden Fälle anwenden.

Sei zunächst die Bewegung des Drahtes so gering, dass man seine Beschleunigung vernachlässigen, also $\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} = 0$ setzen darf; bis zu einer gewissen Zeit T sei der Draht untordirt gewesen; erst wenn t grösser als T ist, sei $\vartheta(t)$ von 0 verschieden. Die Gleichung 29) verwandelt sich dann in folgende:

$$D = \frac{\pi R^4}{2l}\vartheta(t)\int_{t-T}^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} + \frac{\pi R^4}{2l}\int_0^{t-T}[\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)]\, f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}.$$

Wir bezeichnen nun mit ρ irgend eine beliebige Constante; so können wir das erste Integral rechts in zwei, eines von $t-T$ bis ρ, das andere von ρ bis ∞ zerlegen und erhalten so

$$\begin{aligned} D = \frac{\pi R^4}{2l}\vartheta(t)\int_\rho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} + \frac{\pi R^4}{2l}\vartheta(t)\int_{t-T}^\rho f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} + \\ + \frac{\pi R^4}{2l}\int_0^{t-T}[\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)]\, f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}. \end{aligned} \qquad 30)$$

Das erste bestimmte Integral ist constant, wir wollen es z. B. mit A bezeichnen, so dass

$$A = \int_\rho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}; \qquad 31)$$

in dem zweiten bestimmten Integrale durchläuft ω nur endliche Werthe, so dass $f(\omega)$ unserer Annahme gemäss einen nahezu

constanten Werth B hat, ebenso im dritten. Wir können daher, wenn wir noch setzen

$$
\left.\begin{aligned}
a &= \frac{\pi R^4}{2l} . A = \frac{\pi R^4}{2l} \int_\rho^\infty f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}, \\
b &= \frac{\pi R^4}{2l} . B = \frac{\pi R^4}{2l} f(0)
\end{aligned}\right\} \qquad 32)
$$

die Gleichung 30) so schreiben:

$$
\left.\begin{aligned}
D = a\vartheta(t) - b\vartheta(t) \log . nat . \left(\frac{t-T}{\rho}\right) + \\
+ b\int_0^{t-T} [\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)] \frac{d\omega}{\omega}.
\end{aligned}\right\} \qquad 33)
$$

Wir wollen diese Formel zuerst zur Discussion folgender Fälle anwenden:

1. Der Draht sei bis zur Zeit Null untordirt gewesen; dann werde seine Torsion constant gleich c erhalten (d. h. wieder sein unterster Querschnitt werde um den Winkel c verdreht). Wir fragen nach der Kraftnachwirkung, d. h. welches Drehungsmoment D zu irgend einer Zeit t auf den Draht (also wieder auf seinen untersten Querschnitt) wirken muss, um jene constante Torsion zu erhalten. Wir haben in diesem Falle in Formel 33) $T = 0$, $\vartheta(t) = \vartheta(t-\omega) = c$ zu setzen, und erhalten

$$
D = c\left[a - b \log nat \left(\frac{t}{\rho}\right)\right]. \qquad 34)
$$

Diese Formel enthält scheinbar drei zu bestimmende Constanten a, b und ρ, in Wirklichkeit aber nur zwei, da sich die Constante $\log nat\, \rho$ zur Constante a addirt. Es ist also ρ ganz willkürlich und kann z. B. gleich einer Secunde gesetzt werden. Die Formel 34) gilt natürlich nicht für sehr kleine und auch nicht für sehr grosse t. Die Schuld davon liegt jedoch nicht an der Gleichung 33), sondern daran, dass in diesen

Fällen die Vernachlässigungen unerlaubt werden, die wir uns bei ihrer Integration gestatteten. Für mässige t ist die Nachwirkung klein, daher nahe

$$D = c\,a\,; \tag{35}$$

a ist also das Drehungsmoment, welches die Torsion um den Winkel 1 erzeugen würde, und welches wir etwa als den Torsionsmodul bezeichnen wollen.

2. Der Draht sei bis zur Zeit $-\frac{\tau}{2}$ untordirt, von $-\frac{\tau}{2}$ bis $+\frac{\tau}{2}$ um den constanten Winkel γ tordirt gewesen; man frägt nach dem Momente D, welches in den folgenden Zeiten auf ihn wirken muss, um der Nachwirkung das Gleichgewicht zu halten, also um den untersten Querschnitt in die Lage zu bringen und daselbst zu erhalten, die er vor der Zeit $-\frac{\tau}{2}$ hatte. Bei diesem Probleme ist in Formel 33)

$$T = -\frac{\tau}{2},\ \vartheta(t) = 0,\ \vartheta(t\ \ \omega) = \gamma \text{ von } t - \omega = -\frac{\tau}{2} \text{ bis } +\frac{\tau}{2}$$

sonst $= 0$ zu setzen, und man erhält, wenn man das bestimmte Integral angenähert ausrechnet,

$$D = -\frac{b\gamma\tau}{t}\,. \tag{36}$$

Fragt man in diesen beiden Fällen nach der Verschiebungsnachwirkung ϑ bei constantem Drehungsmomente D', so ist wieder nahe

$$c - \vartheta = \frac{1}{a}(D - D') \tag{37}$$

zu setzen; aus dem sub 1. betrachteten Falle wird der folgende:

3. Der Draht war untordirt; plötzlich wirkt auf denselben das constante Drehmoment D'.

Nach Verlauf der Zeit t wird dann sein unteres Ende um den Winkel

$$\vartheta = \frac{D'}{a}\left[1 + \frac{b}{a} \log.nat.\left(\frac{t}{\rho}\right)\right] \qquad 38)$$

verdreht erscheinen. Auf diesen Fall kann man leicht folgenden reduciren:

4. Habe durch eine sehr lange Zeit auf den Draht das Drehungsmoment D' gewirkt; plötzlich werde dasselbe aufgehoben. Nach Verlauf der Zeit t sei der untere Querschnitt des Drahtes um den Winkel ϑ gegen die Position verdreht, die er im Momente des Aufhörens des Drehungsmomentes D' hatte; dann ist ϑ wieder durch die Formel 38) gegeben. Dieselbe Formel gilt auch angenähert, wenn der Draht lange Zeit um einen constanten Winkel c tordirt war, und im letzten Momente dieser Drehung das Drehungsmoment D' auf denselben wirkte.

Die Torsion c darf aber nicht unendlich lange Zeit gedauert haben, weil sonst nach den Formeln dieses Abschnittes keine Rückkehr in die alte Position stattfände.

5. Der sub 2. betrachtete Fall aber geht, wenn man nach der Verschiebungsnachwirkung fragt, in folgenden über: der anfangs untordirte Draht wurde während der Zeit τ um einen constanten Winkel γ tordirt erhalten, und dann wieder sich selbst überlassen. In Folge der elastischen Nachwirkung wird er später noch eine kleine Torsion zeigen, und zwar sei dieselbe nach Verlauf der Zeit t gleich ϑ. (Die Zeit t werde von demjenigen Zeitpunkte an gezählt, der in der Mitte zwischen Anfang und Ende der Torsion γ liegt.) Dann hat man

$$\vartheta = \frac{b\gamma\tau}{at}. \qquad 39)$$

Wenn eine dauernde Deformation eintritt, superponirt sich dieselbe wahrscheinlich mit der Nachwirkung; dann ist also ϑ aus der Formel

$$\vartheta = \frac{b\gamma\tau}{at} + c \qquad 40)$$

zu berechnen, wobei c eine neue zu bestimmende Constante ist, die kein t, wohl aber γ und τ enthält.

Aus den sub 1., 3. oder 4. angeführten Beobachtungen können beide Constanten a und b bestimmt werden. ρ ist ganz willkürlich und kann gleich einer Secunde gesetzt werden.

Aus den sub 2. oder 5. angeführten kann nur, aus den ersteren b, aus den letzteren $\frac{b}{a}$ bestimmt werden. Um a und b einzeln zu bestimmen, muss noch die durch ein bestimmtes Drehungsmoment hervorgerufene Torsion und daraus nach Formel 35) der Torsionsmodul a gerechnet werden.

6. Wir wollen endlich noch das Schwingungsproblem der Betrachtung unterziehen, d. h. wir nehmen an, zur Zeit Null sei das am Drahte hängende Gewicht irgendwie in Bewegung versetzt worden; Draht und Gewicht schwinge nun, ohne dass andere als die elastischen Kräfte darauf einwirken; dann ist $D = 0$, für negative t ist $\vartheta(t) = 0$, für positive dagegen ist jedenfalls nahezu

$$\omega(t) = Ce^{-\epsilon t} \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Behufs Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung 29) zur Bestimmung der Constanten ϵ und τ finden wir zunächst:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\left(\frac{4\pi^2}{\tau^2} - \epsilon^2\right) Ce^{-\epsilon t} \sin \frac{2\pi t}{\tau} - \frac{4\pi\epsilon}{\tau} Ce^{-\epsilon t} \cos \frac{2\pi t}{\tau}$$

ferner

$$\int_0^\infty [\vartheta(t) - \vartheta(t-\omega)]\, f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} =$$

$$= Ce^{-\epsilon t} \sin \frac{2\pi t}{\tau} \left[\int_0^\infty f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} - \int_0^t e^{\epsilon\omega} \cos \frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega} \right] +$$

$$+ Ce^{-\epsilon t} \cos \frac{2\pi t}{\tau} \int_0^t e^{\epsilon\omega} \sin \frac{2\pi\omega}{\tau} f(\omega) \frac{d\omega}{\omega}$$

Substituirt man diese Werthe in Gleichung 29) und setzt die mit $\sin\frac{2\pi t}{\tau}$ multiplicirten Glieder, sowie auch die mit $\cos\frac{2\pi t}{\tau}$ multiplicirten separat einander gleich, so erhält man:

$$K\left(\frac{4\pi^2}{\tau^2}-\varepsilon^2\right)=\frac{\pi R^4}{2l}\left[\int_0^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}-\int_0^t e^{\varepsilon\omega}\cos\frac{2\pi\,\omega}{\tau}f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}\right] \quad 41)$$

$$K\frac{4\pi\varepsilon}{\tau}=\frac{\pi R^4}{2l}\int_0^t e^{\varepsilon\omega}\sin\frac{2\pi\,\omega}{\tau}f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}. \quad 42)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass ε und τ nicht exact constant sind; doch sind sie es nahezu, wie aus folgenden Betrachtungen ersichtlich ist. Auf den Werth des Integrals der Formel 42) haben diejenigen Werthe des ω, welche zwischen Null und mässigen ganzen Vielfachen von τ liegen, weitaus den grössten Einfluss. Für diese Werthe des ω kann aber, weil ε klein ist, $e^{\varepsilon\omega}=1$, $\frac{\pi R^4}{2l}f(\omega)=b$ gesetzt werden; es ist also nahezu:

$$\frac{\pi R^4}{2l}\int_0^t e^{\varepsilon\omega}\sin\frac{2\pi\,\omega}{\tau}f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}=b\int_0^\infty\sin\frac{2\pi\,\omega}{\tau}\cdot\frac{d\omega}{\omega}=\frac{b\pi}{2}.$$

Das Integrale $\int f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$ hat wegen der anfangs ausserordentlich langsamen Abnahme von $f(\omega)$, wenn man es von einem endlichen Werthe bis ∞ erstreckt, einen sehr grossen Werth; von 0 bis zu einer endlichen Grenze erstreckt, würde es unendlich. Dies Unendlichwerden ist aber in Formel 42) durch Subtraction des zweiten Integrals compensirt.

Das gesammte Aggregat

$$\int_0^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}-\int_0^t e^{\varepsilon\omega}\cos\frac{2\pi\,\omega}{\tau}f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$$

ist also jedenfalls gleich $\int_{\rho'}^{\infty} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$, wobei ρ' eine endliche Grösse ist, die nicht weit verschieden von der kleinsten positiven Wurzel der Gleichung

$$\int_{\rho}^{\infty} \cos\frac{2\pi\,\omega}{\tau}\frac{d\omega}{\omega} = 0,$$

also wohl auch nicht weit verschieden von $\frac{\tau}{4}$ ist. Wir werden sogleich sehen, dass der Werth des Integrals $\int_{\rho}^{\infty} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$ sich nur äusserst wenig verändert, selbst wenn die untere Grenze ρ bedeutende Änderungen erfährt; wir können also ohne merklichen Fehler ρ mit der in Formel 31) so bezeichneten Grösse identificiren, wodurch wir erhalten:

$$\frac{\pi R^4}{2l}\int_{\rho}^{\infty} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega} = a.$$

Die Bestimmungsgleichungen 41) und 42) für die Schwingungsdauer τ und den Extinctionscoëfficienten ε liefern also jetzt folgende sehr einfache Werthe:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{K}{a}} = \sqrt{\frac{8\pi\,lK}{R^4 A}} \tag{43}$$

$$\varepsilon = \frac{b\,\tau}{8K} = \frac{\pi b}{4\sqrt{aK}} = \sqrt{\frac{\pi^3 R^4 B^2}{32lKA}}. \tag{44}$$

Da wir bereits a als Torsionsmodul kennen gelernt haben, so war der Ausdruck für τ zu erwarten. Das logarithmische Decrement aber ist

$$L = \varepsilon\tau = \frac{\pi^2 b}{2a} = \frac{\pi^2}{2}\frac{B}{A}, \tag{45}$$

wobei A und B blos von dem Materiale des Drahtes abhängige Constanten sind. Das logarithmische Decrement ist also ausser dem Materiale des Drahtes (natürlich auch dessen Zustand, wie

Härtung, Temperatur) von nichts anderem abhängig, welches Gesetz zuerst Streintz auf experimentellem Wege auffand.

Wir können jetzt zeigen, in wie weit das Integrale $\int_\rho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$ von ρ abhängt. Wir haben nämlich

$$\frac{\pi^2}{2L}=\frac{A}{B}=\frac{1}{B}\int_\rho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}.$$

Bei den Versuchen Warburg's und sämmtlicher von Streintz bei gewöhnlicher Temperatur angestellten war $L<0\cdot01$, daher

$$\int_\rho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}>500B.$$

Setzt man statt ρ einen anderen Werth ρ', so erhält man

$$\int_{\rho'}^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}=\int_\rho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}+\int_\rho^{\rho'} f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}.$$

Hier ist das erste Glied der rechten Seite $>500B$, das zweite aber jedenfalls kleiner als $B\log nat.\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)$, weil $f(\omega)$ für mässige ω nahe gleich B, sonst aber kleiner als B ist.

Vergleichen wir also z. B. die beiden Werthe des Integrals $\int_\rho^\infty f(\omega)\frac{d\omega}{\omega}$, wo die untere Grenze einmal eine Secunde, das andere mal ein Tag ist, so ist ρ gleich ein Tag, ρ' gleich eine Secunde zu setzen, dann wird $\log nat.\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)=11\cdot4$.

Selbst bei dieser enormen Verschiedenheit der unteren Grenzen ändert sich daher das bestimmte Integrale nicht einmal um 3 Proc. seines Betrages, was, da wir nur Annäherungsformeln geben, zu vernachlässigen sein dürfte.

Wir können nun aus Beobachtungen, auf welche die Formeln 34) bis 39) anwendbar sind, und welche ich Versuche mit statischer elastischer Nachwirkung nennen will, weil dabei Ge-

schwindigkeiten und Beschleunigungen vernachlässigt werden können, die beiden Constanten a und b oder A und B berechnen und mittelst derselben Schwingungsdauer und Decrement ausrechnen und mit den Beobachtungen vergleichen. Wir können aber auch umgekehrt aus Schwingungsbeobachtungen a und b oder A und B ausrechnen, und dann daraus die statische elastische Nachwirkung in den verschiedenen Fällen berechnen und mit den Beobachtungen vergleichen. Ich bemerke, dass es sich dabei empfiehlt, in jenen Formeln, in denen ρ vorkommt, ρ nicht viel verschieden von $\frac{\tau}{4}$, also von dem vierten Theile der bei den Schwingungsbeobachtungen angewendeten ganzen Schwingungsdauer zu wählen, ohne dass aber selbst enorm verschiedene Werthe des ρ ein bemerkbar anderes Resultat liefern würden.

Freilich stimmen weder die Beobachtungen Kohlrausch's, noch die Neesen's über statische elastische Nachwirkung mit den hier entwickelten Formeln, doch zeigt schon die gänzliche Verschiedenheit der von diesen beiden Beobachtern gefundenen Resultate an, dass man noch einwurfsfreiere Beobachtungen wird abwarten müssen, oder dass vielleicht verschiedene Substanzen sich verschieden verhalten.

Sehr einfach wird die Formel 40), welche dann die Relation zwischen dem logarithmischen Decrement L und der auf eine kurze Torsion folgenden statischen, elastischen Nachwirkung gibt. Sei ein Draht während einer kurzen Zeit τ um einen constanten Winkel γ tordirt gewesen und werde dann sich selbst überlassen. Dann ist die Torsion ϑ, welche nach einer gewissen Zeit t in Folge der elastischen Nachwirkung noch übrig ist, durch die Formel

$$\vartheta = \frac{2\tau L}{\pi^2 t} + c \qquad 46)$$

gegeben. Diese Relation, welche experimentell noch nicht geprüft worden ist, würde den einfachsten Prüfstein für die Brauchbarkeit meiner Formeln liefern, wobei es natürlich wünschenswerth ist, dass die Zeit t, nach welcher die statische elastische Nachwirkung beobachtet wird, von derselben Grössen-

ordnung, wie die Schwingungsdauer ist. Ich bemerke noch, dass die Formeln alle nur Annäherungsformeln sind. Eine weiter getriebene Annäherung, wodurch jedoch grössere Weitläufigkeit erzeugt würde, wäre leicht erzielbar; ich halte sie jedoch vorläufig für vollkommen überflüssig.

Sollten sich diese Formeln in ihren allgemeinen Umrissen bestätigen, so wäre es auch interessant, die Grenzen festzustellen, wo ihre Giltigkeit aufhört, da es nur Annäherungsformeln sind; vielleicht könnte daraus auch eine nähere Bestimmung der bisher ganz unbestimmt gelassenen Function $f(\omega)$ gewonnen werden, was aber nur aus Beobachtungen, die ein sehr grosses Zeitintervall umfassen, möglich wäre.

NACHTRAG.

(Überreicht in der Sitzung am 22. October.)

Experimentelles.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass eine eingehende experimentelle Prüfung der elastischen Nachwirkung einen Aufwand von freier Zeit erfordern würde, welcher mir jetzt keineswegs zur Verfügung steht. Die wenigen Versuche, welche ich hierüber anstellte, und deren Beschreibung ich hier folgen lasse, hatten also nur den Zweck, die Brauchbarkeit meiner Formeln, namentlich des Superpositionsprincips, wenigstens in einigen Fällen nachzuweisen. Sie wurden an einem etwa 5′ langen ausgezogenen Glasfaden angestellt, dessen oberes Ende festgemacht, an dessen unteres aber mit Klebwachs der zur Spiegelablesung dienende Spiegel angeklebt war. Die Scala war in Millimeter getheilt, der Spiegel hatte die Distanz 1380 Mm. vom Fernrohre. Die Elasticitätsgrenze des Glasfadens wurde vor Beginn der Versuche durch öfteres Hin- und Herdrehen des unteren Endes um etwa 540° erweitert und längere Zeit darauf das Fernrohr so gestellt, dass sein Fadenkreuz genau auf den Nullpunkt der Scala einspielte. Jede der hierauf angestellten Versuchreihen bestand aus folgenden Operationen. Das untere Ende des Glasfadens wurde zuerst um 360° gedreht, was ich den Process des Aufwindens nenne; er dauerte etwa 3 Secunden. Dass die Drehung genau 360° betrug, wurde dadurch constatirt, dass bei unverändertem Stande des Auges des Beobachters das Bild irgend eines Gegenstandes im Spiegel wieder an den Ort gelangt war, den es vor dem Drehen gehabt hatte. Dann wurde das untere Ende einige Zeit constant gedreht erhalten, und schliesslich liess man es wieder mit mässiger Geschwindigkeit in die alte Lage zurückkehren, jedoch so, dass möglichst geringe Schwingungen entstanden (Process des Ab-

windens, wieder etwa 3 Sec.). Nun wurde nach Verlauf verschiedener Zeiten t der Scalentheil ϑ beobachtet, welcher mit dem Fadenkreuze coïncidirte. Nach Verlauf einer langen Zeit coïncidirte immer der Theilstrich Null; dauernde Deformation war also nicht zu bemerken. Mit τ bezeichne ich die Zeit, welche von der Mitte des Vorganges des Aufwindens bis zur Mitte des Vorganges des Abwindens verstrich. Die Zeit t zähle ich von der Mitte der Zeit τ an. Die Zeiten sind durchweg in Minuten gemessen. Jeder Beobachtung ist der Werth $\frac{\vartheta t}{\tau}$ beigefügt, der nach Formel 39) constant für alle Beobachtungen sein soll, und es auch in der That mit genügender Annäherung ist.

t	$\tau = \frac{1}{4}'$		$\tau = \frac{1}{2}'$		$\tau = 1'$		$\tau = 2'$	
	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$	ϑ	$\frac{\vartheta t}{\tau}$
2′	5·5	44	11	44	21	42	43	43
3′	3·6	43·2	7·5	45	14	42	28	42
4′	2·8	44·8	5·7	45·6	10·3	41·2	21	42
6′	1·8	43·2	3·9	46·8	7	42	14·2	42·6
8′	1·4	44·8	2·8	44·8	5·3	42·4	10·9	43·6
12′	0·9	43·2	1·9	45·6	3·6	43·2	7·5	45·0
16′	0·7	44·8	1·4	44·8	2·6	41·6	6	48
24′					1·8	43·2	3·7	44·4
32′					1·3	41·6	2·8	44·8

Das Mittel der verschiedenen Werthe von $\frac{\vartheta t}{\tau}$ ist etwa 44.

Um ein Urtheil über die Anwendbarkeit der Formel 39) zu geben, habe ich in derselben $\frac{b\gamma}{a} = 44$ gesetzt, und die daraus berechneten Werthe des s mit den beobachteten in folgender Tabelle zusammengestellt:

t	$\tau = \frac{1}{4}'$ ϑ beob.	berechn.	$\tau = \frac{1}{2}'$ beob.	berechn.	$\tau = 1'$ beob.	berechn.	$\tau = 2'$ beob.	berechn.
2′	5·5	5·5	11	11	21	22	43	44
3′	3·6	3·7	7·5	7·3	14	14·7	28	29·3
4′	2·8	2·8	5·7	5·5	10·3	11	21	22
6′	1·8	1·9	3·9	3·7	7	7·3	14·2	14·7
8′	1·4	1·4	2·8	2·8	5·3	5·5	10·9	11
12′	0·9	1·9	1·9	1·9	3·6	3·7	7·5	7·3
16′	0·7	0·7	1·4	1·4	2·6	2·8	6	5·5
24′					1·8	1·8	3·7	3·7
32′					1·3	1·4	2·8	2·8

Die Grösse $\frac{\vartheta t}{\tau} = 44$ Scalentheilen ist nach Formel 39) gleich $\frac{b\gamma}{a}$, γ, die Verdrehung des untersten Fadenendes während der Zeit τ, war bei meinen Versuchen 2π. 44 Scalentheile entsprechen einer Verdrehung um den Winkel $\frac{44}{2 \times 1380}$ in Bogenmass, und weil diese Grösse gleich $\frac{\gamma b}{a} = \frac{2\pi b}{a}$ sein muss, so folgt $\frac{b}{a} = \frac{44}{4\pi \times 1380}$.

Das nach Formel 45) berechnete logarithmische Decrement würde also den Werth $\frac{44\pi}{8 \times 1380} = 0{\cdot}0013$ annehmen. Um auch diese Formel mit der Erfahrung zu vergleichen, liess ich den Glasfaden Torsionsschwingungen ausführen, wobei jedoch um die Schwingungen zu verlangsamen, unten ein Gewicht von bedeutendem Trägheitsmomente angehängt werden musste, auf welches aber ausser der Torsion des Fadens keine andere Kraft wirkte. Bei den früheren Versuchen hing unten nur der Spiegel und ein Rest der Glasröhre, aus der der Faden ausgezogen worden war. Die doppelten Amplitüden der Torsionsschwingungen waren: 336, 308, 275, 250, 230, 209, 193, 176, 160·3, 145, wobei zwischen je zwei Amplitüden immer 10 Hebschwingungen lagen. Das logarithmische Decrement hieraus berechnet, ergibt sich gleich: 0·00207, 0·00184, 0·00180, 0·00167, 0·00181, 0·00159, 0·00184, 0·00187, 0·00200. Die

Übereinstimmung ist nur gering, da die Beobachtungen nur in roher Weise ausgeführt wurden, namentlich war der Apparat nicht genügend vor Luftströmungen geschützt. Eine andere als beiläufige Übereinstimmung konnte ja ohnedies nicht erwartet werden, da der Luftwiderstand nicht eliminirt wurde. Doch stimmt der Werth wenigstens ungefähr mit dem theoretisch berechneten Werthe des logarithmischen Decrements. Um zu constatiren, dass das angehängte Gewicht die Elasticitätsverhältnisse des Fadens nicht wesentlich verändert hatte, machte ich noch eine Reihe von Nachwirkungsversuchen, wobei das Gewicht angehängt und $\tau = 1'$ war. Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

t	ϑ beob.	ϑ ber.	$\frac{\vartheta t}{\tau}$
2,	22·3	22	44·6
3′	13·8	14·7	41·4
4′	10·5	11	42·5
6′	7·4	7·3	44·4
8′	5·6	5·5	44·8
12′	3·9	3·6	46·8

Es scheint demnach, dass bei Substanzen, bei denen keine dauernde Deformation auftritt, meine Formeln jedenfalls einige Annäherung an die wirklichen Vorgänge bieten. Das Verhalten anderer Substanzen müsste erst näher untersucht werden.

Ich lasse hier noch einige allgemeine Formeln nachfolgen.

Bei der früher für das logarithmische Decrement aufgestellten Formel setzte ich voraus, dass auf das Gewicht, mit dem der Draht belastet ist, keine Kraft ausser der Torsion wirkt.

Wenn auf dieses Gewicht ausserdem noch eine dem Torsionswinkel proportionale Kraft $H\eta$ wirkt, so geht die Bewegungsgleichung über in

$$-K\eta'' = H\eta + \int_0^\infty [\eta(t) - \eta(t-\omega)] \frac{\varphi(\omega)\, d\omega}{\omega}$$

woraus, wenn

$$\eta = A e^{-\varepsilon t} \sin \frac{2\pi t}{\tau}$$

gesetzt wird, folgt:

$$\frac{4\pi^2 K}{\tau^2} = a + H, \quad \varepsilon = \frac{b\tau}{8K}.$$

a und b sind dieselben Constanten wie früher. Wenn man also, wie es Warburg (Berl. Monatsber. 8. Juli 1869) that, das Trägheitsmoment K constant lässt, und die Schwingungsdauer durch Veränderung der Kraft H abändert, so ist nach meinen Formeln der Extinctionscoëfficient ε der Schwingungsdauer proportional, was wenigstens qualitativ mit Warburg's Versuchen stimmt.

Ich bemerke endlich noch, dass die von mir für einen festen Körper mit elastischer Nachwirkung aufgestellten Gleichungen in die für eine Flüssigkeit mit Reibung geltenden übergehen, wenn wir nur annehmen, dass bei der Flüssigkeit die Functionen $\varphi(\omega)$ und $\psi(\omega)$ für sehr kleine ω gross, für alle übrigen ω aber verschwindend klein sind. Dann reducirt sich nämlich

$$\int_0^\infty [u(t) - u(t-\omega)] \frac{\varphi(\omega)\, d\omega}{\omega}$$

auf

$$c \frac{\partial u(t)}{\partial t},$$

wobei c eine Constante ist, und die Formeln 27) gehen über in

$$N_1 = \lambda\theta + c\frac{\partial\theta}{\partial t} + 2c'\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t}, \quad T_1 = c'\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t}\right)\ldots,$$

was mit den Gleichungen für eine mit Reibung begabte Flüssigkeit stimmt, wenn man bedenkt, dass

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}$$

die Geschwindigkeitscomponenten der Theilchen sind. Es wäre interessant, zu erforschen, ob nicht auch das Verhalten weicher oder zähflüssiger Körper durch die Gleichungen 27) gegeben ist, wobei dann das Verhalten der Functionen φ und ψ in der Mitte stehen müsste, zwischen dem die elastische Nachwirkung und dem die innere Reibung charakterisirenden. Dasselbe könnte natürlich nur experimentell bestimmt werden. Es wäre auch nicht uninteressant, durch combinirte Torsions- und Drehungsversuche das Verhältniss der Functionen φ und ψ zu bestimmen. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass φ und c gleich Null sind, dass also für kubische Compression keine Nachwirkung stattfindet.

Über einige an meinen Versuchen über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper anzubringende Correctionen.

Von dem c. M. **Ludwig Boltzmann.**

(Mit 1 Holzschnitte.)

Der erste Theil der folgenden Abhandlung hat den Zweck, möglichst kurz alle Correctionsformeln, welche bei diesen Versuchen zur Anwendung kommen, aus der Theorie der Dielektricität zu entwickeln und ausserdem anzugeben, wie die in meinen Versuchen angewandte Stärke der elektrischen Einwirkung in absolutem Masse gemessen werden kann; in dem zweiten Theile werde ich eine besondere, an einer Paraffinkugel angestellte Versuchsreihe beschreiben, bei welcher mit der grössten Sorgfalt alle zu jenen Correctionen erforderlichen Daten beobachtet wurden, und durch welche nachgewiesen wird, dass jene Correctionen in der That bei der bisher von mir angestrebten und erreichten Genauigkeit keinen bemerkbaren Einfluss auf das Endresultat haben. (Höchstens ein paar Einheiten in der zweiten Decimale.) Zum Schlusse stelle ich die Resultate aller meiner bisherigen Beobachtungen über dielektrische Fernwirkung übersichtlich zusammen.

Formeln.

§. 1. Berücksichtigung, dass der Radius der Kugel, auf welche gewirkt wird, nicht gegen die

---

[1] Ich will meine erste Abhandlung über diesen Gegenstand, welche sich im 68. Bande der Sitzungsberichte der Wiener Akademie befindet, hier immer kurz unter dem Namen „die 1. Abhandlung“ citiren.

Entfernung der wirkenden Elektricitätsquelle verschwindet.

Wir haben es immer mit dem Falle zu thun, dass eine elektrische Kugel auf eine andere dielektrische oder leitende bare isolirte, jedenfalls aber ursprünglich unelektrische einwirkt. Die erstere Kugel nenne ich immer die wirkende, die letztere die bewegliche. Der Fall, dass die letztere leitend ist, ist ein Specialfall des andern, den man dadurch erhält, dass man die Dielektricitätsconstante der beweglichen Kugel gleich Unendlich setzt. Wir werden sehen, dass alle anzubringenden Correctionen nur klein sind; wir können daher voraussetzen, dass sich alle ohne Störung einfach superponiren. Denn die Fehler, welche durch das gleichzeitige Zusammenwirken zweier störender Ursachen hervorgerufen werden, sind jedenfalls klein zweiter Ordnung. Wir wollen daher jetzt annehmen, die auf der wirkenden Kugel befindliche Elektricitätsmenge (in absolutem Masse gemessen) sei in deren Centrum vereinigt und befinde sich in der Distanz p vom Centrum der beweglichen Kugel. Die letztere habe den Radius a und die Dielektricitätsconstante D. (D ist die von Maxwell, Phil. transact. of the Roy. Soc. of London, vol. 155 so bezeichnete Grösse, also gleich $1+4\pi\varepsilon$, nach Helmholtz Borch. Journ. Bd. 72). Es wird gesucht die Kraft, welche die elektrische Masse e auf die Kugel in der Richtung der Verbindungslinie der Centra ausübt. Da die Formeln für die dielektrische Polarisation, so lange sich die Elektricität in Ruhe befindet, zusammenfallen mit denen der Magnetisirung weichen Eisens, so können wir einfach die Formel anwenden, welche für den Fall gilt, dass eine magnetische Masse auf eine magnetisirbare Kugel wirkt (z. B. aus Beer's Einleitung in die Elektrostatik etc. S. 175). Nach Einführung unserer Bezeichnungen (D ist gleich $\frac{1}{1-\varkappa}$ zu setzen, wobei $\varkappa$ die von Beer gebrauchte Constante ist), geht die Formel, welche Beer für die Kraft aufstellt, die die Kugel auf die magnetische Masse ausübt, über in

$$\frac{(D-1)e^2a}{p^3}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n(n+1)}{nD+n+1}\left(\frac{a}{p}\right)^{2n}$$
$$=\frac{2(D-1)e^2a^3}{(D+2)p^5}\left[1+\frac{3(D+2)a^2}{(2D+3)p^2}+\dots\right]. \quad 1)$$

Setzt man darin $D=\infty$, so erhält man für die Anziehung der leitenden Kugel unter denselben Umständen den Werth

$$\frac{e^2a}{p^3}\sum_{n=1}^{n=\infty}(n+1)\left(\frac{a}{p}\right)^{2n}=\frac{2e^2a^3}{p^5}\left[1+\frac{3a^2}{2p^2}+\dots\right]. \quad 2)$$

die letztere Anziehung dividirt durch die ersten liefert also den Quotienten

$$E_s=\frac{D+2}{D-1}\cdot\left[1+\frac{3a^2}{2(2D+3)p^2}\cdot\cdot\right]=E_w\cdot\left[1+\frac{3(E_w-1)a^4}{2(5E_w+1)p^3}\cdot\cdot\right].$$

Wir haben diesen Quotienten mit E_s bezeichnet, weil es derjenige Quotient ist, den die unmittelbare Beobachtung liefern wird, also der scheinbare. Wäre dagegen die wirkende Masse sehr entfernt, so hätte der Quotient der Anziehung der dielektrischen Kugel in die der leitenden den Werth $\frac{D+2}{D-1}$, den ich mit E_w (wahrer Quotient) bezeichne. Die letztgefundene Formel liefert mit Vernachlässigung von kleinen Grössen von der Ordnung $\frac{a^4}{p^4}$:

$$E_w=E_s.\left[1-\frac{3(E-1)a^2}{2(5E+1)p^2}\right]. \quad 3)$$

Der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck ist jener Factor, mit dem man den beobachteten Werth von E noch multipliciren muss, um den wahren Werth des E, welcher gleich $\frac{D+2}{D-1}$ sein soll, zu erhalten. Für meine Versuche im Winter 1873 und später war beiläufig $a=7$ Mm., $p=49$ Mm. (Der Durchmesser im Dimensionenschema soll $14^1/_2$ statt $15^1/_2$ Mm. lauten.)

Jener Factor hatte also folgende Werthe:

Für Schwefel	1—0·0031
„ kleine kryst. Schwefelkugel .	1—0·0031
„ grosse „ „ .	1—0·0040
„ Paraffin	1—0·004
„ Colophonium	1—0·004
„ Hartgummi	1—0·0031

Die Multiplication mit jenem Factor kann also ohne erheblichen Fehler auch unterlassen werden.

§. 2. Wann sind die Ausschläge beider Drehwagen möglichst genau proportional?

Aus Formel 1) ist ersichtlich, dass die auf die bewegliche Kugel wirkende Kraft, wenn man nur das weitaus grösste erste Glied der Reihe berücksichtigt, der 5. Potenz von p verkehrt proportional ist, wodurch die Ableitungsweise der in §. 12 meiner 1. Abhandlung besprochenen Correctionsformel gerechtfertigt ist. Ich will hier noch besprechen, wie die Dimensionen gewählt werden müssen, damit bei verschiedener Elektrisirung der wirkenden Kugeln die Ausschläge beider Drehwagen einander möglichst proportional seien.

Bei der zweiten Drehwage ist die bewegliche Kugel (mit dem Radius a') leitend mit der Erde verbunden; auf sie wirke die elektrische Masse e' in der Distanz p' von ihrem Centrum. Es häufe sich dabei die gesammte Elektricitätsmenge $-\varepsilon$ auf der beweglichen Kugel auf; da in ihrem Innern das Potentiale gleich Null sein muss, so muss, wenn man p gross annimmt, $\frac{e'}{p'} = \frac{\varepsilon}{a'}$ sein. Die Kraft, mit welcher die Elektricitätsmengen e' und $-\varepsilon$ anziehend auf einander wirken, also die Kraft, welche auf die bewegliche Kugel der zweiten Drehkugel wirkt, ist

$$\frac{e'\varepsilon}{p'^2} = \frac{e'^2 a'}{p'^3} \tag{4}$$

Sei φ der Winkelausschlag der ersten, φ' der der zweiten Drehwage, ferner h der Hebelarm FG (Taf. I, Fig. 2 meiner 1. Abhandlung) der ersten, h' der der zweiten Drehwage (PQ

Taf. I, Fig. 3 derselben Abhandlung), so verschiebt sich die bewegliche Kugel der ersten Drehwage um $h\varphi$, die der zweiten um $h'\varphi'$. Auf die bewegliche Kugel der ersten Drehwage wirkt also nach Formel 1) dieser Abhandlung, wenn man darin nur das erste Glied beibehält, die Kraft

$$\frac{2(D-1)\,e^2 a^3}{(D+2)\,(p-h\varphi)^5} = \frac{2(D-1)\,e^2 a^3}{(D+2)\,p^5}\left(1+\frac{5h\varphi}{p}\right).$$

Das Moment, welches dem Momente dieser Kraft das Gleichgewicht hält, ist proportional dem Torsionswinkel, also etwa $= k\varphi$.

Man hat also für die erste Drehwage

$$k\varphi = \frac{2(D-1)\,e^2 a^3 h}{(D+2)\,p^5}\left(1+\frac{5h\varphi}{p}\right). \qquad 5)$$

Freilich ist dabei ausser Acht gelassen, dass die Bifilarkraft auch nicht genau dem Torsionswinkel proportional ist, und dass die elektrische Kraft nach geschehener Ablenkung nicht mehr genau senkrecht auf dem Hebelarme steht. Wenn ursprünglich die Verbindungslinie der wirkenden elektrischen Masse mit dem Centrum der beweglichen Kugel senkrecht auf dem Hebelarme stand, so verursacht letzteres nur einen Fehler, der sich zum Resultate wie $1-\cos\varphi : 1$ verhält, und darf daher, sowie auch die erstere Fehlerquelle vernachlässigt werden. Analog der Formel 5) erhält man für die zweite Drehwage

$$k'\varphi' = \frac{e'^2\, a'\, h'}{p'^3}\left(1+\frac{3h'\varphi'}{p'}\right). \qquad 6)$$

Werden beide wirkenden Kugeln mit dem Potentiale v geladen, so ist e und e' proportional v; etwa $e = bv$, $e' = b'v$, wenn b und b' die Radien der wirkenden Kugeln sind. Aus den Formeln 5) und 6) folgt mit Rücksicht hierauf

$$\varphi = \frac{Mv^2}{k - \frac{5Mhv^2}{p}}, \quad \varphi' = \frac{M'v^2}{k' - \frac{3M'h'v^2}{p'}}, \qquad 7)$$

wobei

$$M = \frac{2(D-1)b^2 a^3 h}{(D+2)p^5}, \quad M' = \frac{b'^2 a' h'}{p'^3}.$$

Es ist also

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{M}{M'} \frac{k' - \frac{3M'h'v^2}{p'}}{k - \frac{5Mhv^2}{p}}.$$

Die negativen Glieder im Zähler und Nenner der rechten Seite sind klein. In denselben kann man daher M und M' statt aus den Gleichungen 7) aus folgenden berechnen:

$$\varphi = \frac{Mv^2}{k}, \quad \varphi' = \frac{M'v^2}{k'} \tag{8}$$

und erhält dann:

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{Mk'}{M'k} \cdot \frac{1 - \frac{3h'\varphi'}{p'}}{1 - \frac{5h\varphi}{p}} = \frac{Mk'}{M'k} \cdot \left[1 - \frac{3h'\varphi'}{p'} + \frac{5h\varphi}{p}\right]$$

Der erste Factor rechts ist unabhängig von der Stärke der Ladung. Die beiden letzten Glieder in der eckigen Klammer sind jedes proportional dem Quadrate der Ladung. Soll daher $\frac{\varphi'}{\varphi}$ mit variirender Ladung nur um kleine Grössen höherer Ordnung variiren, so muss

$$\frac{3h'\varphi'}{p'} = \frac{5h\varphi}{p} \tag{9}$$

sein. Dies könnte bei der dielektrischen und Metallkugel nur dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn die erstere viel grösser wäre, so dass bei gleichen φ' auch φ für beide gleich ausfiele. In Wirklichkeit wird sich diese Relation nur in ziemlich roher Annäherung erfüllen lassen.

Da man über φ und φ' nicht von vorneherein verfügen kann, so ist es besser, statt derselben die Trägheitsmomente T und T' der zwei Drehwagen einzuführen. Ist τ die beiden gemeinsame Dauer einer ganzen Schwingung, so hat man

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{T}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{T'}{k'}},$$

daher $Tk' = T'k$. Berücksichtigt man dies in Gleichung 9) und drückt φ und φ' durch die Gleichungen 8) aus und substituirt schliesslich für M und M' ihre Werthe, so ergibt sich

$$\frac{10(D-1)}{3(D+2)} \frac{b^2 a^3 p'^4}{p^6 b'^2 a'} \frac{T' h^2}{T h'^2} = 1. \tag{10}$$

Soll die Bedingung erfüllt sein, wenn eine leitende Kugel in die erste Drehwage eingehängt ist, so muss man $D = \infty$ setzen.

§. 3. Berechnung der bei meinen Versuchen wirksamen Kraft in absolutem Masse.

k und k' können leicht aus den Gleichungen

$$k = \frac{4\pi^2 T}{\tau^2}, \quad k' = \frac{4\pi^2 T'}{\tau'^2}$$

in absolutem Masse berechnet werden. Für die erste Drehwage liefert die Formel 5) unter Vernachlässigung des 2. Gliedes

$$e^2 = \frac{(D+2) p^5 . 2\pi^2 T \varphi}{(D-1) a^3 h \tau^2}.$$

Bezeichnet A den einfachen Ausschlag (die Anzahl der Millimeter, welche am Fadenkreuz vorbeigehen mussten, damit die Scala aus der Ruhelage in die abgelenkte kam) und d die Distanz der Fernrohre von den Spiegeln, so ist $\varphi = \frac{A}{2d}$, daher

$$e^2 = \frac{\pi^2 (D+2) p^5 T A}{(D-1) a^3 h \tau^2 d} = \frac{\pi^2 E p^5 T A}{a^3 h \tau^2 d}, \tag{11}$$

also sobald die leitende Kugel eingehängt ist,

$$e^2 = \frac{\pi^2 p^5 T A}{a^3 h \tau^2 d}. \tag{12}$$

Die Kraft, welche im Innern der dielektrischen Kugel wirksam ist, wird leicht in folgender Weise in absolutem Masse bestimmt. Sei α das elektrische Moment der Volumeinheit der Kugel. Dann übt dieselbe auf eine im Innern befindliche elektrische Masse die Kraft $-\frac{4\pi\alpha}{3}$ aus. Die elektrische Masse e aber übt, wenn sie weit entfernt ist, die Kraft $\frac{e}{p^2}$ aus. Nach der Grundgleichung der Dielektricität (vergl. Helmholtz, Borchh. Journ. Bd. 72) ist das elektrische Moment der Volumeinheit gleich der mit der Constante ε multiplicirten gesammten Kraft, also

$$\alpha = \varepsilon\left(\frac{e}{p^2} - \frac{4\pi\alpha}{3}\right),$$

woraus

$$\alpha = \frac{\frac{\varepsilon e}{p^2}}{1 + \frac{4\pi\varepsilon}{3}} = \frac{3}{4\pi} \frac{D-1}{D+2} \frac{e}{p^2}.$$

Die auf eine im Innern der Kugel befindliche elektrische Masse 1 wirkende Gesammtkraft aber ist

$$\frac{3}{D+2} \frac{e}{p^2} = \frac{E'-1}{E} \cdot \frac{e}{p^2}. \qquad 13)$$

Für die zweite Drehwage würde man erhalten:

$$e'^2 = \frac{p'^3}{a'h'} \frac{2\pi^2 T'}{\tau'^2} \frac{A'}{d'}. \qquad 14)$$

Das Potentiale im Innern der wirkenden Kugel ist für die erste Drehwage $\frac{e}{b}$, für die zweite $\frac{e'}{b'}$. Es muss also $\frac{e}{b} = \frac{e'}{b'}$ sein.

Bei den im Sommer 1872 angestellten Versuchen war

$T = 44900$ Mm.$^2 \times$ Gramm. (Masse).
$\tau = 22\frac{1}{2}$ Sec.
$p = 62$ Mm., $a = 7 \cdot 3$ Mm., $h = 67$ Mm., $b = 20\frac{1}{2}$ Mm.

$T' = 1{,}450.000\ \text{Mm.}^2 \times \text{Gramm.}$ [1]
$p' = 67^{\text{mm}},\ a' = 8\ \text{Mm.},\ h' = 212\ \text{Mm.},\ b' = 8\ \text{Mm.}$
$d = d' = 2200\ \text{Mm.}$

Bei den in Tabelle III meiner ersten Abhandlung zusammengestellten, bei der Schlagweite 1·3 Mm. an Paraffin angestellten Versuchen war A etwa gleich 17 Mm., $E = 1\cdot 3$, woraus sich e etwa gleich $520 \frac{\text{Mm.}^{3/2} \times \text{Gramm.}^{1/2}(\text{Masse})}{\text{Sec.}}$ ergibt. Im Innern der Paraffinkugel wirkte auf die Elektricitätsmenge 1 die Kraft $0\cdot 03 \frac{\text{Gramm.} \times \text{Mm.}}{\text{Sec.}^2}$, wobei Elektricitätsmenge 1 diejenige ist, die in Luft einer gleichen, in der Distanz 1 Mm. an die Masse eines Gramms gehefteten, in der Secunde die Beschleunigung eines Millimeters ertheilt.

Bei anderen Schlagweiten verhalten sich diese Kräfte wie die Quadratwurzeln der Ausschläge.

Bei der Schwefelkugel (Schlagweite 1·3 Mm.) ist diese Kraft 0·08. Das Potentiale, mit dem die wirkenden Kugeln geladen waren, erhält man, wenn man e durch den Radius der wirkenden Kugel dividirt. Es war also $\frac{520}{20^{1/2}} = 25 \frac{\text{Gramm.}^{1/2} \times \text{Mm.}^{1/2}}{\text{Sec.}}$

Aus dem Ausschlage der zweiten Drehwage ergibt sich nach Formel 14) für dieses Potentiale der Werth $30 \frac{\text{Gramm.}^{1/2}\ \text{Mm.}^{1/2}}{\text{Sec.}}$

Da sich die Elektricität bei meinen Versuchen immer auf 2 nahe gleiche Leydnerflaschen vertheilte, so ist die Potentialdifferenz, welche einen Funken von 1·3 Mm. Länge erzeugte, etwa doppelt so gross. Doch beanspruchen diese Angaben über absolute Werthe nur die Bestimmung der Grössenordnung der bei mir wirksamen Kräfte. Um eine numerische Genauigkeit zu erzielen, hätte der Apparat ganz anders eingerichtet werden müssen, was ich unterliess, da absolute Massbestimmung nicht der Zweck meiner Untersuchung war.

---

[1] Durch einen Druckfehler wurde bei diesem Trägheitsmomente im Dimensionenschema eine Null vergessen.

Bei meinen ersten, mit der grossen aus einem Schwefelkrystall geschliffenen Kugel angestellten Versuchen (vergl. diesen Band der Sitzungsber. Tab. I) war, wenn ich die an der Metallkugel angestellten Beobachtungen der Rechnung zu Grunde lege,

$$T = 37953 \text{ Gramm (Masse) Mm.}^2$$
$$p = 49 \text{ Mm.},\ a = 7\cdot 3 \text{ Mm.},\ h = 40\cdot 8 \text{ Mm.},\ b = 20^1/_2 \text{ Mm.}$$
$$T' = 670.000,\ p' = 82 \text{ Mm.}$$
$$a' = 12\cdot 9 \text{ Mm.},\ h' = 84 \text{ Mm.},\ b' = 8 \text{ Mm.}$$
$$d = d' = 2300 \text{ Mm.},\ \tau = \tau' = 25 \text{ Sec.},\ A = 49 \text{ Mm.},$$

woraus man für die erste Drehwage findet

$$e = 518 \frac{\text{Mm.}^3/_2 \text{ Gramm.}^1/_2}{\text{Sec.}}.$$

Das Potential im Innern der wirkenden Kugeln war

$$= \frac{518}{20\cdot 5} = 25 \frac{\text{Mm.}^1/_2 \text{ Gramm.}^1/_2}{\text{Sec.}};$$

für die zweite Drehwage erhält man dieses Potentiale gleich 30.

Die bei gleicher Ladung der wirkenden Kugel auf die Elektricitätseinheit im Innern der Schwefelkugel wirkende Kraft aber ist, wenn die Wirkung parallel der Halbirungslinie des spitzen Winkels der optischen Axen geschieht, 0·11, wenn dagegen parallel der des stumpfen, 0·091.

Um diese Kräfte mit denen zu vergleichen, welche bei meinen Condensatorversuchen (siehe Sitzungsber. d. Wiener Acad. Bd. 67) im Innern des Dielektricums auf die Dielektricitätsmenge 1 wirkten, können folgende Betrachtungen dienen. Nach Thomson (Phil. mag. 4. ser. vol. 20, oder Papers on electrostatic, p. 246) üben zwei Metallplatten von 1□′ Oberfläche in $^1/_{100}{}'$ Entfernung eine Kraft von dem Gewichte von 55 Grain auf einander aus, wenn eine zur Erde abgeleitet, die andere mit einem Pole einer Batterie von 1000 Daniell verbunden ist, deren anderer Pol ebenfalls zur Erde abgeleitet ist.

Sei v das Potential auf der nicht abgeleiteten Platte, q deren Flächeninhalt, d die Plattendistanz, so ist die Flächendichte der darauf angesammelten Elektricität gleich

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dN_a}-\frac{dV}{dN_i}\right)=\frac{1}{4\pi}\frac{v}{d},$$

da

$$\frac{dV}{dN_a}=\frac{v}{d},\ \frac{dV}{dN_i}=0$$

ist. Die gesammte auf einer Platte befindliche Elektricität ist also

$$e=\frac{1}{4\pi}\frac{vq}{d}.$$

Die Kraft, welche auf eine elektrische Masse ε, die sich zwischen den Platten befindet, normal zur Platte wirkt, ist $\varepsilon\frac{dV}{dN_a}$, und zwar geht die Hälfte dieser Kraft von der Elektricität aus, die sich auf der einen Platte befindet, die andere Hälfte von der auf der andern. Daraus folgt, dass die Kraft, welche die Elektricität der einen Platte auf die der andern ausübt, den Werth

$$\frac{e}{2}\frac{dV}{dN_a}=\frac{1}{8\pi}\frac{v^2q}{d^2}$$

hat, wie man übrigens auch leicht durch directe Berechnung der Anziehung einer unendlichen Scheibe auf einen Punkt findet, woraus folgt

$$v^2=\frac{8\pi k d^2}{q}. \tag{15)}$$

Nun war bei Thomson

$$\frac{d^2}{q}=\frac{1}{10000},$$

k gleich dem Gewichte von 55 Grain, gleich dem Gewichte von $\frac{55\cdot3}{15\cdot432}=3\cdot57$ Gramm. (nach späteren Beobachtungen beträgt dieses Gewicht $5\cdot7$ Gramm.; — ich will die Zahlen, bei deren Berechnung diese letztere Zahl zu Grunde gelegt ist, in einer Klammer beifügen), also in unseren Massen

$$k = 3\cdot 564 \times 9810 \frac{\text{Gramm.(Masse)} \times \text{Mm.}}{\text{Sec.}^2}.$$

Die Formel 15) liefert also

$$v = 9\cdot 4 (11\cdot 9) \frac{\text{Gramm.}^{1/2}\,\text{Mm.}^{1/2}}{\text{Sec.}}.$$

Das Potentiale am Pole eines Daniell'schen Elementes ist also, wenn der andere zur Erde abgeleitet ist,

$$0\cdot 0094 (0\cdot 0119) \frac{\text{Gramm.}^{1/2}(\text{Masse})\,\text{Mm.}^{1/2}}{\text{Sec.}}.$$

Branly (Compt. r. 1872, p. 431) findet für dieses Potentiale den Werth

$$0\cdot 00039 \frac{\text{Milligramm.}^{1/2}\text{Gewicht}}{\text{Mm.}^{1/2}} = 0\cdot 00104 \frac{\text{Mm.}^{1/2}\text{Grm.}^{1/2}\text{Masse}}{\text{Sec.}}$$

Nach Thomson sind 5500 Daniell nothwendig, um einen Funken von $^1/_{20}{}'' = 1\cdot 27$ Mm. Länge zu erzeugen. Dieselben liefern nach dem Obigen die Potentialdifferenz

$$42 (53) \frac{\text{Gramm.}^{1/2}\,\text{Mm.}^{1/2}}{\text{Sec.}}.$$

Eine grössere Übereinstimmung mit dem von mir bei gleicher Schlagweite gefundenen Potentialwerthe war nicht zu erwarten. (Bei Thomson sprang der Funke zwischen Platten, bei mir zwischen Kugeln über, wobei sich ein Theil der Elektricität rasch in der Leydnerflasche verlor.) Doch glaube ich, dass sich bei genügender Sorgfalt mein Apparat auch zu derartigen Messungen eignen würde.

Bei meinen Messungen an der Paraffinplatte II z. B. (Sitzb. d. Wien. Akad. Bd. 67, §. 8) war zwischen den Condensatorplatten ausser einer Paraffinschicht von 2·3276 Mm. Dicke noch eine Luftschicht von 0·28 Mm. Dicke. Letztere entspricht einer Paraffinschicht von 0·655 Mm. Dicke. Die Platten luden sich also gerade so, als ob sie sich in einer Distanz von 2·98 Mm. befunden hätten und nur Paraffin dazwischen gewesen wäre.

Die Potentialdifferenz war dabei die an den beiden Polen von 18 Daniell'schen Elementen, also gleich

$$0 \cdot 17 (0 \cdot 21) \frac{\text{Gramm.}^{1/2} \text{Mm.}^{1/2}}{\text{Sec.}}.$$

Dividirt man durch die Distanz der Platten, also durch 2·98 Mm., so erhält man den Differentialquotienten des Potentials normal zu den Platten; multiplicirt man denselben mit der Elektricitätsmenge 1, also mit $1 \frac{\text{Gramm.}^{1/2} \text{Mm.}^{3/2}}{\text{Sec.}}$, so erhält man die Kraft, welche im Innern der Paraffinplatte auf die Elektricitätsmenge 1 wirkte. Dieselbe war also

$$0 \cdot 06 (0 \cdot 07) \frac{\text{Gramm.} \times \text{Mm.}}{\text{Sec.}^2}$$

Es war somit die auf die Elektricitätsmenge 1 im Innern des Dielektricums wirkende Kraft bei meinen Condensatorversuchen nahe so gross, wie bei denen über dielektrische Fernwirkung. Dass sich bei den ersteren Versuchen keine, bei letzteren aber, wenn Paraffin und Colophonium untersucht wurde, so bedeutende elektrische Nachwirkung zeigte, kann nicht von der verschiedenen Stärke der elektrischen Einwirkung herrühren, sondern höchstens von der Verschiedenheit des Materials oder der Art und Weise und des zeitlichen Verlaufs der Ladung, und ist mir überhaupt gegenwärtig noch etwas räthselhaft. Mit Zugrundelegung der Messungen Branly's wurde übrigens diese Zahl fast zehnmal so klein.

§. 4. Berücksichtigung, dass die auf der wirkenden Kugel befindliche Elektricitätsmenge nicht in einem Punkte concentrirt ist.

Sei b der Radius der wirkenden Kugel, $+e$ die darauf befindliche Elektricitätsmenge. Wir nehmen das Centrum der wirkenden Kugel als Coordinatenanfang und ziehen die Abscissenaxe gegen das Centrum der beweglichen hin. Dann ist das elektrische Moment der Volumeinheit der beweglichen Kugel $\frac{3}{4\pi E} \frac{e}{p^2}$; das wirkliche elektrische Moment der Kugel ist also

$\frac{1}{E}\frac{ea^3}{p^2}$. Dieselbe wirkt also nach aussen, wie zwei elektrische Massen $-\frac{ea^3}{Ep^2\lambda}=e_1$ und $+\frac{ea^3}{Ep^2\lambda}=e_2$, von denen die erstere im Centrum der beweglichen Kugel, die letztere aber um λ weiter von der fixen entfernt auf der Centrallinie sich befindet. Erstere hat also die Abscisse p, letztere die Abscisse $p+\lambda$. Dieses Verfahren, die Wirkung magnetischer oder dielektrischer Körper zu bestimmen, welches meist am kürzesten zum Ziele führt, wurde zuerst von Stefan (Sitzber. d. Wien. Acad. Bd. 69) angegeben. Die von der erstern auf die wirkende Kugel inducirte Elektricität wirkt so nach aussen, wie die elektrische Masse

$$-\frac{e_1 b}{p}=\frac{ea^3}{Ep^2\lambda}\cdot\frac{b}{p}=e_3$$

mit der Abscisse $\frac{b^2}{p}$. Die von der letzteren inducirte Elektricitätsmenge wirkt nach aussen, wie die Menge

$$-\frac{e_2 b}{p}=-\frac{ea^3}{Ep^2\lambda}\cdot\frac{b}{p+\lambda}=e_4$$

mit der Abscisse $\frac{b^2}{p+\lambda}$. Die vier Massen e_1, e_2, e_3 und e_4 erzeugen in der wirkenden Kugel zusammen das Potential Null, so dass also das Gesammtpotentiale in der wirkenden Kugel noch immer $\frac{e}{b}$ ist.

Die Anziehung von e_3 auf e_1 und e_2 zusammen ist:

$$-\frac{e_3 e_1}{\left(p-\frac{b^2}{p}\right)^2}-\frac{e_3 e_2}{\left(p-\frac{b^2}{p}+\lambda\right)^2}=+\frac{2\lambda}{\left(p-\frac{b^2}{p}\right)^3}e_3 e_2=$$

$$+\frac{2e^2a^6b}{E^2p^5\lambda\left(p-\frac{b^2}{p}\right)^3}.$$

Die von e_4 auf e_1 und e_2 zusammen ist:

$$-\frac{e_4 e_1}{\left(p-\frac{b^2}{p+\lambda}\right)^2}-\frac{e_4 e_2}{\left(p-\frac{b^2}{p+\lambda}+\lambda\right)^2}=+\frac{2\lambda}{\left(p-\frac{b^2}{p+\lambda}\right)^3}e_4 e_2=$$

$$-\frac{2e^2 a^6 b}{E^2 p^4 (p+\lambda)\lambda\left(p-\frac{b^2}{p+\lambda}\right)^3},$$

folglich ist die gesammte Anziehung der Massen e_3 und e_4 auf e_1 und e_2:

$$\frac{2e^2 a^6 b(p^2+2b^2)}{E^2 p^3 (p^2-b^2)^4}. \qquad 16)$$

Natürlich wirken die beiden Massen e_3 und e_4 wieder inducirend auf die bewegliche Kugel.

Die elektrische Masse e_3 inducirt daselbst Elektricität, welche so nach aussen wirkt, wie zwei elektrische Massen:

$$e_5=-\frac{a^3 e_3}{E\left(p-\frac{b^2}{p}\right)^2\lambda}=-\frac{e a^6 b}{E^2 p^3 \lambda^2\left(p-\frac{b^2}{p}\right)^2}$$

und $e_6=-e_5$ mit den Abscissen p und $p+\lambda$. Die Masse e_4 hingegen inducirt Elektricität, die so wirkt, wie die zwei Massen

$$e_7=-\frac{a^3 e_4}{E\left(p-\frac{b^2}{p+\lambda}\right)^2\lambda}=+\frac{e a^6 b}{E^2 p^2 \lambda^2 (p+\lambda)\left(p-\frac{b^2}{p+\lambda}\right)^2}$$

und $e_8=e_7$ mit den Abscissen p und $p+\lambda$.

Wir haben also im Ganzen

$$e_5+e_7=-\frac{e a^6 b(p^2+b^2)}{E^2 p^5\left(p-\frac{b}{p}\right)^3\lambda}$$

und $e_6+e_8=-e_5-e_7$ mit den Abscissen p und $p+\lambda$.

Die ursprünglich auf der wirkenden Kugel vorhandene Elektricitätsmenge e übt auf alle diese Massen die Anziehung

$$\frac{2e^2 a^6 b(p^2+b^2)}{E^2 p^5 (p^2-b^2)^3} \qquad 17)$$

aus. Die gesammte Mehranziehung, welche die bewegliche Kugel in Folge der Influenzirung der wirkenden erfährt, ist also die Summe von 16) und 17), hat also den Werth

$$\frac{2e^2 a^6 b(2p^4+2p^2 b^2-b^4)}{E^2 p^5 (p^2-b^2)^4}. \tag{18)}$$

Natürlich wirken auch die elektrischen Massen e_5+e_7 und e_6+e_8 wieder influenzirend auf die wirkende Kugel, und die Massen e_3 und e_4 anziehend auf e_5+e_7 und e_6+e_8 u. s. w., wodurch eine unendliche Reihe entsteht, deren auf das Glied 18) folgendes aber, was die Grössenordnung betrifft, wieder im Verhältnisse $\frac{a^3 b}{p^4}$ kleiner ist, als das Glied 18). Bleiben wir bei dem Gliede 18) stehen, so ist die Anziehung der beweglichen dielektrischen Kugel

$$\frac{2e^2 a^3}{Ep^5}+\frac{2e^2 a^6 b(2p^4+2p^2 b^2-b^4)}{E^2 p^5 (p^2-b^2)^4}.$$

Dabei ist wohl zu bemerken, dass die auf der fixen Kugel befindliche Elektricitätsmenge jetzt

$$e+e_3+e_4=e+\frac{e a^3 b}{Ep^4}$$

ist. Das Potentiale in ihrem Innern aber ist noch immer $\frac{e}{b}$. Das gesammte elektrische Moment der beweglichen Kugel ist

$$M=\frac{e a^3}{Ep^2}\left(1+\frac{a^3 b (p^2+b^2)}{E(p^2+b^2)^3}\right),$$

das Potentiale im Innern derselben

$$\frac{M}{a^3}+\frac{e}{p+x}+\frac{e_3}{p-\frac{b^2}{p}+x}+\frac{e_4}{p-\frac{b^2}{p+\lambda}+x}=\frac{e}{p}\left(1+\frac{a^3 b}{E(p^2-b^2)^2}\right).$$

Hängen wir statt derselben eine Metallkugel ein, so ergibt sich deren Anziehung, indem man $E=1$ setzt; sie ist also, wenn die Grösse der Metallkugel dieselbe ist:

$$\frac{2e^2a^3}{p^5}+\frac{2e^2a^6b(2p^4+2p^2b^2-b^4)}{p^5(p^2-b^2)^4}.$$

Der Quotient

$$\frac{\text{Anziehung d. Metallkugel}}{\text{Anziehung d. dielektr. Kugel}}$$

wird also sein:

$$E\left[1+\frac{E-1}{E}\cdot\frac{a^3b(2p^4+2p^2b^2-b^4)}{(p^2-b^2)^4}\right] \qquad 19)$$

und man muss den beobachteten Werth von E durch den in der Klammer stehenden Ausdruck dividiren, wenn man dieser Correction Rechnung tragen will, d. h. wenn man denjenigen Quotienten finden will, welcher sich herausstellen würde, wenn die wirkende Kugel ein mathematischer Punkt wäre. Die Superposition der hier und der in §. 1 discutirten Correction wäre vollkommen unbedenklich, wenn sich nicht sowohl in dem einen, als auch in dem anderen Falle die Glieder mit den ersten Potenzen der sehr kleinen Grössen tilgten, und erst die mit höhern den Ausschlag gäben. Dadurch könnte man zu glauben veranlasst werden, dass durch das gleichzeitige Zusammenwirken der in den §§. 1 und 4 discutirten Ursachen Glieder von derselben Grössenordnung erzeugt würden. Dass dies nicht der Fall ist, sieht man ein, indem man b noch viel kleiner als a wählt. Setzt man zuerst $b=0$, so erhält man die Wirkung der Kugeln in die jedenfalls convergirende, nach Potenzen von a fortschreitende Reihe des §. 1 entwickelt; in derselben Form würde auch das Potentiale erscheinen. Nun erst sucht man den Inbegriff der mit b multiplicirten Glieder, die wieder eine nach Potenzen von a fortschreitende Reihe bilden. Das mit der niedrigsten Potenz von a behaftete findet man, indem man die vertheilende Wirkung des mit der niedrigsten Potenz von a behafteten Gliedes der Potentialreihe auf die wirkende Kugel aufsucht; es ist also das in §. 4 entwickelte. Sowohl durch Betrachtung der späteren Glieder der Potentialreihe, als auch durch Fortsetzung der unmittelbar nach Entwicklung der Formel 18) angedeuteten Operationen erhält man lauter Glieder mit

höheren Potenzen von a als der sechsten. Dasselbe findet man aber auch direct, indem man b gar nicht als klein ansieht, und nur nach Potenzen von a entwickelt. Die Anziehung zweier leitender Kugeln finde ich dann gleich

$$\frac{2e^2 a^3}{p^5}\left[1+\frac{3a^2}{2p^2}+\frac{a^3 b(2p^4+2p^2 b^2-b^4)}{(p^2-b_2)^4}+\frac{2a^4}{p^4}+\ldots\right],$$

also in Übereinstimmung mit der Superposition der Resultate der §§. 1 und 4.

Bei den von mir im Winter 1873 und später angestellten Versuchen war etwa $p=49$ Mm., $b=20^1/_2$ Mm., $a=7\cdot 3$ Mm., daher hatte der in der Klammer stehende Ausdruck den Werth $1+0\cdot 0067\,\frac{E-1}{E}$. Die Division durch diesen Ausdruck würde also nicht einmal die zweite Decimalstelle um eine Einheit vermindern. In Folge der Einwirkung der mit Staniol überzogenen Kastenwände war das Feld wahrscheinlich noch homogener, daher die anzubringende Correction noch geringer. Ich habe desshalb auch das Anbringen dieser, sowie der in §. 1 angegebenen Correction lieber ganz unterlassen, und mein Zweck hier war nicht so sehr, dieselben numerisch zu bestimmen, als vielmehr ihre verschwindende Kleinheit darzuthun. Bei der grösseren, aus Schwefelkrystall geschliffenen Kugel, sowie bei den von Romich und Nowak untersuchten Krystallkugeln war der Radius der isolirenden Kugel erheblich grösser als der der Metallkugel, und daher der Betrag dieser Correction noch geringer.

§. 5. Berechnung der dielektrischen Anziehung auf Ellipsoide.

Um zunächst eine beiläufige Vorstellung zu erhalten, welchen Einfluss die Abweichungen der beweglichen Kugel von der Kugelgestalt auf das Endresultat haben, wollen wir zunächst einen einfachen Fall betrachten, der sich leicht der Rechnung unterziehen lässt, nämlich, dass der in der ersten Drehwage eingehängte Körper, den wir bisher die bewegliche Kugel genannt haben, ein Rotationsellipsoid ist und die Wirkung paral-

lel oder senkrecht zur Rotationsaxe stattfindet. Einstweilen soll nicht vorausgesetzt werden, dass die Axen des Ellipsoides nahe gleich sind; doch soll die wirkende Kugel soweit entfernt vorausgesetzt werden, dass bei Berechnung der Dielektrisirung des Ellipsoides das Feld als homogen betrachtet werden darf. Ich benütze als die kürzeste wieder die bereits erwähnte Stefan'sche Methode. Ein beliebiges mit Masse von der Dichte ρ gleichförmig erfülltes Ellipsoid mit den Halbaxen a, b, c, erstere parallel der Abscissenaxe, übt auf eine Masseneinheit, die sich im Punkte x, y, z befindet, wenn sich dieser Punkt im Innern des Ellipsoides befindet, in der Richtung der Abscissenaxe die Kraft

$$X_1 = -4\pi\rho bcx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{(a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta)(a^2\sin^2\vartheta + c^2\cos^2\vartheta)}}$$

aus. Die Masseneinheit ist dabei so gewählt, dass zwei Masseneinheiten in der Distanz 1 die Kraft 1 auf einander ausüben; die Kraft zweier Massenpunkte ist verkehrt proportional dem Quadrate ihrer Distanz. Ist über dieses Ellipsoid noch ein zweites gelagert, das sich von dem ersten nur dadurch unterscheidet, dass es um das sehr kleine Stück λ in der Richtung der negativen Abscissenaxe verschoben ist, und mit Masse von der Dichte $-\rho$ erfüllt ist, so übt dieses letztere auf die Masseneinheit im Punkte x, y, z in der Richtung der Abscissenaxe die Kraft

$$X_2 = 4\pi\rho bc(x-\lambda) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta}{\sqrt{(a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta)(a^2\sin^2\vartheta + c^2\cos^2\vartheta)}}$$

aus. Beide zusammen wirken gerade so, wie ein dielektrisch polarisirtes Ellipsoid von derselben Gestalt, das in der Volumeinheit das elektrische Moment $\rho\lambda = \sigma$ besitzt. Letzteres übt also auf die Masseneinheit im Punkte x, y, z die Kraft $X_1 + X_2$ aus. Befindet sich nun dieses Ellipsoid in einem homogenen elektrischen Felde, in dem auf eine elektrische Masseneinheit von aussen nur in der Richtung der Abscissenaxe eine Kraft von der Intensität A wirkt, so ist die gesammte, im Ellipsoid auf die Elektricitätseinheit wirkende Kraft nach der Abscissenaxe

gerichtet, und hat die Stärke $A+X_1+X_2$. Soll die angenommene Dielektrisirung durch jene von aussen wirkende Kraft inducirt worden sein, so muss nach der Theorie der Dielektricität $\sigma=\varepsilon(A+X_1+X_2)$ sein, woraus sich ergibt

$$\sigma=\frac{\varepsilon A}{1+4\pi\varepsilon bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{(a^2\sin^2\vartheta+b^2\cos^2\vartheta)(a^2\sin^2\vartheta+c^2\cos^2\vartheta)}}} \qquad 20)$$

Wirken auch in der Richtung der übrigen Halbaxen elektrische Kräfte, so werden auch in jenen Richtungen elektrische Momente inducirt, die durch ganz analoge Formeln gegeben werden und sich superponiren. Ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, so verwandeln sich die elliptischen Transcendenten in gewöhnliche. Wenn die Rotationsaxe mit der Elektrisirungsrichtung zusammenfällt, hat man zu setzen $b=c$ und erhält für das abgeplattete Rotationsellipsoid, also für $b>a$

$$\sigma=\frac{\varepsilon A}{1+\frac{4\pi\varepsilon b^2}{b^2-a^2}\left[1-\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\,arc\,tg\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right]}, \qquad 21)$$

für das verlängerte Rotationsellipsoid, also für $b<a$ aber

$$\sigma=\frac{\varepsilon A}{1-\frac{4\pi\varepsilon b^2}{a^2-b^2}\left[1-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\log nat\left(\frac{a}{b}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\right]} \qquad 22)$$

Geschieht dagegen die Wirkung senkrecht zur Rotationsaxe, so hat man zu setzen $a=c$ und findet für das abgeplattete Rotationsellipsoid, also für $a>b$

$$\sigma=\frac{\varepsilon A}{1+\frac{2\pi\varepsilon b}{a^2-b^2}\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,arc\sin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}-b\right]}, \qquad 23)$$

und für das verlängerte Rotationsellipsoid, also für $a<b$

$$\sigma=\frac{\varepsilon A}{1+\frac{2\pi\varepsilon b}{b^2-a^2}\left[b-\frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\log nat\, b+\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right]} \qquad 24)$$

Geht die Kraft von einer in der Distanz p vom Centrum des Ellipsoids auf der Abscissenaxe befindlichen elektrischen Masse e aus, so ist $A=\frac{e}{p^2}$ zu setzen, und es handelt sich noch um die anziehende Kraft, welche ein in dieser Weise dielektrisirtes Rotationsellipsoid auf jene Masse ausübt. Dieselbe ist, wenn die Wirkung in der Richtung der Rotationsaxe geschieht, und mit v das Volum des Ellipsoids bezeichnet wird, für das abgeplattete Ellipsoid, also für $b>a$

$$3\frac{v\sigma c}{(b^2-a^2)^{3/2}}\left[arc\,tg\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{p}-\frac{p\sqrt{b^2-a^2}}{p^2+b^2-a^2}\right]=$$
$$=\frac{\frac{3v\varepsilon e^2}{p^2(a^2-b^2)^{3/2}}\left[arc\,tg\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{p}-\frac{p\sqrt{b^2-a^2}}{p^2+b^2-a^2}\right]}{1+\frac{4\pi\varepsilon b^2}{b^2-a^2}\left[1-\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\,arc\,tg\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right]}, \tag{25}$$

dagegen für das verlängerte, also $a>b$

$$\frac{\frac{3v\varepsilon e^3}{p^2(a^2-b^2)^{3/2}}\left[\frac{p\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{p^2-a^2+b^2}}-\log nat\frac{p+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{p^2-a^2+b^2}}\right]}{1-\frac{4\pi\varepsilon b^2}{a^2-b^2}\left[1-\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\log nat\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]}. \tag{26}$$

Geschieht dagegen die Wirkung senkrecht zur Rotationsaxe, so hat man für das abgeplattete Rotationsellipsoid, also $a>b$

$$\frac{\frac{3v\varepsilon e^2}{2p^2(b^2-a^2)^{3/2}}\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}.(p^2+a^2-b^2)}{p^2\sqrt{p^2-a^2+b^2}}-arc\sin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{p}\right]}{1+\frac{2\pi\varepsilon b}{a^2-b^2}\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,arc\sin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}-b\right]}, \tag{27}$$

dagegen für das verlängerte Rotationsellipsoid, also für $a<b$

$$\frac{\frac{3v\varepsilon e^2}{2p^2\sqrt{b^2-a^{3}/_{2}}}\left[\log nat\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}+\sqrt{p^2+b^2-a^2}}{p}\right)-\frac{\sqrt{b^2-a^2}(p^2-b^2+a^2)}{p^2\sqrt{p^2+b^2-a^2}}\right]}{1+\frac{2\pi\varepsilon b}{b^2-a^2}\left[b-\frac{a^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\log nat\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right]}. \tag{28}$$

Man könnte in gewissen Fällen erwarten, es sei besser, statt der von mir angewandten Kugeln Ellipsoide in die erste Drehwage einzuhängen (besonders bei grossen Dielektricitätsconstanten lang gestreckte), deren Orientirung jedoch sehr genau sein müsste.

Da in diesen Formeln die Excentricität des Ellipsoids nicht klein vorausgesetzt ist, so können sie die Frage entscheiden, um wie vielmal die Anziehung des in die erste Drehwage eingehängten leitenden Körpers grösser wäre, als die des an seine Stelle gehängten dielektrischen Körpers, wenn beide congruente Rotationsellipsoide sind. Wir wollen da blos den Fall betrachten, dass die Wirkung längs der Rotationsaxe geschieht. Für das verlängerte Ellipsoid ist der erwähnte Quotient nach Formel 26) (für die leitende Kugel ist $\varepsilon = \infty$, für das dielektrische $1 + 4\pi\varepsilon = D$):

$$Q = 1 + \frac{1}{(D-1)\frac{b^2}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\log nat\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}-1\right]}, \quad 29)$$

dagegen ist der Quotient für das abgeplattete Ellipsoid nach Formel 25)

$$Q = 1 + \frac{1}{(D-1)\frac{b^2}{b^2-a^2}\left[1-\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\, arc\, tg\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right]}. \quad 30)$$

Man hat also für

$$a = 0, \qquad a = b, \qquad a = 2b, \qquad a = \infty$$

$$Q = \frac{D}{D-1}, \quad Q = \frac{D+2}{D-1}, \quad Q = \frac{D+4.8\ldots}{D-1}, \quad Q = \infty$$

Für den Fall, dass die Excentricität klein ist, kann man eine Reihenentwicklung eintreten lassen.

Wenn die Wirkung in der Richtung der Rotationsaxe (der a) geschieht, liefern die Formeln 25) und 26) für die Anziehung den Werth

$$\frac{\frac{2ve^2\varepsilon}{p^5}\left[1-\frac{6(b^2-a^2)}{5p^2}+\frac{9(b^2-a^2)^2}{7p^4}\cdots\right]}{1+4\pi\varepsilon\left[\frac{1}{3}+\frac{2(b^2-a^2)}{3\cdot 5a^2}-\frac{2(b^2-a^2)^2}{5\cdot 7a^4}\cdots\right]} \qquad 31)$$

Geschieht die Wirkung senkrecht zur Rotationsaxe, so liefern die Formeln 27) und 28)

$$\frac{\frac{2ve^2\varepsilon}{p^5}\left[1+\frac{3(a^2-b^2)}{5p^2}+\frac{27(a^2-b^2)^2}{56p^4}\cdots\right]}{1+4\pi\varepsilon\left[\frac{1}{3}+\frac{a^2-b^2}{15a^2}-\frac{8}{105}\frac{(a^2-b^2)^2}{a^4}\cdots\right]} \qquad 32)$$

Man sieht, dass der Factor im Zähler noch weit weniger von Eins verschieden ist, als der im Nenner. Der erstere ist übrigens nur dann genau, wenn nicht die Masse e, sondern ein homogenes Feld, in dem die Kraft $\frac{e}{p^2}$ in der Richtung der Abscissenaxe wirkt, befindet, auf die Kugel inducirend wirkt, und nach der Anziehung gefragt wird, welche das so dielektrisirte Ellipsoid auf die Masse e in der Distanz p ausübt. Sonst superponirt sich noch die auch bei Kugeln wegen der Nichthomogenität des Feldes angebrachte Correction. Berechnet man die Grösse E nach der von mir immer angewandten Methode, so findet man E wegen der Ellipticität der dielektrischen Kugel höchstens

$$\frac{1+4\pi\varepsilon\left(\frac{1}{3}+\frac{2(b^2-a^2)}{15a^2}\right)}{1+\frac{4\pi\varepsilon}{3}}=1+\frac{2(b^2-a^2)}{5Ea^2}\text{ mal} \qquad 33)$$

wegen der der Metallkugel

$$1-\frac{2(b^2-a^2)}{5a^2}\text{ mal} \qquad 34)$$

so gross. Geschieht die Wirkung gegen die Axen des Ellipsoids geneigt, so wird ausser der Anziehung auch ein Drehungsmoment auf das Ellipsoid ausgeübt, welches aber bei der Grösse des Hebelarmes meiner Drehwage einen ganz verschwindenden Einfluss auf dieselbe hat.

§. 6. Anziehung, welche eine elektrische Masse e auf einen dielektrischen Körper ausübt, dessen Gestalt sich nur sehr wenig, aber beliebig von der einer Kugel mit dem Radius a unterscheidet.

p sei die Distanz des Kugelcentrums O von e. Wir denken uns zuerst den Körper als eine Kugel vom Radius a, aus der unmittelbar an der Oberfläche ein unendlich kleines Stück vom Volumen ω herausgebrochen ist. Die vom Kugelcentrum e und ω gezogenen Geraden sollen den Winkel δ bilden, letztere soll die Länge t haben. Das elektrische Moment der Volumeinheit der Kugel ist in der Richtung der x-Axe (der Geraden Oe)

$$\alpha = -\frac{3e}{4\pi E p^2},$$

das des herausgebrochenen Stückes war $\alpha\omega$.

Es entsteht zunächst die Frage, welche dielektrische Polarisation durch das Herausbrechen dieses Stückes zu der in der Kugel vorhandenen noch hinzukömmt. Gerade dieselbe, als ob auf die Kugel zwei elektrische Massen $-Q$ und $+Q$ inducirend wirkten, erstere mit den Kugelcoordinaten t, δ, letztere mit den Kugelcoordinaten $t-\lambda\cos\delta$, $\delta+\frac{\lambda\sin\delta}{t}$, wobei $Q\lambda = t\alpha\omega =$ dem elektrischen Momente der beiden Massen $-Q$ und $+Q$ ist.

Die Coordinaten haben dieselbe Bedeutung, wie in Beer's Elektrostatik, S. 174). Nach der auf derselben Seite abgeleiteten Formel Beer's hat die von $-Q$ auf die Kugel inducirte Elektricität auf die Masse e das Potentiale, dessen negativer Differentialquotient nach den Coordinaten von e, die darauf nach den positiven Axen wirkenden Kräfte liefert

$$T = \frac{e\varkappa Q}{a}\sum_1^\infty \frac{n p_n}{2n+1-(n+1)\varkappa}\left(\frac{a}{p}\right)^{n+1}\left(\frac{a}{t}\right)^{n+1}.$$

Dasselbe Potentiale beider Massen zusammen ist also

$$-\frac{\partial T}{\partial t}\lambda\cos\delta + \frac{\lambda T}{\partial\delta}\frac{\lambda\sin\delta}{t} =$$

$$\frac{e\varkappa Q\lambda}{a^2}\sum_1^\infty \frac{n}{2n+1-(n+1)\varkappa}\left(\frac{a}{p}\right)^{n+1}\left(\frac{a}{t}\right)^{n+2}\left[p_n(n+1)\cos\delta + \frac{dp_n}{d\delta}\sin\delta\right].$$

Beide Formeln gelten nur für $t \gtreqless a$.

Dies ist das Potentiale auf die Masse e, welches zu dem schon vorhandenen durch die veränderte Dielektrisirung der übrigen Kugel dazu kommt. In Folge des Fehlens jenes Stückes kommt aber ein Potentiale dazu, das gleich ist dem Potentiale der Massen $+Q$ mit den Coordinaten t, δ und $-Q$ mit $t-\lambda\cos\delta$, $\delta + \frac{\lambda\sin\delta}{t}$ auf e. Setzt man $r = \sqrt{p^2 - 2pt\cos\delta + t^2}$, so ist dieses Potentiale, weil die Masse e und $+Q$ das Potentiale $+\frac{Qe}{r}$ auf einander haben.

$$+eQ\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial t}\lambda\cos\delta - eQ\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\delta}\frac{\lambda\sin\delta}{t} = +\frac{(p-t)\,eQ\lambda}{(p^2-2pt\cos\delta+t^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{eQ\lambda}{t^2}\sum_1^\infty\left(\frac{t}{p}\right)^{n+1}\left[-\frac{dp_n}{d\delta}\sin\delta + np_n\cos\delta\right].$$

Das gesammte hinzugekommene Potentiale ΔT ist also, die Summe dieser beiden Ausdrücke, wobei für $Q\lambda$ noch dessen Werth $-\alpha\omega$ zu setzen ist. Der Zuwachs der Anziehung aber ist $\Delta A = \frac{d\Delta T}{dp}$. Es ist also, wenn man noch $t = a$ setzt

$$\Delta A = -e\alpha\omega\sum_1^\infty\frac{n+1}{p^{n+2}}\cdot\left[a^{n-1}\left(\frac{dp_n}{d\delta}\sin\delta - np_n\cos\delta\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\varkappa n a^{n-1}}{(2n+1-(n+1)\varkappa)}\left(\frac{dp_n}{d\delta}\sin\delta + (n+1)p_n\cos\delta\right)\right],$$

wobei $\varkappa = \frac{D-1}{D} = \frac{3}{E+2}$.

Fehlt daher an der Kugeloberfläche ein kleines Stück vom Volum ω, so kömmt, wenn man nur das Glied mit der niedrig-

sten Potenz des p im Nenner beibehält, zur Anziehung der Kugel noch folgende hinzu:

$$\frac{2e\alpha\omega}{p^3} - \frac{2e\alpha\omega(1-3\cos^2\delta)}{Ep^3} = -\frac{3e^2\omega}{2\pi Ep^5}\left(1-\frac{1-3\cos^2\delta}{E}\right)$$

Wir wollen jetzt annehmen, aus der ganzen Kugelfläche sollen rings Stücke fehlen, so dass die Verbindungslinie irgend eines Oberflächenelementes do der Kugel mit dem Centrum nicht a, sondern $a-\lambda$ ist, wobei λ für die verschiedenen Oberflächenelemente verschieden sein kann. Dann ist $\omega=\lambda do$ zu setzen und über die ganze Kugeloberfläche zu integriren. Zur Anziehung $\frac{2e^2a^3}{Ep^5}$, welche die exacte Kugel erfuhr, kommt also noch hinzu:

$$\Delta A = \frac{3e^2}{4\pi Ep^4}\sum_1^\infty \frac{n+1}{p^n}\cdot a^{n-1}\left[\int\left(\frac{dp_n}{d\delta}\sin\delta - np_n\cos\delta\right)\lambda do\right.$$

$$\left.-\frac{3n}{(2n+1)E+n-1}\int\left(\frac{dp_n}{d\delta}\sin\delta+(n+1)p_n\cos\delta\right)\lambda do\right]$$

oder wenn man die drei ersten Glieder der Reihe berechnet

$$\Delta A = -\frac{3e^2}{2\pi Ep^5}\left[\int\lambda do - \frac{1}{E}\int(1-3\cos^2\delta)\lambda do + \frac{3a}{p}\int\cos\delta\lambda do -\right.$$

$$-\frac{27a}{2p(5E+1)}\int(3\cos\delta-5\cos^3\delta)\lambda do - \frac{2a^2}{p^2}\int(1-2\cos^2\delta)\lambda do +$$

$$\left.+\frac{9a^2}{2(7E+2)p^2}\int(3-30\cos^2\delta+35\cos^4\delta)\lambda do\ldots\right]$$

Wenn die Kugel durch Wegnahme jener Stücke sich in ein Rotationsellipsoid verwandelt, dessen mit der Richtung der Wirkung der Elektricität zusammenfallende Rotationshalbaxe gleich a, dessen andere Halbaxe gleich $\sqrt{a^2-\gamma^2}$ ist, so ist $\lambda=\frac{\gamma^2}{2a}\sin^2\delta$, $do=2\pi a^2\sin\delta d\delta$ zu setzen, und von Null bis π zu integriren, wodurch man wieder die Formel 34) erhält, aber natürlich nur

bis auf die Glieder von der Ordnung der ersten Potenz von γ^2 genau. Natürlich sind dabei wieder jene Glieder vernachlässigt, welche dadurch entstehen, dass die Kugel nicht durch ein homogenes Feld, sondern durch einen inducirenden Punkt dielektrisirt wird. Man könnte sie auch mit Leichtigkeit in Rechnung ziehen, wenn man die weggelassenen Volumelemente nicht gleichförmig, sondern so elektrisirt wählte, wie sie es durch einen inducirenden Punkt werden. Der grösseren Complication der Rechnung wegen und weil ich glaube, dass die Glieder von der niedrigsten Ordnung, welche hiedurch nicht alterirt werden, vollkommen ausreichen, habe ich jedoch diese Rechnung vorläufig unterlassen.

Experimente.

§. 7. Versuche, bei denen die Abweichungen der Kugel von der Kugelgestalt und der einseitige Elektricitätsüberschuss gemessen wurde.

Da ich bei meinen früheren Kugeln die Abweichungen von der Kugelgestalt nicht bestimmt hatte, so stellte ich noch eine besondere diesbezügliche Versuchsreihe an, und zwar mit einer Paraffinkugel. Sowohl diese, als auch die dazu gehörige, mit Staniol überzogene Kugel wurden mit besonderer Sorgfalt rund gegossen, das Staniol sehr sorgfältig geglättet. Ich klebte nun drei kleine Spiegelglasplatten so an einander, dass sie wechselseitig auf einander senkrecht waren und eine körperliche Ecke bildeten, in welcher die zu untersuchende Kugel herumgewälzt wurde, so dass sie immer alle drei Glasplatten tangirte. Das System der drei Glasplatten wurde so auf ein Brett aufgeklebt, dass zwei nahe vertical, die dritte nahe horizontal, jedoch etwas geneigt war, so dass die Kugel schon durch ihr Gewicht in die körperliche Ecke gedrückt ward. Auf dem Brette war ausserdem ein Mikroskop mit Ocularmikrometer aufgeklebt, welches auf den höchsten Punkt der Kugel visirte, und dessen Axe der dritten Glasplatte parallel war. Aus den Verschiebungen dieses höchsten Punktes beim Wälzen der Kugel konnten mit grosser Genauigkeit die Längenunterschiede der Kugeldurchmesser bestimmt werden.

Ich mass den Durchmesser, welcher beim Hängen der Kugel vertical stand, dann 8 Durchmesser, welche horizontal standen, dann 4, die etwa um 45° gegen den Horizont geneigt waren, und zwar stellte ich an der Paraffinkugel und Metallkugel zwei Messungsreihen an. Bei der zweiten Messungsreihe war das Mikroskop etwas gegen seine Lage während der ersten verschoben, so dass also nur die Differenzen beider Messungsreihen zu stimmen brauchen. Die folgende Tabelle gibt die Zahl der Trommelumdrehungen, welche nothwendig war, um das Fadenkreuz des Ocularmikrometers aus einer fixen Lage in die Höhe des höchsten Punktes der Kugel zu bringen. Ihre Differenzen geben also die Längendifferenzen der verschiedenen Kugeldurchmesser, und zwar entspricht eine Trommelumdrehung einer Längendifferenz von $^1/_6$ Mm.

Metallkugel		Paraffinkugel	
1. Reihe	2. Reihe	1. Reihe	2. Reihe
3·50	3·70	2·75	3·00
3·17	3·30	3·23	3·53
3·17	3·30	3·25	3·55
3·29	3·52	3·23	3·55
3·73	3·90	2·80	3·05
3·23	3·33	3·23	3·60
3·00	3·15	3·24	3·64
2·79	3·02	3·23	3·60
3·61	3·71	2·81	3·00
3·30	3·35	3·22	3·52
3·30	3·53	2·51	3·05
2·71	2·88	2·62	3·03
3·31	3·46	3·35	3·81
3·63	3·82	3·35	3·73

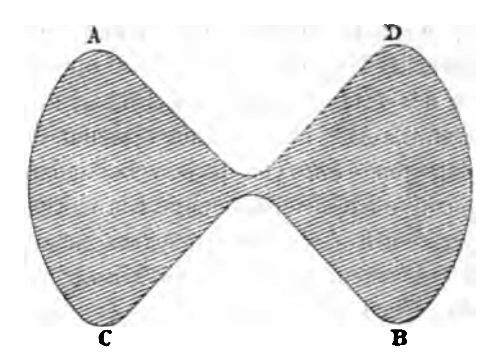
Man sieht, dass die grösste Differenz zweier Durchmesser kaum eine Umdrehung $=0 \cdot 167$ Mm. betrug, und ich überzeugte mich noch durch weiteres Wälzen, dass auch kein anderer Durchmesser eine grössere Abweichung zeigte.

Will man daher die Formel 34) anwenden, so hat man $a = 7 \cdot 3$ Mm., $b = 7 \cdot 22$ Mm. zu setzen, und findet, dass in

Folge der Abweichungen von der Kugelgestalt der Werth von E höchstens um 0·0088 seines Betrages falsch erhalten worden sein kann. Doch ist er in Wirklichkeit höchst wahrscheinlich noch um viel weniger falsch, da in Wirklichkeit der eingehängte Körper kein Ellipsoid war, dessen grösste und kleinste Halbaxe 7·3 und 7·22 Mm. lang waren, sondern wahrscheinlich hatte dieser Körper nur stellenweise Vertiefungen oder Erhöhungen, wodurch der schädliche Einfluss der Durchmesserungleichheit bedeutend vermindert wird. Übrigens werde ich bei späteren Versuchen für eine noch genauere Kugelgestalt sorgen, die namentlich bei geschliffenen Kugeln ganz wohl erreichbar sein wird.

Bei der Ladung durch die Stimmgabeln wurden die wirkenden Kugeln rasch nach einander bald positiv, bald negativ geladen. Sei e die auf den wirkenden Kugeln zu einer Zeit dt befindliche Elektricitätsmenge, welches mit negativen Zeichen zu nehmen ist, wenn sie negativ ist. Wenn $\int e\,dt$, über eine längere Zeit erstreckt, Null ist, so findet auf eine positive, fest an einen Punkt des Raumes gekettete Elektricitätsmenge gar keine Wirkung statt. Alle Fernwirkung stammt dann von der Influenz. Ist dagegen $\int e\,dt$ von Null verschieden, so findet auch auf jene positive Elektricitätsmenge Einwirkung statt. Ich will $\int e\,dt$ immer den Elektricitätsüberschuss nennen. Derselbe war bei meinen Versuchen, Dank dem mit Wasser gefüllten Glasfaden, sehr klein. Um seine Grösse zu messen, verband ich den zu den wirkenden Kugeln führenden Draht leitend mit zwei gegenüber liegenden Quadranten eines Kirchhoff'schen Elektrometers; die beiden anderen Quadranten waren zur Erde abgeleitet. Der bewegliche Theil des Elektrometers, den ich „Wagebalken“ nenne, war, damit es nicht zu empfindlich sei, an zwei ziemlich entfernten Coconfäden bifilar aufgehängt und sehr stark elektrisirt dadurch, dass die Flasche sehr stark geladen wurde. Derselbe wurde, selbst wenn $\int e\,dt = 0$ war, immer nach der Seite der alternirend geladenen Quadranten abgelenkt, weil deren alternirende Ladung auf dem Wagebalken eine gerade in der entgegengesetzten Weise alternirende influencirte. Um diesem Übelstande abzuhelfen, machte ich einen Wagebalken, dessen horizontaler Theil aus einem Halbleiter

(steifem Papier) gemacht war, auf das die alternirende Ladung wegen seiner geringen Leitungsfähigkeit keine Influenz ausüben konnte; die Ladung der Leidnerflasche dagegen übertrug sich vortrefflich auf das Papier, welches daher durch den dauernden Elektricitätsüberschuss wie Metall abgelenkt wurde. Ist dieser horizontale Draht, wie bei Kirchhoff's Instrument, ein dünner Draht, so wird er durch kleine Elektricitätsmengen, so lange er nahe dem die Quadranten trennenden Schlitze steht, ziemlich stark abgelenkt. Hat er sich aber etwas von diesem Schlitze entfernt, so wächst die Ablenkung fast gar nicht mehr, wenn die Potentialdifferenz der Quadranten wächst. Dadurch wird bewirkt, dass die Ablenkung des Wagebalkens sehr wenig der Potentialdifferenz der Quadranten proportional ist. Um diesem Übelstande zu begegnen, gab ich dem horizontalen Theile der Quadranten beiläufig die nebenstehende Gestalt (ähnlich



wie bei Thomson's Elektrometer). Die die Quadranten trennenden Schlitze befanden sich unter den Halbirungslinien der von den Geraden AB und CD gebildeten Winkel, wenn die Quadranten ungeladen waren. Der Ausschlag des Elektrometers ist dann innerhalb ziemlich weiter Grenzen der Potentialdifferenz auf den Quadranten proportional. Wurden die wirkenden Kugeln alternirend geladen, so gerieth das Lichtbild des Elektrometers sogleich ins Schwanken; es war also Elektricitätsüberschuss vorhanden. Die Schwankungen geschahen bald nach der einen, bald nach der andern Seite der Ruhelage hin und betrug 2 bis höchstens 4 Scalentheile. Bevor ich die Ver-

suche begonnen habe, lud ich die mit den Elektrometerquadranten verbundenen wirkenden Kugeln dauernd einmal positiv, dann negativ. Die in der zweiten Drehwage befindliche Kugel zeigte nicht den mindesten Ausschlag, während das Elektrometer im ersten Falle 16, im zweiten 25 Theilstriche Ablenkung zeigte. Nach Beendigung der Versuche wiederholte ich dieses Experiment. Die Kugel der zweiten Drehwage zeigte etwa ½ Theilstrich Ausschlag, der übrigens auch Beobachtungsfehler sein konnte; das Elektrometer zeigte 17 und 24 Theilstriche Ausschlag. Da der Elektricitätsüberschuss während der alternirenden Ladung dem Elektrometer einen Ausschlag von höchstens 4 Scalentheilen ertheilte, so ist klar, dass derselbe auf die in den Drehwagen eingehängten Kugeln gar keinen Einfluss ausüben konnte. Ich lasse jetzt die Zahlen folgen, die ich bei zwei mit jener Paraffinkugel angestellten Beobachtungsreihen erhielt. Bedeutung der Zeichen und Anordnung ist dieselbe wie in meiner ersten Abhandlung über dielektrische Fernwirkung

Spec. Gewicht des Paraffins 0·911.

$$V_i = 1\cdot610, \quad V_m = 1\cdot647.$$

Stimmgabel mit 32 ganzen Schwingungen per Sec.

Metallkugel	Paraffinkugel	
$2R = 1263$	$2R = 1258$	
$2A = +60—80$	$2A = 20—30$	
1·30	2·66	2·66
1·31	2·64	2·67
1·29	2·67	2·63
1·31	2·65	2·59
1·30	2·69	2·63
M 1·302	M 2·649	

$$E' = 3\cdot449, \quad \frac{V_i}{V_m} E' = 3\cdot373$$

$$2(R_m - R_i) = 5$$

$$E = 3\cdot266$$

$$2(A_m - A_i) = 45$$

Paraffinkugel	Metallkugel	Paraffinkugel	
128 g. Schwing. pr. S.	32 Schwing.	32 Schwing.	128 Schwing.
$2R = 1271$	$2R = 1266$	$2R = 1264$	$2R = 1257$
$2A$ 18—22	$2A$ 70—80	$2A$ 16—24	$2A$ 20—22
2·57	1·28	2·59	2·65
2·60	1·29	2·59	2·63
2·62	1·34	2·71	2·62
2·59	1·32	2·66	2·63
2·58	1·32	2·69	2·64
2·57	1·32	2·66	2·62
2·66	1·31	2·52	2·56
2·63	1·29	2·59	2·59
2·59	1·30	2·55	2·65
2·59	1·30	2·64	M 2·621
M 2·600	M 1·307	2·62	
		M 2·630	
$E' = 3·398$		$E' = 3·437$	$E' = 3·426$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 3·323$		$\frac{V_i}{V_m} E' = 3·363$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 3·352$
$2(R_m - R_i) = -5$		$2(R_m - R_i) = 2$	$2(R_m - R_i) = 9$
$2(A_m - A_i) = 55$		$2(A_m - A_i) = 55$	$2(A_m - A_i) = 54$
$E = 3·217$		$E = 3·240$	$E = 3·218$

Bei den in der ersten Abhandlung beschriebenen Versuchen fand ich für Paraffin $E = 3·296$ und 3·315. Diese Übereinstimmung ist jedenfalls befriedigend, besonders da das Material keineswegs eine vollkommen definirte Zusammensetzung hat. Übrigens mag der Umstand, dass der Werth des E jetzt etwas kleiner ausfiel, daher rühren, dass die jetzt untersuchten Kugeln weniger als die früher untersuchten von der Kugelgestalt abwichen.

Ich gebe schliesslich eine übersichtliche Zusammenstellung aller bei alternirender Ladung von mir sowohl in der ersten Abhandlung, als auch hier gefundenen Werthe der mit E bezeich-

neten Grösse, welche den Werth $\frac{D+2}{D-1}$ hat und angibt, wie vielmal eine leitende Kugel im nahe homogenen Felde stärker angezogen wird, als eine gleichgrosse dielektrische. Die in §. 1 und 4 angegebenen Correctionen habe ich dabei nicht angebracht, weil ihr Betrag unter der Hypothese berechnet wurde, dass die umgebenden Wände keine Einwirkung ausüben, wodurch er nothwendig zu gross ausfallen musste. Übrigens bemerke ich, dass durch beide Correctionen zusammen der Werth des E jedenfalls um weniger als 1 Procent kleiner würde. Eine Abhängigkeit von der Ladungsstärke konnte ich nicht constatiren, auch nicht von der Zeit der Einwirkung, wenn diese zwischen $^1/_{64}$ und $^1/_{360}$ Secunde schwankte.

	E	Mittel
Schwefel ...	2·035, 2·032	2·033
Paraffin	3·296, 3·315	3·302
	3·266, 3·217, 3·240, 3·218	3·235
Colophonium	3·058, 2·992	3·025
Hartgummi .	2·185, 2·168, 2·245, 2·246	2·211

Ich stelle nun die aus den Mittelwerthen der E sich ergebenden Dielektricitätsconstanten E mit den von mir aus Condensatorversuchen (Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 7) gefundenen und den aus den elektro-magnetischen Lichttheorien sich ergebenden zusammen:

	Aus d. diel. Fernwirkung	Aus d. Cond.-Versuchen	Aus d. el.-magn. Lichttheorie
Schwefel ...	3·90	3·84	4·06
Paraffin	2·30	2·32	2·33
	2·34		
Colophonium	2·48	2·55	2·38
Hartgummi .	3·48	3·15	—

Die für das Paraffin in der 1. Zeile angegebenen Zahlen beziehen sich auf die Versuche der ersten Abhandlung, die in der 2. Zeile angegebenen auf die Versuche dieser Abhandlung.

Für den Schwefel habe ich das Mittel der 3., aus der elektromagnetischen Lichttheorie für die drei Hauptelasticitätsaxen sich ergebenden Dielektricitätsconstanten in der letzten Verticalreihe eingeführt. Um auch noch eine Übersicht über die dielektrische Nachwirkung zu geben, stelle ich zum Schlusse die Werthe des E zusammen, die sich bei verschiedener Wirkungsdauer ergeben. (Für jede Wirkungsdauer nur den Mittelwerth.)

	Zeit der Einwirkung in Secunden					
	$^1/_{64}$—$^1/_{360}$	0·9	1·8	$22^1/_2$	45	90
Schwefel ...	2·033	—	2·125	—	2·110	—
Hartgummi .	2·211	—	2·064	—	2·094	—
Paraffin	3·269	2·980	2·920	—	1·420	—
Colophonium	3·025	2·140	1·927	1·730	1·700	1·650,

wobei jedoch die bei längerer Einwirkungszeit gefundenen Resultate etwas ungenauer sein dürften, als die in der ersten Verticalreihe stehenden.

Soeben kommt mir eine Abhandlung von Schiller (Pogg. Ann. Bd. 152, S. 535) zu Gesicht, worin derselbe ebenfalls Dielektricitätsconstanten von Isolatoren (theilweise mittelst eines von Helmholtz erfundenen Apparates bei weit geringerer Ladungszeit, als mir zu Gebote stand) bestimmte und mit der elektromagnetischen Lichttheorie verglich. Wenn nun auch so complicirt gebaute Körper, wie Paraffin und Hartgummi, welche vielleicht eine sehr von ihrer Constitution abhängige dielektrische Nachwirkung besitzen, sich nur wenig zur Prüfung jener Lichttheorie eignen, so ist doch jedenfalls der für Paraffin, namentlich bei kurzer Ladungszeit, von Herrn Schilles gefundene Dielektricitätscoëfficient viel kleiner, als es mit der elektromagnetischen Lichttheorie vereinbar ist. Mir war es seinerzeit nicht gelungen, die Platten aus den isolirenden Substanzen so planparallel zu erhalten, dass sie den Raum zwischen den Condensatorplatten vollkommen ausgefüllt hät-

ten, wesshalb ich eine besondere Correction anbrachte. Herr Schiller bespricht diesen Punkt in seiner Abhandlung gar nicht. Wenn er aber diese Correction unterliess, und wenn es ihm nicht durch ganz besondere Kunstgriffe gelang, die isolirenden Platten exact planparallel zu machen, so müssen seine Werthe für die Dielektricitätscoëfficienten fehlerhaft, und zwar bedeutend zu klein ausgefallen sein.

Über die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante des krystallisirten Schwefels nach verschiedenen Richtungen.

Von dem c. M. **Ludwig Boltzmann.**

(Mit 2 Holzschnitten.)

Gemäss der elektromagnetischen Theorie des Lichtes sind die Lichtschwingungen ein und dasselbe mit kleinen Verschiebungen der Elektricität (Electric displacements) senkrecht zur Richtung des Lichtstrahles. Die verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben kann entweder von Verschiedenheit der Magnetisirungs- oder der Dielektricitätsconstante herrühren Die geringe Anziehung, welche alle durchsichtigen Körper im Vergleiche zu Eisen durch Magnete erfahren, beweist, dass die Magnetisirungsconstante in allen durchsichtigen Körpern fast genau denselben Werth wie in Luft (respective im leeren Raume) hat. Es muss daher die Verschiedenheit in Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes von Verschiedenheiten der Dielektricitätsconstanten herrühren. Wenn in einem und demselben Körper Verschiedenheiten in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes nach verschiedenen Richtungen herrschen, so muss dies also ebenfalls daher rühren, dass derselbe nach verschiedenen Richtungen eine verschiedene Dielektricitätsconstante besitzt (vergleiche Maxwell. Phil. mag. ser. 4 vol. 23 pag. 24 u. phil. transact. vol. 155, pag. 501). Ich suchte nun in verschiedenen anisotropen Krystallen diese Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante in verschiedenen Richtungen nachzuweisen. Zwei Substanzen, Kalkspat und Quarz, welche ich zuerst prüfte, erwiesen sich hiezu wenig geeignet, weil bei denselben die Dielektricitätsconstante mit der Zeit der Einwirkung der Elektricität wächst, mit anderen Worten, weil sie dielektrische Nachwirkung besitzen. Da nun aber so kurze Einwirkungszeiten, wie

sie bei den Lichtschwingungen vorkommen, bei Versuchen mit statischer Elektricität auch nicht annähernd erreicht werden können (bei Lichtschwingungen dauert jede einzelne elektrische Verschiebung höchstens den vierhundertbillionsten Theil einer Secunde, während bei Versuchen mit statischer Elektricität, deren Dauer kaum kleiner als ein Tausendstel Secunde gemacht werden kann), so ist bei solchen Körpern die Übereinstimmung der Dielektricitätsconstante mit der elektromagnetischen Lichttheorie immer von vornherein fraglich, dagegen fand ich im Schwefel einen sehr geeigneten Körper, sowohl wegen seines ausgezeichneten Isolationsvermögens, als auch wegen des gänzlichen Mangels an dielektrischer Nachwirkung in demselben, als auch endlich wegen der grossen Verschiedenheit der Lichtgeschwindigkeit in demselben nach verschiedenen Richtungen. Natürlich konnte krystallisirter Schwefel nicht mittelst eines Condensators untersucht werden, da die Unmöglichkeit auf der Hand liegt, sich aus diesem Materiale Platten von genügender Grösse zu verschaffen, dagegen bot meine in der Abhandlung „Experimental-Untersuchung über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper“ (Sitzber. der Wiener Akademie der Wissensch. Bd. 68), welche ich immer unter dem Namen „erste Abhandlung“ citiren werde, beschriebene Methode ein Mittel, den krystallisirten Schwefel in verschiedenen Richtungen auf seine Dielektricitätsconstante zu prüfen; und mit Hilfe dieser Methode fand ich in der That, dass die Dielektricitätsconstante im Schwefel in verschiedenen Richtungen verschieden ist, und zwar vollkommen in der von der elektromagnetischen Lichttheorie geforderten Weise.

Ich verschaffte mir zu diesem Zwecke natürliche Schwefelkrystalle von möglichst grossen Dimensionen, wenn auch nicht mit schönen Flächen; ein solches Stück verdanke ich Herrn Professor Tschermak, Director des k. Hof-Mineraliencabinetes in Wien, zwei andere, allerdings minder schöne Stücke erhielt ich aus der Mineralienhandlung des Herrn Lenoir. Der ausserordentlichen Geschicklichkeit des Herrn Optikers Steeg in Homburg gelang es, aus diesem Material zwei vollkommen runde Kugeln, eine von $17^1/_2$ Mm. Durchmesser, die andere von $14^1/_2$ Mm. Durchmesser zu schleifen. Beide hatten zwar im

Innern Sprünge, die jedoch das specifische Gewicht durchaus nicht verkleinerten und daher auch auf meine Messungen keinen Einfluss haben konnten. Sie enthielten keine fremde Substanz in ihrem Innern und es fehlten auch nirgends Stücke daraus, bis auf ein ganz kleines Loch von höchstens 2 Cmm. Inhalt in der grösseren Kugel.

Da jedoch dieses Loch nahe an der Stelle lag, wo die Richtung der grössten Dielektricitätsconstante die Kugeloberfläche traf, so konnte es jedenfalls nicht Ursache des von mir gefundenen verschiedenen Verhaltens des Schwefels nach verschiedenen Richtungen sein, sondern dasselbe höchstens vermindern.

Die erste Bestimmung der Lage der optischen Axen in beiden Schwefelkugeln verdanke ich der Güte des Herrn Prof. v. Lang. Später erwies sich jedoch diese Bestimmung als eine ausserordentlich leichte, da das Phänomen der conischen Refraction mit freiem Auge ohne jedes weitere Hilfsmittel sehr deutlich sichtbar ist, sobald man durch die Kugel irgend ein Object, am besten natürlich einen Lichtpunkt, betrachtet, und dieses Phänomen wegen des grossen Gesichtsfeldes beim Drehen der Kugel auch sehr leicht aufgefunden werden kann.

Durch Messungen nach der Methode, welche ich in meiner Abhandlung „über einige in meinen Versuchen über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper anzubringende Correctionen“ (dieser Band d. Sitzber. §. 6) (ich will diese Abhandlung unter dem Namen „die zweite“ citiren) beschrieben habe, überzeugte ich mich, dass die verschiedenen Durchmesser der grösseren Kugel höchstens um 0·05 Mm., die der kleineren höchstens um 0·2 Mm. verschieden waren, was bei Berechnung der Dielektricitätsconstante bei der grösseren Kugel den Werth von E gar nicht erheblich, bei der kleineren höchstens um seinen 0·006fachen Betrag falsch machen kann (vergl. Formel 33 meiner zweiten Abhandl.).

Um die Kugel mit möglichster Leichtigkeit nach verschiedenen Richtungen untersuchen zu können, klebte ich an jede einen eigenthümlich gestalteten Schellakhaken an. Ich bemerke zunächst, dass Schellak auf Schwefel sehr leicht klebt. Man braucht nur das untere Ende des Hakens so stark zu erwärmen, dass sich daselbst ein kochendes Schellaktröpfchen bildet und

dann den Haken, welchen man mit einer Pincette erfasst hat, sehr rasch auf die Kugel aufzudrücken. Er bleibt dann mit genügender Festigkeit kleben.

Kugel und Haken darf dabei natürlich nicht mit der blossen Hand berührt werden, nur mit einem reinen Tuche (am besten aus Seide). Ein Vorwärmen der Kugel würde dieselbe der Gefahr des Zerspringens aussetzen, wie überhaupt alle, selbst die durch die Wärme der Hand erzeugten Temperaturungleichheiten im Innern des Schwefels ein Zerspringen veranlassen können. Der Gebrauch feuchten Kittes ist immer misslich, theils weil der letzte Rest der Feuchtigkeit schwer verdunstet und daher leitend bleibt, theils weil die Fläche, auf die der Kitt aufgetragen werden könnte sehr klein ist.

Fig. 1.

Ich will an jedem Haken *abc* (siehe nebenstehende Figur) denjenigen Theil *ab*, welcher beim Hängen vertical steht, als „den Stiel" bezeichnen, den krummen Theil *bc* aber als die Nase des Hakens. Ich berührte nun einen schon fertigen Haken bei *b* mit einem kochenden Schellaktröpfchen, welches ich, sobald es haftete, in einen etwas nach abwärts gekrümmten Faden von passender Dicke auszog. Dadurch erhielt ich einen Haken, welcher an einem und demselben Stiele fast in gleicher Höhe wei Nasen trug, und zwar so,. dass die beiden durch den Stiel und je eine Nase gelegten Ebenen aufeinander senkrecht standen.

Natürlich muss man beachten, dass sich der Schellaktropfen wohl angeheftet hat, damit er nicht nachträglich abspringt. Mein Apparat war der in meiner ersten Abhandlung beschriebene und ich befolgte auch ganz das daselbst auseinandergesetzte Verfahren und zwar arbeitete ich mit alternirender Ladung.

Die elektromagnetische Stimmgabel machte 32 ganze Schwingungen in der Secunde. Die Drehwagen machten eine ganze Schwingung in 25 Secunden; das Trägheitsmoment der ersten Drehwage war 7854 Grm. (Masse) $\times$ Mm.^{2}, das der zweiten war 674000 Grm. $\times$ Mm.^{2}; der Radius der beweglichen Kugel der zweiten Drehwage war 12·9 Mm.; die bewegliche Kugel der zweiten Drehwage hatte einen Durchmesser von 25·8 Mm.

Der Hebelarm FG (Taf. I, Fig. 2 meiner ersten Abhandlung) war statt 59 nur 41 Mm. lang. Sonst hatten sämmtliche Dimensionen die in der citirten Abhandlung angegebenen Grössen; wo zweierlei Grössen angegeben sind, die in Klammern beigefügten.

Dadurch, dass ich in die Schellakfäden der ersten Drehwage die eine oder die andere Nase des Hakens einhängte, konnte ich die Elektricität nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen auf die Schwefelkugel wirken lassen, und ich hatte den Haken so angeklebt, dass sie dabei thunlichst in der Richtung von zwei Hauptelasticitätsaxen wirkte. Dass dies nicht mit besonderer Genauigkeit erzielt werden konnte, versteht sich bei der Raschheit, mit welcher der Haken aufgeklebt werden musste, von selbst, und ich glaube, dass die Abweichungen der berechneten und beobachteten Zahlen hauptsächlich in einer mangelhaften Orientirung der Schwefelkugel ihren Grund hatten. Wollte man eine grössere Genauigkeit erzielen, so müsste man meiner Ansicht nach die Kugel zuerst so gut wie möglich einhängen, dann erst die Neigung der Richtung der Einwirkung der Elektricität gegen die Hauptelasticitätsaxen bestimmen und aus dieser Neigung die Dielektricitätsconstante speciell für die betreffende Einhängung berechnen. Ich machte öfters auch Versuche, bei denen die Kugel jedesmal mit derselben Nase, aber bald die Nase nach vorne, bald nach rückwärts gerichtet, eingehängt war (ich will diese beiden Stellungen immer die Stellung N und M nennen).

Die Kugel erschien also in der Stellung N um 180° um eine verticale Axe gedreht, gegenüber ihrer Lage in der Stellung M.

In den Stellungen M und N erhielt ich für die Dielektricitätsconstante immer denselben Werth, wodurch es sehr unwahrscheinlich wird, dass die Verschiedenheiten derselben nach verschiedenen Richtungen von in unsichtbarer Weise eingeschlossenen leitenden Theilchen (oder solchen mit anderer Dielektricitätsconstante) herrührte, indem diese Theilchen gerade symmetrisch zu einer senkrecht auf der Hakenebene stehenden Ebene hätten gelagert sein müssen. Zudem wäre auch höchst unwahrscheinlich gewesen, dass diese Theilchen in beiden Kugeln so ähnlich gelagert gewesen wären, dass sie gerade in

beiden Kugeln dieselbe Asymmetrie erzeugt hätten nach Richtungen, welche in beiden Kugeln bezüglich der optischen Axen dieselbe Lage hatten. Es zeigte sich die Dielektricitätsconstante am grössten, wenn die Wirkung in der Richtung der Halbirungslinien des spitzen Winkels der optischen Axen geschieht, am kleinsten, wenn in der Richtung der Halbirungslinie des stumpfen. Der grössten Dielektricitätsconstante entspricht auch der grösste Lichtbrechungsquotient. Es muss also der Lichtbrechungsquotient am grössten sein, wenn die Lichtschwingungen (die elektrischen Schwingungen, aus denen das Licht besteht) parallel der Richtung der Halbirungslinie des spitzen Winkels der optischen Axen vor sich gehen, dagegen am kleinsten, wenn die Lichtschwingungen parallel sind der Halbirungslinie des stumpfen Winkels der optischen Axen. Steht die Fortpflanzungsrichtung des Lichtes senkrecht auf den optischen Axen, so ist im Schwefel derjenige Lichtstrahl, welcher parallel der Halbirungslinie des stumpfen Winkels der optischen Axen polarisirt ist, derjenige dem der grösste Brechungsquotient zukommt; und da wir eben fanden, dass in dem Lichtstrahl mit dem grössten Brechungsquotienten die Schwingungen parallel der Halbirungslinie des spitzen Winkels der optischen Axen stehen, so folgt daraus, dass die Lichtschwingungen senkrecht zur Polarisationsebene geschehen. (Vergl. die citirte Stelle der Abhandl. Maxwell's aus den phil. transact.)

Ich will im Folgenden immer die Halbirungslinie des spitzen Winkels der optischen Axen als die grösste Hauptelasticitätsaxe, die des stumpfen als die kleinste bezeichnen. Auf beiden senkrecht steht die mittlere Hauptelasticitätsaxe. Die Dielektricitätsconstanten nach diesen drei Richtungen bezeichnen wir der Reihe nach mit D_g, D_k und D_m; sie sind nach der Maxwell'schen Theorie die Quadrate der drei Hauptbrechungsquotienten i_g, i_k und i_m. Ich legte bei der Berechnung die Bestimmung der Hauptbrechungsquotienten zu Grunde, welche Herr Professor Schrauf an krystallisirten Schwefel ausgeführt hat (Sitzb. d. Wr. Akad. Bd. 41, S. 794), und zwar muss nach Maxwell's Theorie die Dielektricitätsconstante mit dem Quadrate des Brechungsquotienten der Strahlen von sehr grosser Wellenlänge (also der ultrarothen Strahlen) stimmen, wesshalb ich die von Schrauf

für verschiedene Wellenlängen λ gefundenen Brechungsquotienten in die Form $A+\frac{B}{\lambda^2}$ brachte.

Die Dielektricitätsconstante für die betreffende Richtung muss dann das Quadrat des Coëfficienten A sein. Ich fand in dieser Weise

	Aus den Frauenhofer'sch. Linien B u. E	Aus den Frauenhofer'sch. Linien D u. H
für i_g	$A = 2\cdot1679$	$A = 2\cdot1659$
	$B = 0\cdot0253$	$B = 0\cdot0259$
für i_m	$A = 1\cdot9714$	$A = 1\cdot9715$
	$B = 0\cdot0234$	$B = 0\cdot0230$
für i_k	$A = 1\cdot8957$	$A = 1\cdot8939$
	$B = 0\cdot0193$	$B = 0\cdot0198$

Man sieht die mit Zugrundelegung verschiedener Frauenhofer'scher Linien gefundenen Werthe der Coëfficienten stimmen vollkommen genügend miteinander überein.

Die Dielektricitätsconstanten sind die Quadrate der A. Es ergibt sich also

$$D_g = 4\cdot596,\quad D_m = 3\cdot886,\quad D_k = 3\cdot591$$
$$E_g = 1\cdot812,\quad E_m = 2\cdot040,\quad E_k = 2\cdot157.$$

E ist die in meiner ersten Abhandlung ebenso bezeichnete Grösse, welche also angibt, um wie vielmal eine leitende Kugel stärker angezogen wird, als eine gleichgrosse dielektrische unter denselben Umständen. Es ist also allgemein

$$E = \frac{D+2}{D-1}. \qquad 1)$$

Der Index g bezieht sich immer auf die Richtung der grössten Hauptelasticitätsaxe, also die Halbirungslinie des spitzen Winkels der optischen Axe.

Ich lasse nun zunächst die Angabe der Dimensionenverhältnisse der Kugeln und dann die an denselben angestellten Versuche folgen.

Die Bezeichnungen sind dabei genau die in meiner ersten Abhandlung verwendeten.

Grosse Kugel:

$$V_i = 2{\cdot}6315,\quad V_m = 1{\cdot}681,\quad \frac{V_i}{V_m} = 1{\cdot}565,$$

spec. Gewicht 2·072, Durchmesser 17¼ Mm.

Kleine Kugel:

$$V_i = 1{\cdot}5065,\quad V_m = 1{\cdot}677,\quad \frac{V_i}{V_m} = 0{\cdot}8982,$$

spec. Gewicht 2·075, Durchmesser 14·5 Mm.

In jeder einzelnen der folgenden Tabellen sind die Versuche in der Reihenfolge aufgeführt, in der sie angestellt wurden.

Tabelle I.

Versuche mit der grossen Schwefelkugel.

Bei Einhängung des Haken I wirkt die Elektricität parallel der grössten, bei Einhängung des Haken II parallel der kleinsten Hauptelasticitätsaxe.

Metallkugel	Schwefelkugel		
	Haken I eingehängt		Haken II
	Stellung M	Stellung N	Stellung M
$2R = 863·4$	$2R = 857·1$	$2R = 848·4$	$2R = 851·2$
$2A$ 95·5—100·1	$2A$ 88·1—90·9	$2A$ 85·9—91·0	$2A$ 707·—75·5
1·47	1·30	1·32	1·09
1·47	1·31	1·29	1·09
1·46	1·31	1·32	1·09
1·46	1·30	1·32	1·10
1·46	1·32	1·34	1·10
1·48	1·30	1·32	1·09
M 1·467	M 1·307	M 1·3183	1·10
	$E' = 1·122$	$E' = 1·113$	1·10
	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1·755$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1·743$	M 1·095
	$2(R_m - R_i) = 6·3$	$2(R_m - R_i) = 15·0$	$E' = 1·339$
	$2(A_m - A_i) = 8·2$	$2(A_m - A_i = 9·2$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2·096$
	$E_g = 1·745$	$E_g = 1·323$	$2(R_m - E_i) = 12·2$
	Im Mittel $E_g = 1·734$.		$2(A_m - A_i) = 23·8$
			$E_g = 2·063$.

Tabelle II.

(Stellung der Haken wie in Tabelle I.)

Schwefelkugel				Metallkugel
Haken I. Stellung N	Haken I Stellung M	Haken II Stellung N	Haken I Stellung M	
$2R = 943{\cdot}6$	$2R = 943{\cdot}7$	$2R = 939{\cdot}2$	$2R = 936{\cdot}3$	$2R = 927{\cdot}6$
$2A = 84{\cdot}9-90{\cdot}3$	$2A = 80{\cdot}5-86{\cdot}1$	$2A = 791-84{\cdot}3$	$2A = 89{\cdot}6-97{\cdot}8$	$2A = 101{\cdot}1-109{\cdot}6$
$2A_i = 86{\cdot}8$	$2A_i = 83{\cdot}9$	$2A_i = 81{\cdot}4$	$2A_i = 95{\cdot}6$	$2A_m = 104{\cdot}5$
1·36	1·21	1·21	1·40	1·58
1·38	1·20	1·20	1·40	1·60
1·35	1·19	1·19	1·40	1·58
1·35	1·19	1·19	1·40	1·59
1·35	1·19	1·19	1·39	1·58
1·36	1·18	1·18	1·38	1·58
M 1·358	M 1·193	M 1·193	M 1·395	$M = 1{\cdot}585$
$E' = 1{\cdot}167$	$E' = 1{\cdot}323$	$E' = 1{\cdot}328$	$E' = 1{\cdot}139$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1{\cdot}827$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2{\cdot}071$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2{\cdot}079$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1{\cdot}783$	
$2(R_m - R_i) = -16{\cdot}0$	$2(R_m - R_i) = -16{\cdot}1$	$2(R_m - R_i) = -11{\cdot}6$	$2(R_m - R_i) = -8{\cdot}7$	
$2(A_m - A_i) = 17{\cdot}7$	$2(A_m - A_i) = 20{\cdot}6$	$2(A_m - A_i) = 23{\cdot}1$	$2(A_m - A_i) = 8{\cdot}9$	
$E_g = 1{\cdot}822$	$E_k = 2{\cdot}067$	$E_k = 2{\cdot}067$	$E_g = 1{\cdot}783$	

A_g im Mittel $= 1{\cdot}803$, E_k im Mittel $2{\cdot}067$

Tabelle III.

(Stellung der Haken wie in Tabelle I.)

Der Rechnung wurde das Mittel bei der Metallkugel-Beobachtung zu Grunde gelegt.

Metallkugel	Schwefelkugel: Haken I Stellung M	Schwefelkugel: Haken II Stellung M
$2R = 950 \cdot 8$	$2R = 949 \cdot 2$	$2R = 954 \cdot 1$
$2A = 104 \cdot 9 - 107 \cdot 4$	$2A = 90 \cdot 2 - 92 \cdot 1$	$2A = 64 \cdot 4 - 81 \cdot 2$
$2A_m = 105 \cdot 6$	$2A_i = 90 \cdot 9$	$2A_i = 78 \cdot 1$
1·59	1·37	1·23
1·60	1·37	1·21
1·60	1·37	1·22
1·58	1·37	1·23
1·60	1·36	1·23
1·60	M 1·368	1·21
M 1·595	$E' = 1 \cdot 177$	1·29
	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 842$	1·21
	$2(R_m - R_i) = 1 \cdot 6$	M 1·216
	$2(A_m - A_i) = 1 \cdot 4 \cdot 7$	$E' = 1 \cdot 324$
	$E_g = 1 \cdot 828$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2 \cdot 073$
		$2(R_m - R_i) = 27 \cdot 5$
		$E_k = 2 \cdot 049$

im Mittel $E_g = 1 \cdot 835$, $E_k = 2 \cdot 061$

(Fortsetzung der Tabelle III.)

Schwefelkugel		Metallkugel
Haken I Stellung N	Haken II Stellung N	
$2R = 955\cdot2$	$2R = 956\cdot3$	$2R = 961\cdot9$
$2A = 82\cdot4-86\cdot3$	$2A = 72\cdot9-82\cdot6$	$2A = 97\cdot7-103\cdot1$
$2A_i = 84\cdot9$	$2A_i = 75\cdot9$	$2A_m = 99\cdot8$
1·35	1·20	1·63
1·35	1·20	1·63
1·36	1·18	1·63
1·36	1·20	1·61
1·37	1·21	1·62
1·36	1·22	1·63
	1·18	1·63
	1·19	
	1·22	
M 1·358	M 1·20	M 1·625
$E' = 1\cdot185$	$E' = 1\cdot342$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1\cdot855$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2\cdot100$	
$2(R_m - R_i) = 4\cdot4$	$2(R_m - R_i) = 5\cdot6$	
$2(A_m - A_i) = 20\cdot7$	$2(A_m - A_i) = 23\cdot9$	
$E_g = 1\cdot842$	$E_k = 2\cdot073$	

im Mittel $E_g = 1\cdot835$, $E_k = 2\cdot061$

Tabelle IV.

Bei Einhängung des Hakens I geschieht die Wirkung parallel der grössten, bei Einhängung des Hakens II parallel der mittleren Hauptelasticitätsaxe.

(Der Rechnung wurde das Mittel der beiden Metallkugel-Beobachtungen zu Grunde gelegt.)

Schwefelkugel Haken II		Metallkugel
Stellung *M*	Stellung *M*	
$2R = 957 \cdot 9$	$2R = 957 \cdot 9$	$2R = 971 \cdot 8$
$2A = 52 \cdot 3 — 55 \cdot 3$	$2A = 52 \cdot 3 — 55 \cdot 3$	$2A = 76 \cdot 3 — 81 \cdot 1$
1·24*	1·24*	1·07
1·23	1·22	1·07
1·24	1·22	1·07
1·24	1·23	1·07
1·23	1·22	1·07
1·25	1·22	1·07
M 1·238*	*M* 1·228*	*M* 1·07
$E' = 1 \cdot 322$	$E' = 2 \cdot 310$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2 \cdot 069$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2 \cdot 057$	
$2(R_m - R_i) = 4 \cdot 0$	$2(R_m - R_i) = 5 \cdot 4$	
$2(A_m - A_i) = 24 \cdot 3$	$2(A_m - A_i) = 18 \cdot 2$	
$E_m = 2 \cdot 035$	$E_m = 2 \cdot 02$	

im Mittel $E_m = 2 \cdot 022$

(Fortsetzung der Tabelle IV.)

Schwefelkugel Haken I		Metallkugel
Stellung M	Stellung N	
$2R = 959\cdot1$	$2R = 959\cdot3$	$2R = 958\cdot0$
$2A = 57\cdot9-61\cdot2$	$2A = 54\cdot4-59\cdot5$	$2A = 77\cdot9-83\cdot3$
1·25*	1·24	1·05
1·24	1·24	1·07
1·23	1·24	1·04
1·24	1·25	1·04
1·24	1·24	1·06
	1·23	1·07
M 1·24	M 1·24	M 1·055
$E' = 1\cdot324$	$E' = 1\cdot324$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2\cdot072$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2\cdot072$	
$2(R_m = R_i) = 5\cdot0$	$2(R_m - R_i) = 5\cdot6$	
$2(A_m - A_i) = 18\cdot4$	$2(A^m - A_i)\ 20\cdot4$	
$E_k = 2\cdot046$	$E_k = 2\cdot044$	

im Mittel $E_k = 2\cdot045$

Tabelle V.

Versuche mit der kleinen Schwefelkugel.

(Hakenstellung wie in Tabelle I.)

Schwefelkugel		Metallkugel
Haken I Stellung M	Haken II Stellung M	
$2R = 867{\cdot}8$	$2R = 866{\cdot}9$	$R = 862{\cdot}1$
$2A = 45{\cdot}3 - 339$	$2A = 37{\cdot}9 - 33{\cdot}3$	$2A = 67{\cdot}1 - 72{\cdot}1$
1·34*	1·49*	1·56
1·30	1·53	1·55
1·32	1·51	1·45
1·34	1·45	1·48
1·34	1·45	1·56
1·33	1·47	1·58
1·30	1·47	1·60
M 1·3243*	1·48	1·55
$E' = 2{\cdot}042$	1·51	1·56
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1{\cdot}834$	1·51	1·51
$2(R_m - R_i) = -5{\cdot}7$	1·52	1·56
$2(A_m - A_i) = 31{\cdot}2$	1·52	M 1·5418
$E_g = 1{\cdot}813$	1·44	
	M 1·4885	
	$E' = 2{\cdot}294$	
	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2{\cdot}062$	
	$2(R_m - R_i) = -4{\cdot}8$	
	$2(A_m - A_i) = 35{\cdot}0$	
	$E_k = 2{\cdot}036$	

Tabelle VI.

(Hakenstellung wie in Tabelle I.)

Schwefelkugel				Metallkugel
Haken II Stellung M	Haken II Stellung N	Haken I Stellung M	Haken I Stellung N	
$2R = 733{\cdot}6$	$2R = 737{\cdot}5$	$2R = 739{\cdot}9$	$2R = 433{\cdot}9$	$2R = 736{\cdot}9$
$2A = 27{\cdot}5 - 30{\cdot}3$	$2A = 31{\cdot}1 - 32{\cdot}3$	$2A = 33{\cdot}5 - 35{\cdot}0$	$2A = 38{\cdot}7 - 42{\cdot}3$	$2A = 71{\cdot}3 - 80{\cdot}8$
1·57*	1·54*	1·36*	1·32*	1·51
1·58	1·58	1·32	1·31	1·53
1·56	1·55	1·35	1·34	1·55
1·59	1·59	1·34	1·34	1·53
1·59	1·57	1·33	1·32	1·54
1·55	1·57	1·34	1·32	1·53
1·58	1·57	1·33	1·32	1·53
1·53	1·55	1·33	1·32	1·51
1·54		1·36		
M 1·566*	M 1·565*	M 1·34*	M 1·323	M 1·529
$E' = 2{\cdot}393$	$E' = 2{\cdot}392$	$E' = 2{\cdot}048$	$E' = 2{\cdot}024$	
$2(R_m - R_i) = 3{\cdot}3$	$2(R_m - R_i) = -0{\cdot}6$	$2(R_m - R_i) = -3{\cdot}0$	$2(R_m - R_i) = 3{\cdot}0$	
$2(A_m - A_i) = 45{\cdot}7$	$2(A_m - A_i) = 43{\cdot}0$	$2(A_m - A_i) = 39{\cdot}9$	$2(A_m - A_i) = 3{\cdot}51$	
$\frac{V_i}{V_m} E = 2{\cdot}150$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2{\cdot}149$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1{\cdot}840$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1{\cdot}817$	
$E_k = 2{\cdot}102$	$E_k = 2{\cdot}101$	$E_g = 1{\cdot}819$	$E_g = 1{\cdot}786$	
im Mittel $E_k = 2{\cdot}1015$		im Mittel $E_g = 1{\cdot}8025$		

Tabelle VII.

(Stellung der Haken wie in Tabelle IV.)

Metallkugel	Schwefelkugel Haken I, Stellung M	Schwefelkugel Haken I, Stellung N	Metallkugel
$2R = 1076·9$	$2R = 1075·6$	$2R = 1070·0$	$2R = 1072·5$
$2A = 87·8—95·8$	$2A = 32·2—40·2$	$2A = 39·2—41·9$	$2A = 87·6—93·6$
1·12	2·09*	2·14*	1·06
1·11	2·07	2·13	1·05
1·13	2·06	2·09	1·06
1·11	2·06	2·13	1·06
1·11	2·07	2·12	1·05
1·12	2·08	2·12	
1·12	2·05		
M 1·117	M 2·069*	M 2·121*	M 1·056
	$E' = 2·249$	$E' = 2·306$	
	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2·020$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2·072$	
	$2(R_m - R_i) = 1·3$	$2(R_m - R_i) = 2·5$	
	$2(A_m - A_i) = 53·4$	$2(A_m - A_i) = 50·9$	
	$E_m = 1·972$	$E_m = 2·024$	

im Mittel $E_m = 1·998$

(Fortsetzung der Tabelle VII.)

Schwefelkugel Hakon II		Metallkugel
Stellung *M*	Stellung *M*	
$2R = 1067{\cdot}9$	$2R = 1051{\cdot}9$	$2R = 1058{\cdot}2$
$2A = 38{\cdot}6$—$40{\cdot}5$	$2A = 38{\cdot}9$—$39{\cdot}7$	$2A = 93{\cdot}4$—$99{\cdot}4$
2·15*	2·24*	1·12
2·15	2·24	1·11
2·18	2·23	1·10
2·18	2·22	1·11
2·17	2·22	1·12
2·21		
M 2·173*	*M* 2·23*	*M* 1·112
$E' = 2{\cdot}356$	$E' = 2{\cdot}417$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2{\cdot}116$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2{\cdot}171$	
$2(R_m - R_i) = 4{\cdot}6$	$2(R_m - R_i) = 6{\cdot}3$	
$2(A_m - A_i) = 52{\cdot}0$	$2(A_m - A_i) = 56{\cdot}4$	
$E_k = 2{\cdot}068$	$E_k = 2{\cdot}106$	

im Mittel $E_k = 2{\cdot}087$

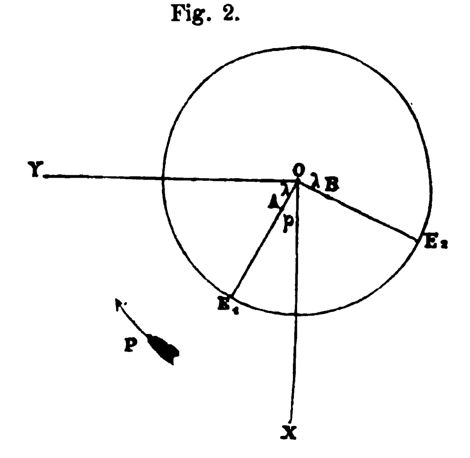
Ich stellte endlich noch einige Versuche an, bei denen der Doppelhaken so aufgeklebt war, dass die Elektricität zwar jedesmal parallel der Ebene zweier Hauptelasticitätsaxen, aber unter 45° gegen dieselben geneigt, auf die Schwefelkugel wirkte.

Dieser Fall lässt sich folgendermassen theoretisch behandeln. Sei der nebenstehende Kreis der horizontale Querschnitt der Schwefelkugel mit dem Radius a, also derjenige, in dem die Einwirkung stattfindet. O sei sein Centrum, OE_1 sei diejenige Richtung der Kreisebene, welcher die grösste Dielektricitätsconstante D_1, OE_2 jene, der die kleinste Dielektricitätsconstante D_2 entspricht

$$E_1 \text{ sei} = \frac{D_1+2}{D_1-1}, \quad E_2 = \frac{D_2+2}{D_2-1}.$$

In X befinde sich die wirkende elektrische Masse e, OX sei gleich p, $\sphericalangle XOE_1 = \varphi$. In Y sei der Drehpunkt der Drehwage,

Fig. 2.



OY sei $= h$. Die gesammte im Inneren der Schwefelkugel in der Richtung XO wirkende elektrische Kraft ist $\frac{e}{p^2}$ (wenn XO sehr gross ist. Man zerlegt sie in die Componenten $\frac{e}{p^2}\cos\varphi$ in der Richtung E_1O und $\frac{e}{p^2}\sin\varphi$ in der Richtung E_2O. Die erstere erzeugt in der Kugel das elektrische Moment

$$\frac{ea^3\cos\varphi}{E_1p^2}$$

letztere

$$\frac{ea^3 \sin\varphi}{E_2 p^2},$$

jede in ihrer Richtung.

Wir können daher die Wirkung der Schwefelkugel ersetzen durch die von vier elektrischen Massen

$$e_1 = \frac{ea^3 \cos\varphi}{E_1 p^2 \lambda} \quad \text{und} \quad e_2 = \frac{ea^3 \sin\varphi}{E_2 p^2 \lambda}$$

in O und

$$e_3 = -\frac{ea^3 \cos\varphi}{E_1 p^2 \lambda} \text{ in } A$$

und

$$e^4 = -\frac{ea^3 \sin\varphi}{E_3 p^2 \lambda} \text{ in } B,$$

wenn $OA = OB = \lambda$. Die Wirkung der elektrischen Kraft von e auf diese elektrischen Massen liefert zusammen zwei Kräfte von den Intensitäten

$$\frac{2e^2a^3}{p^5}\left(\frac{\cos^2\varphi}{E_1} + \frac{\sin^2\varphi}{E_2}\right) \tag{2}$$

und

$$-\frac{e^2a^3 \sin 2\varphi}{2p^5}\left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right) \tag{3}$$

ersterer in der Richtung OX, letztere in der Richtung OY und ein Drehungsmoment von der Stärke

$$-\frac{e^2a^3 \sin 2\varphi}{2p^4}\left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2}\right) \tag{4}$$

welches die Kugel um die Z-Achse, und zwar von der positiven X-Achse gegen die positive Y-Achse zu, also in der Richtung des Pfeiles P zu drehen sucht.

Die Kraft, welche in der Richtung der Y-Achse wirkt, übt keinen Einfluss auf die Drehwage, sobald die Linie OX senkrecht auf dem Hebelarme steht, wenn jedoch diese Bedingung nicht erfüllt ist, so gibt sie Veranlassung zu einer Fehlerquelle. Das

Moment wirkt gerade so auf die Drehwage, als ob auf die eingehängte Kugel eine Kraft von der Stärke

$$-\frac{e^2a^3 \sin 1\varphi}{2p^4h}\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right) \tag{5}$$

anziehend wirkte. Im Ganzen wird also die Drehwage so abgelenkt, als ob auf die Kugel die Anziehung

$$\frac{2e^2a^3}{p^5}\left(\frac{\cos^2\varphi}{E_1}+\frac{\sin^2\varphi}{E_2}\right)-\frac{e^2a^3 \sin 2\varphi}{2p^4h}\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right) \tag{6}$$

wirken würde. Die Anziehung der Metallkugel ist wie sonst

$$\frac{2e^2a'^3}{p^5}$$

Der reciproke Werth des Quotienten, welchen man erhält, wenn man die Anziehung der Schwefelkugel, welche der Drehwage den gleichen Ausschlag ertheilen würde, dividirt, hat also den Werth

$$\frac{1}{E^{\varphi}}=\frac{\cos^2\varphi}{E_1}+\frac{\sin^2\varphi}{E_2}-\frac{p \sin 2\varphi}{4h}\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right). \tag{7}$$

Bei meinen Beobachtungen hatte φ den Absolutwerth 45°, und zwar ist es gleich + 45° zu setzen, wenn die Richtung der grössten Dielektricitätsconstante innerhalb der vom Kugel-Centrum nach der wirkenden Elektricitätsmenge und nach dem Drehpunkte der Drehwage gezogenen Linien fällt. Sonst ist $\varphi = -45°$. Den Haken, bei dessen Einhängung die erste Lage der Kugel stattfindet, will ich den Haken 1, den andern den Haken 2 nennen.

Bei den in Tabelle 8 zusammengestellten Zahlen geschah die Wirkung in der Ebene der grössten und kleinsten Hauptelasticitätsaxe, bei den übrigen in der Ebene der mittleren und kleinsten Hauptelasticitätsaxe.

Tabelle VIII.

Kleine Schwefelkugel		Metallkugel
Haken I.	Haken II.	
$2R = 789\cdot1$	$2R = 791\cdot2$	$2R = 781\cdot8$
$2A\ 27\cdot7-36\cdot5$	$1A\ 25\cdot7-41\cdot5$	$2A\ 73\cdot1-78.8$
1·50*	1·43*	1·52
1·49	1·44	1·53
1·52	1·42	1.53
1·51	1·43	1·54
1·51	1·43	1·54
1·48	1·45	1·54
1·51	1·42	1·52
		1·51
M 1·503*	M 1·431*	M 1·5287
$E' = 2\cdot298$	$E' = 2\cdot188$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2\cdot064$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1\cdot966$	
$2(R_m - R_i) = -7\cdot3$	$2(R_m - R_i) = -9\cdot4$	
$2(A_m - A_i) = -41\cdot3$	$2(A_m - A_i) = 4\cdot11$	
$E^{45} = 2\cdot031$	$E^{45} = 1\cdot937$	

Will man die Werthe E^{45} und E^{-45} dieser Tabelle nach Formel 7) berechnen, so hat man in jener Formel $E_1 = E_g$, $E_2 = E_k$ zu setzen.

Nimmt man für E_g und E_k die aus der elektromagnetischen Lichttheorie folgenden Werthe, so ergibt sich $E^{45} = 2\cdot084$ $E^{-42} = 1\cdot867$.

Tabelle IX.

Grosse Schwefelkugel		Metallkugel
Haken I.	Haken II.	
$2R = 916{\cdot}1$	$2R = 906{\cdot}2$	$2R = 912{\cdot}3$
$2A$ 46·1—47·9	$1A$ 50·4—52·1	$2A$ 61·0—63·7
1·19*	1.12*	1.14
1·18	1.09	1·12
1·17	1.09	1·13
1·15	1·10	1.15
1·16	1.11	1.16
1.16	1·10	1.14
1.16	1·12	1.15
1.16	1.104*	1·141
1.166*	$E' = 1{\cdot}260$	
$E' = 1{\cdot}331$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1{\cdot}973$	
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2{\cdot}084$	$2(R_m - R_i) = 6{\cdot}1$	
$2(R_m - R_i) = -3{\cdot}8$	$2(A_m - A_i) = 10{\cdot}7$	
$2(A_m - A_i) = 14{\cdot}8$	$E^{-45} = 1{\cdot}957$	
$E^{45} = 2{\cdot}073$		

Berechnet man wie bei Tabelle 8 die Werthe von E^{45} und E^{-45} nach Formel 7), so hat man $E_1 = E_m$ oder $E_2 = E_k$ zu setzen. Nimmt man wieder für E_g und E_k die aus der elektromagnetischen Lichttheorie folgenden Werthe, so findet man $E^{45} = 2{\cdot}132$, $E^{-45} = 2{\cdot}062$.

Die beiden in meiner zweiten Abhandlung in den §§. 1 und 4 besprochenen Correctionen habe ich, weil sie sehr unsicher und jedenfalls zu gross sind, unterlassen. In den folgenden beiden Tabellen sind die bei sämmtlichen Beobachtungen gefundenen Werthe des E mit dem aus der elektromagnetischen Lichttheorie folgenden zusammengestellt. Die als Überschrift über den Verticalreihen stehenden Ziffern geben an, in welcher Tabelle die dem Werthe des E entsprechenden Beobachtungen angeführt sind.

Tabelle X. (Grosse Schwefelkugel.)

Wirkung in der Richtung der Hauptelasticitätsaxen.

Nach d. elektr.-magn. Lichttheorie		Beobachtet			
		I	II	III	IV
E_g	1·812	1·734	1·803	1·817	—
E_m	2.040	—	—	—	2·022
E_k	2·157	2·063	2·067	2·061	2·045

Tabelle XI. (Kleine Schwefelkugel.)

Nach d. elektr.-magn. Lichttheorie		Beobachtet		
		V	VI	VII
E_g	1·812	1·813	1.802	—
E_m	2·040	—	—	1·998
E_k	2·157	2·036	2·101	2·087

Tabelle XII.

Wirkung unter 45° gegen die Hauptelasticitätsaxen geneigt.

Nach d. elektr.-magn. Lichttheorie		Beobachtet	Nach d. elektr.-magn. Lichttheorie		Beobachtet
	VIII			XI	
E^{45}	2·084	2·031	E^{45}	2.132	2·073
E^{-45}	1·867	1·937	E^{-45}	2·062	1·957

Der Unterschied zwischen dem grössten und kleinsten Werthe des E ist durchaus in den beobachteten Werthen sehr scharf markirt, so dass kaum mehr ein Zweifel sein kann, dass die Dielektricität des krystallisirten Schwefels in der That nach den verschiedenen Richtungen verschieden ist, und zwar in der von der elektromagnetischen Lichttheorie geforderten Weise. Die Werthe von E_m und E_k sind so nahe, dass meine Methode einer erheblichen Verfeinerung bedürfte, um dieselben quantitativ zu messen. Doch stellte sich der Unterschied immer noch wenigstens qualitativ heraus.

Auch bei der Grösse E^{45} und E^{-45} war von vorneherein eine grosse Übereinstimmung nicht zu erwarten, theils wegen der Schwierigkeit, den Haken genau unter 45° geneigt aufzukleben, theils weil bei dieser Stellung eine kleine Abweichung von diesem Winkel sowie von der senkrechten Stellung des Hebelarmes der Drehwage auf der Verbindungslinie der Centra die wirkenden und beweglichen Kugel von besonders grossem Einflusse auf das Resultat sind.

Im Mittel ergibt sich aus allen meinen Beobachtungen für krystallisirten Schwefel

$$E_g = 1{\cdot}795,\quad E_m = 2{\cdot}010,\quad E_k = 2{\cdot}067;$$

daher für die Dielektricitätsconstanten

$$D_g = 4{\cdot}773,\quad D_m = 3{\cdot}970,\quad D_k = 3{\cdot}811;$$

während die elektro-magnetische Lichttheorie liefert

$$D_g = 4{\cdot}596,\quad D_m = 3{\cdot}886,\quad D_k = 3{\cdot}591.$$

Experimentaluntersuchung über die Fernwirkung dielektrischer Körper.

(Ausgeführt im k. k. physikalischen Institute der Grazer Universität unter der Leitung des Prof. Boltzmann.)

Von **Romich** und **Fajdiga,**
stud. phil.

Der Zweck unserer Untersuchung war, zu prüfen, welchen Einfluss die Oberfläche dielektrischer Körper auf die elektrostatische Fernwirkung ausübt. Um dies zu erfahren, wurden Kugeln mit verschiedenen Substanzen überzogen und dann die Anziehung, welche sie durch eine fixe elektrische Kugel erfuhren, nach Boltzmann's Methode (Wien. Ber. Bd. LXVIII, II. Abth.) gemessen.

Würde die Einwirkung nur von der Beschaffenheit der Oberfläche abhängen und würden nicht leitende Körper durch Influenz und nicht durch Polarisation geladen werden, so müsste z. B. eine mit Paraffin überzogene Schwefelkugel unter denselben Umständen ebenso stark angezogen werden wie eine Paraffinkugel ohne Überzug. Dies war jedoch nicht der Fall; sondern die Resultate einer reinen und einer überzogenen Kugel waren nur wenig von einander verschieden. Von der theoretischen Bestimmung des Einflusses eines Überzuges, welcher von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzt ist, wurde schon deshalb Umgang genommen, weil der Überzug durchaus nicht so gleichförmig aufgetragen war, wie es bei einer genauen Bestimmung durch Rechnung nothwendig wäre.

Der Untersuchung wurden unterzogen:

1. Eine mit Paraffin überzogene Schwefelkugel,
2. eine mit Colophonium überzogene Schwefelkugel,

3. eine mit einer Lösung von Schellak in Alkohol lackirte Schwefelkugel,
4. eine ebenso lackirte Paraffinkugel

Der Überzug mit Paraffin wurde durch rasches Eintauchen der Kugel in etwas über den Schmelzpunkt erhitztes Paraffin erzielt, wobei noch der Tropfen, der sich an der unteren Seite der Kugel bildete, thunlichst entfernt wurde. Ebenso wurde der Überzug mit Colophonium erhalten.

Zur Controle wurden noch früher eine Schwefelkugel und eine Paraffinkugel ohne Überzug untersucht.

Der Apparat, mit welchem die Versuche gemacht wurden, war derselbe, welchen Boltzmann zu seinen Versuchen zusammengestellt hat.

Nur einige kleine Verbesserungen wurden noch angebracht. So wurde, um die Rückwirkung der Elektricität, welche sich im Tische und im Kasten ansammelte, vollständig zu eliminiren, der ganze Tisch und der Kasten von innen mit Staniol bekleidet und diese Belegung mit der Erde verbunden. Um die Torsion und die bifilare Aufhängung des Fadens und dadurch die Schwingungsdauer der ersten Drehwage reguliren zu können, wurde das eine Ende des Coconfadens, an welchem der Hebel hing, an der Spindel einer Schraube festgemacht, das andere Ende aber um eine verschiebbare Hülse geschlungen. (Bei diesen Versuchen betrug die Schwingungsdauer ungefähr 1 Minute.) Zur Erzielung desselben Ausschlages war also eine etwa 6mal so kleine Kraft erforderlich, als bei den Versuchen Boltzmann's. Es wurde immer alternirende Ladung angewendet

Wir lassen hier die Resultate folgen. — Wie in der citirten Abhandlung Boltzmann's bezeichnet $2R$ die doppelte Ruhelage, $2A$ die doppelte Ablenkung (und zwar beziehen sich diese Grössen auf die erste Drehwage, wenn die Zahlen nicht ausführlich angegeben sind), a die reducirte, a^* die reciproke reducirte Anziehung, M und M^* die Mittelwerthe der letzten zwei Grössen; E' ist die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal stärker eine Metallkugel angezogen wird, als eine zugehörige isolirte, E die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal stärker eine Metallkugel angezogen wird, als eine gleichgrosse isolirte. V_i ist das Volum der isolirten, V_m der zugehörigen Metallkugel.

I. Die mit Paraffin überzogene Schwefelkugel.

Isolirte Kugel.

Erste Drehwage		Zweite Drehwage		a^*
8396	$2R = 16269$	8221	$2R = 17374$	
8096	$2B = 16480$	8692	$3B = 16946$	2·03
8372	$2A = 211$	8288	$2A = 428$	
8362	$2R = 16300$	8314	$2R = 17363$	
8130	$2B = 16486$	8654	$2B = 16987$	2·02
8350	$2A = 186$	8352	$2A = 376$	
8326	$2R = 16323$	8404	$2R = 17345$	
8140	$2R = 16459$	8655	$2B = 17073$	2·00
8312	$2A = 136$	8432	$2A = 272$	
8296	$2R = 16322$	8453	$2R = 17338$	
8140	$2B = 16430$	8658	$2B = 17113$	2·09
8284	$2A = 108$	8458	$2A = 225$	
8343	$2R = 16320$	8352	$2R = 17333$	
8138	$2B = 16456$	8653	$2B = 17037$	2·04
8312	$2A = 145$	8417	$2A = 296$	
8278	$2R = 16316$	8459	$2R = 17327$	
8144	$2B = 16418$	8660	$2B = 17124$	2·00
8270	$2A = 102$	8470	$2A = 203$	
				$M^* = 2·030$

Metallkugel.

Erste Drehwage		Zweite Drehwage		a
8540	$2R = 16322$	8298	$2R = 17327$	
8124	$2B = 16635$	8689	$2B = 17022$	1·02
8482	$2A = 313$	8369	$2A = 305$	
8520	$2R = 16315$	8312	$2R = 17325$	
8068	$2B = 16565$	8740	$2B = 17087$	1·05
8474	$2A = 250$	8383	$2A = 238$	
8608	$2R = 16329$	8256	$2R = 17323$	
7928	$2B = 16564$	8862	$2B = 17096$	1·03
8665	$2A = 235$	8213	$2A = 227$	
8403	$2R = 16323$	8429	$2R = 17321$	
8145	$2B = 16563$	8654	$2B = 17096$	1·07
8406	$2A = 240$	8455	$2A = 225$	
8472	$2R = 16312$	8393	$2R = 17318$	
8162	$2B = 16605$	8608	$2B = 17033$	1·03
8414	$2A = 293$	8458	$2A = 285$	
8348	$2R = 16300$	8510	$2R = 17315$	
8140	$2B = 16540$	8624	$2B = 17081$	1·02
8452	$2A = 240$	8404	$2A = 324$	
				$M = 1·037$

$$E' = 2·105$$

$$\frac{V_i}{V_m} E' = 2·14 \qquad \frac{V_i'}{V_m} E' = 2·02$$

$$2(R_m - R_i) = 0·9$$
$$2(A_m - A_i) = 9·7$$

$$E = 2·12 \qquad E = 2·01$$

V_i ist das Volum der isolirten Kugel und des Überzuges zusammen; V_i' das Volum der isolirten Kugel nach der Entfernung des Überzuges.

Aus Versehen wurde bei den folgenden Kugeln das V_i' nicht bestimmt.

II. Die mit Colophonium überzogene Schwefelkugel.

Isolirte Kugel.

Erste Drehwage		Zweite Drehwage		a^*
8114	$2R = 15517$	7929	$2R = 16837$	
7752	$2B = 15858$	8278	$2B = 16238$	1·76
8098	$2A = 314$	7991	$2A = 559$	
8112	$2R = 15549$	7800	$2R = 16809$	
7782	$2B = 15889$	8359	$2B = 16204$	1·78
8102	$2A = 340$	7890	$2A = 605$	
8106	$2R = 15557$	7913	$2R = 16796$	
7788	$2B = 15882$	8270	$2B = 16217$	1·78
8082	$2A = 325$	7982	$2A = 579$	
8130	$2R = 15561$	7912	$2R = 16785$	
7785	$2B = 15907$	8228	$2B = 16166$	1·79
8114	$2A = 346$	7964	$2A = 619$	
8104	$2R = 15558$	7953	$2R = 16766$	
7770	$2B = 15871$	8243	$2B = 16215$	1·76
8098	$2A = 313$	7991	$2A = 551$	
8090	$2R = 15557$	7875	$2R = 16760$	
7785	$2B = 15869$	8288	$2B = 16202$	1·79
8078	$2A = 312$	7953	$2A = 558$	
8082	$2R = 15552$	7922	$2R = 16753$	
7774	$2B = 15842$	8267	$3B = 16229$	1·81
8054	$2A = 290$	8093	$2A = 524$	
8084	$2R = 15546$	7946	$2R = 16743$	
7752	$2B = 15828$	8266	$2B = 16239$	1·79
8068	$2A = 282$	8001	$2A = 504$	
				$M^* = 1·7825$

Metallkugel

Erste Drehwage		Zweite Drehwage		a
8402	$2R = 15584$	7912	$2R = 16648$	
7758	$2B = 16150$	8247	$2B = 16188$	1·22
8382	$2A = 566$	7970	$2A = 460$	
8638	$2R = 15641$	7839	$2R = 16621$	
7685	$2B = 16291$	8202	$2B = 16073$	1·19
8574	$2A = 650$	7903	$2A = 548$	
8492	$2R = 15651$	7822	$2R = 16576$	
7812	$2B = 16287$	8184	$2B = 16032$	1·17
8458	$2A = 636$	7875	$2A = 544$	
8490	$2R = 15640$	7842	$2R = 16563$	
7769	$2B = 16253$	8203	$2B = 16063$	1·22
8478	$2A = 613$	7878	$2A = 500$	
8440	$2R = 15607$	7848	$2R = 16554$	
7786	$2B = 16215$	8162	$2B = 16036$	1·17
8418	$2A = 608$	7900	$2A = 518$	
8398	$2R = 15587$	7904	$2R = 16554$	
7772	$2B = 16167$	8156	$2B = 16069$	1·19
8392	$2A = 580$	7922	$2A = 485$	
8385	$2R = 15569$	7922	$2R = 16565$	
7792	$2B = 16152$	8126	$2B = 16065$	1·17
8335	$2A = 583$	7956	$2A = 500$	
				$M = 1·19$

$$E' = 2{\cdot}121$$

$$\frac{V_i}{V_m} E' = 2{\cdot}565$$

$$2(R_m - R_i) = 6{\cdot}2$$

$$2(A_m - A_i) = 29{\cdot}0$$

$$E = 2{\cdot}51.$$

Dass das Verhältniss $\frac{V_i}{V_m}$ so gross ist, erklärt sich daraus, weil der Überzug mit Colophonium sehr dick war.

III. Lackirte Schwefelkugel.

Isolirte Kugel

Erste Drehwage		Zweite Drehwage		a*
7616	$2R = 14739$	7962	$2R = 16918$	
7370	$2B = 14980$	8450	$2B = 16438$	1.95
7604	$2A = 241$	8015	$2A = 480$	
7638	$2R = 14789$	8000	$2R = 16878$	
7384	$2B = 15017$	8409	$2B = 16427$	1.98
7628	$2A = 228$	8037	$2A = 451$	
7630	$2R = 14802$	8015	$2R = 16861$	
7395	$2B = 15019$	8397	$2B = 16430$	1·99
7618	$2A = 217$	8051	$2A = 431$	
7632	$2R = 14813$	8007	$2R = 16831$	
7406	$2B = 15032$	8380	$2B = 16408$	1·94
7602	$2A = 219$	8050	$2A = 423$	
7634	$2R = 14813$	7990	$2R = 16819$	
7398	$2B = 15024$	8373	$2B = 16388$	2.04
7618	$2A = 211$	8040	$2A = 431$	
7625	$2R = 14802$	7990	$2R = 16802$	
7390	$2B = 15009$	8372	$2B = 16383$	2.04
7614	$2A = 207$	8032	$2A = 419$	
7615	$2R = 14795$	8013	$2R = 16796$	
7395	$2B = 15002$	8348	$2B = 16384$	1.95
7600	$2A = 207$	8060	$2A = 412$	
				$M^* = 1·984$

Metallkugel.

Erste Drehwage		Zweite Drehwage		a
8004	$2R = 14840$	7836	$2R = 16781$	
7418	$2B = 15404$	8387	$2B = 16261$	1·08
7968	$2A = 564$	7912	$2A = 520$	
8014	$2R = 14856$	7853	$2R = 16772$	
7430	$2B = 15418$	8366	$2B = 16258$	1·09
7962	$2A = 562$	7932	$2A = 514$	
7960	$2R = 14868$	7895	$2R = 16764$	
1460	$2B = 15395$	8347	$2B = 16280$	1·09
7910	$2A = 527$	7972	$2A = 484$	
8012	$2R = 14871$	7853	$2R = 16758$	
7434	$2B = 15425$	8362	$2B = 16253$	1·10
7970	$2A = 554$	7929	$2A = 505$	
7962	$2R = 14870$	7920	$2R = 16753$	
7446	$2B = 15392$	8323	$2B = 16272$	1·09
7930	$2A = 522$	7978	$2A = 481$	
7942	$2R = 14868$	7897	$2R = 16748$	
7455	$2B = 15386$	8348	$2B = 16271$	1·09
7920	$2A = 518$	7950	$2A = 477$	

$$E' = 2{\cdot}162$$

$$\frac{V_i}{V_m} E' = 2{\cdot}062$$

$$2(R_m - R_i) = 6{\cdot}9$$

$$2(A_m - A_i) = 32{\cdot}2$$

$$E = 2{\cdot}01$$

IV. Die lackirte Paraffinkugel.

Isolirte Kugel.

Erste Drehwage.		Zweite Drehwage		a^*
7850	$2R = 15190$	7898	$2R = 16781$	
7600	$2B = 15444$	8379	$2B = 16298$	1·94
7838	$2A = 254$	7940	$2A = 483$	
7850	$2R = 15196$	7890	$2R = 16772$	
7592	$2B = 15436$	8397	$2B = 16306$	1·94
7838	$2A = 240$	7928	$2A = 466$	
7840	$2R = 15203$	7945	$2R = 16766$	
7600	$2B = 15435$	8356	$2B = 16318$	1·93
7831	$2A = 232$	7980	$2A = 448$	
7834	$2R = 15207$	7913	$2R = 16765$	
7612	$2B = 15440$	8387	$2B = 16320$	1·91
7822	$2A = 233$	7953	$2A = 445$	
7846	$2R = 15213$	7950	$2R = 16771$	
7610	$2B = 15447$	8347	$2B = 16317$	1·94
7828	$2A = 234$	7991	$2A = 454$	
7840	$2R = 15206$	7928	$2R = 16767$	
7592	$2B = 15529$	8400	$2B = 16338$	1·91
7835	$2A = 223$	7948	$2A = 429$	
7874	$2R = 15198$	7870	$2R = 16767$	
7592	$2R = 15449$	8379	$2B = 16284$	1·92
7840	$3A = 251$	7941	$2A = 483$	
				$M^* = 1{\cdot}9271$

Metallkugel

Erste Drehwage		Zweite Drehwage		a
8430	$2R = 15111$	7902	$2R = 16848$	
7510	$2B = 15912$	8441	$2B = 16368$	1·67
8365	$2A = 801$	7952	$2A = 480$	
3319	$2R = 15120$	7983	$2R = 16840$	
7581	$2B = 15880$	8387	$2B = 16386$	1·68
8279	$A2 = 760$	8016	$2A = 454$	
8347	$2R = 15126$	7932	$2R = 16835$	
7540	$3B = 15876$	8447	$2B = 16389$	1·68
8325	$2A = 050$	7953	$2A = 446$	
8300	$2R = 15130$	7971	$2R = 16830$	
7586	$2B = 15884$	8401	$2B = 16377$	1·66
7296	$2A = 754$	7982	$2A = 453$	
8240	$2R = 15128$	7997	$2R = 16826$	
7570	$2B = 15792$	8417	$2B = 16429$	1·67
8205	$2A = 664$	8027	$2A = 397$	
8335	$2R = 15124$	7943	$2R = 16823$	
7573	$2B = 15833$	8402	$2B = 16395$	1·66
8185	$2A = 709$	8043	$2A = 428$	
				$M = 1·67$

$$E' = 3·217$$

$$\frac{V_i}{V_m} E' = 3·407$$

$$2(R_m - R_i) = -7·7$$

$$2(A_m - A_i) = 49.9$$

$$E = 3·314$$

Schwefelkugel ohne Überzug.

I. Versuchsreihe

Isolirte Kugel	Metallkugel
$2R = 1810 \cdot 0$	$2R = 1803 \cdot 7$
$2A = 26 \cdot 5 — 28 \cdot 2$	$2A = 63 \cdot 1 — 70 \cdot 6$
$2A_i = 27 \cdot 0$	$2A_m = 66 \cdot 2$
a^*	a
1·62	1·30
1·67	1·38
1·64	3·34
1·67	1·35
1·65	1·35
$M^* = 1 \cdot 65$	$M = 1 \cdot 344$

$$E' = 2 \cdot 217$$

$$\frac{V_i}{V_m} E' = 2 \cdot 099$$

$2(R_m — R_i) = —6 \cdot 3$ $\quad$ $2(A_m — A_i) = 39 \cdot 2$

$$E = 2 \cdot 053$$

II. Versuchsreihe.

Isolirte Kugel	Metallkugel
$2R = 1456 \cdot 0$	$2R = 1452 \cdot 0$
$2A = 25 \cdot 4 — 37 \cdot 0$	$2A = 45 \cdot 8 — 63 \cdot 1$
$2A_i = 31 \cdot 5$	$2A_m = 54 \cdot 7$
a^*	a
1·20	1·89
1·20	1·82
1·23	1·86
1·26	1·88
1·22	1·83
$M^* = 1 \cdot 222$	$M = 1 \cdot 85$

$$E' = 2 \cdot 271$$

$$\frac{V_i}{V_m} E' = 2 \cdot 098$$

$2(R_m — R_i) = —4 \cdot 0$ $\quad$ $2(A_m — A_i) = 22 \cdot 2$

$$E = 2 \cdot 072$$

Paraffinkugel ohne Überzug.

Isolirte Kugel.	Metallkugel.
$2R = 1467\cdot1$	$2R = 1472\cdot9$
$2A = 8\cdot8—10\cdot5$	$2A = 31\cdot5—33\cdot5$
$2A_i = 9\cdot7$	$2A_m = 32\cdot3$
a*	a
2·16	1·46
2·10	1·45
2·17	1·45
2·15	1·42
2·18	1·46
2·16	1·44
2·17	$M = 1\cdot4466$
2·17	
$M^* = 2\cdot1575$	

$$E' = 3\cdot121$$

$$\frac{V_i}{V_m}E' = 3\cdot382$$

$$2(R_m—R_i) = 5\cdot8$$

$$2(A_m—A_i) = 22\cdot6$$

$$E = 3\cdot320$$

Dass $\frac{V_i}{V_m}$ so gross ausfiel, kommt daher, weil die Metallkugel beim Überziehen mit Staniol zusammengedrückt wurde.

Der leichteren Übersicht stellen wir im folgenden noch einmal die Resultate kurz nebeneinander:

Name der untersuchten Kugel			E
Schwefelkugel	ohne Überzug	I. Versuchsreihe	2·053
		II. Versuchsreihe	2·072
	überzogen mit Paraffin	aus V_i.......	2·12
		aus V_i'......	2·01
	überzogen mit Colophonium.........		2·51
	lackirt.........................		2·01
Paraffinkugel	ohne Überzug....................		3·320
	lackirt.........................		3·314

Wie man sieht, unterscheiden sich die Zahlen der überzogenen Kugeln von den Kugeln ohne Überzug, wenn der Überzug sehr dünn war, nur wenig; am wenigsten bei den lackirten Kugeln, wo man die Einwirkung des Überzuges nahezu vernachlässigen kann. Nur bei der mit Colophonium überzogenen Schwefelkugel war die Wirkung des Überzuges bemerkbar, was aber durchaus in keiner speciellen Oberflächenwirkung begründet ist, da bei diesem Versuche der Uberzug so dick war, dass er sich auch gemäss der Dielektricitätstheorie bemerkbar machen musste.

Experimentaluntersuchung dielektrischer Körper in Bezug auf ihre dielektrische Nachwirkung.

Von **Romich** und **Nowak**

(ausgeführt im physik. Cabinete der Grazer Universität unter der Leitung Prof. Boltzmann's).

Wenn wir auf einen guten Leiter elektrische Kräfte einwirken lassen, so wird er unmessbar kleine Zeit nach dem Beginne der Wirksamkeit der elektrischen Kräfte durch Influenz mit Elektricität geladen. Das Potential bleibt so lange unverändert, so lange die einwirkenden Kräfte constant bleiben. Ganz ähnlich verhält sich die dielektrische Polarisation. Auch sie tritt unmessbar kleine Zeit nach dem Beginne der Wirksamkeit der elektrischen Kräfte auf, und ändert ihre Intensität so lange nicht, so lange die elektrischen Kräfte constant bleiben. Doch diese reine dielektrische Polarisation zeigen nicht alle Nichtleiter; statt nämlich constant zu bleiben, wächst sie mit der Dauer der Einwirkung bei übrigens constant bleibenden Kräften, so dass die Körper um so stärker dielektrisch polarisirt erscheinen, je länger man elektrische Kräfte auf sie einwirken lässt. Diese Erscheinung wird von Faraday „elektrische Absorption", von Boltzmann „dielektrische Nachwirkung" genannt. Die Nichtleiter in Bezug auf ihre dielektrische Nachwirkung zu prüfen, war der Zweck vorliegender Untersuchung.

Es wurden nämlich verschiedene Körper zuerst bei alternirender, wo das Zeichen der wirkenden Elektricität in einer Minute 64mal wechselte, und dann, ohne die betreffende Kugel auszuhängen, bei dauernder Ladung, wo die Elektricität eines Zeichens während drei Halbschwingungen einwirkte, untersucht. Die ganze Schwingung geschah ungefähr in 25 Secunden. Bei dauernder Ladung wurde auf die Weise verfahren, wie es

Boltzmann in § 6 (Experimental-Untersuchung über elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper, Sitzungsberichte Bd. LXVIII. II. Abth.) angibt. Bei den Versuchen zeigte sich, dass die Funken bei einer grossen Schlagweite nicht immer gleich gross waren; darum nahm man die Schlagweite kleiner, wodurch die Funken regelmässiger wurden, liess aber 2, 3 oder mehrere Funken überspringen. Dadurch wurde es erreicht, dass die Menge der wirkenden Elektricität nahezu immer die gleiche war, was bei dauernder Ladung, wo sich die Kugeln mit Elektricität entgegengesetzten Zeichens laden, von Wichtigkeit war.

Bei mehreren Kugeln wurde auch noch untersucht, ob die Intensität der einwirkenden Kräfte einen Einfluss auf die dielektrische Polarisation und Nachwirkung ausübt. Um verschiedene Intensität der wirkenden Kraft zu erzielen, wurde bei alternirender Ladung die Maschine mit verschiedenen Geschwindigkeiten gedreht, bei dauernder Ladung liess man aber bald mehr bald weniger Funken überspringen. Bei sämmtlichen Kugeln hat sich gezeigt, dass die Stärke der wirkenden Kräfte ohne Einfluss ist innerhalb der Grenzen, innerhalb deren wir deren Intensität variirten. Um zu constatiren, ob nicht äussere Einflüsse, namentlich in der Nähe befindliche Halbleiter (die freilich auf's sorgfältigste mit zur Erde abgeleitetem Staniol bekleidet waren), das Resultat afficirten, wurde zuerst eine gut leitende Kugel untersucht; Dauer und Stärke der Ladung waren dabei ohne Einfluss, woraus folgt, dass ein solcher Einfluss, wo er auftritt, der inneren Natur des Dielektricums zuzuschreiben ist.

Eine aus einem Schwefelkrystalle geschliffene Kugel zeigte keine Nachwirkung. Dann wurden untersucht: aus Selen gegossene Kugeln und vier aus Krystallen geschliffene, eine Kalkspathkugel, eine Glaskugel, eine Quarzkugel und eine Flussspathkugel. Von diesen vier haben die Glas-, Quarz- und Flussspathkugel eine ganz merkliche Nachwirkung gezeigt; weniger ist die Nachwirkung beim Kalkspath constatirt. Sehr merkwürdig hat sich Selen verhalten. Es wurde zuerst eine Selenkugel 24 Stunden nach dem Gusse der Untersuchung unterzogen, wobei sie eine ganz erhebliche Nachwirkung gezeigt hat; sodann wurde sie an späteren Tagen untersucht, wo sie sich aber wie ein guter Leiter verhielt.

Weil sich möglicherweise doch ein Beobachtungsfehler einschleichen konnte, so wurde eine zweite Kugel gegossen, welche sich aber wie die erste verhielt.

Die Dielektricitätsconstanten aller dieser Substanzen ergeben sich aus diesen Versuchen viel grösser, als es die elektromagnetische Lichttheorie erfordern würde. Bei den Substanzen, wobei dieselbe mit der Dauer der Einwirkung wächst, konnte das nicht anders erwartet werden, da die Schwingungsdauer der Stimmgabel vielmal grösser als die der Lichtoscillationen ist. Beim Kalkspath freilich constatiren unsere Versuche die dielektrische Nachwirkung nicht mit Sicherheit; doch machen sie wahrscheinlich, dass auch er sie besitzt und dass sie sich nur bereits in kürzerer Zeit herstellt. Genauere Versuche hierüber sind abzuwarten.

Um vielleicht eine Erklärung der dielektrischen Nachwirkung zu bekommen, wurde zuletzt noch folgender Versuch gemacht: In flüssigen Schwefel wurde Graphitpulver (guter Leiter) gegeben und aus diesem Brei eine Kugel gegossen. Die auf diese Art bereitete Kugel hat auch eine erhebliche Nachwirkung gezeigt. Daraus könnte man vielleicht auf die innere Zusammensetzung der Nichtleiter schliessen und könnte sie in zwei Gruppen eintheilen. In die erste Gruppe fallen Nichtleiter, welche keine dielektrische Nachwirkung zeigen, in die zweite Gruppe die mit dielektrischer Nachwirkung.

Die ersten (bis jetzt nur von Schwefel constatirt) bestehen aus Molecülen, welche selbst Nichtleiter sind, die zweiten (Glas, Quarz, Flussspath) aus Molecülen, welche gute Leiter und von einander durch nichtleitende Substanz getrennt sind. Durch geeignete Versuche könnte man vielleicht bei einem jeden Nichtleiter quantitativ bestimmen, wie viel nichtleitende Materie mit einander vermengt erscheinen.

Im Folgenden folgen die Resultate. Bei dauernder Ladung ist immer das Zeichen der wirkenden Elektricität beigesetzt.

Metallkugel (Versuch, ob die Stärke der Ladung einen Einfluss hat).

Metronom 60 Schläge	Metronom 120 Schläge
$2R = 829 \cdot 6$	$2R = 832 \cdot 6$
$2A = 47 \cdot 6 - 49 \cdot 6$	$2A = 77 \cdot 0 - 104 \cdot 4$
$2A_1 = 48 \cdot 4$	$2A_2 = 88 \cdot 7$
a_1	a_2
0·68	0·69
0·69	0·69
0·69	0·69
0·69	0·68
0·69	0·68
0·69	0·68
	0·69
$M_1 = 0 \cdot 68833$	$M_2 = 0 \cdot 68571$

$$G = \frac{M_1}{M_2} = 1 \cdot 004$$

Die Anbringung der Correctionen hätte hier keinen Sinn, weil bei denselben vorausgesetzt ist, dass die Ausschläge der zweiten Drehwage in beiden Fällen dieselben waren.

Metallkugel (Versuch, ob die Dauer der Ladung von Einfluss ist).

Alternirende Ladung	Dauernde Ladung
$2R = 869 \cdot 2$	$2R = 868 \cdot 5$
$2A = 81 \cdot 5 - 84 \cdot 0$	$2A = 76 \cdot 3 - 109 \cdot 9$
$2A_1 = 82 \cdot 6$	$2A_2 = 87 \cdot 1$
a_1	a_2
1·53	1·64+
1·52	1·43—
1·54	1·49—
1·55	1·57+
1·54	1·66+
1·53	1·43—
1·53	1·49—
1·53	1·56+
$M_1 = 1 \cdot 53375$	$M_2 = 1 \cdot 53375$

$$G = \frac{M_2}{M_1} = 1 \cdot 000$$
$$2(R_1 - R_2) = +0 \cdot 7$$
$$2(A_1 - A_2) = -4 \cdot 5$$
$$G = 0 \cdot 998$$

Schwefelkugel (Versuch, ob sie eine Nachwirkung hat).

Alternirende Ladung	Dauernde Ladung
$2R = 992 \cdot 0$	$2R = 992 \cdot 5$
$2A = 38 \cdot 8 - 41 \cdot 0$	$2A = 28 \cdot 3 - 49 \cdot 6$
$2A_1 = 39 \cdot 9$	$2A_2 = 40 \cdot 5$
a_1*	a_2*
1·42	1·22+
1·39	1·62—
1·43	1·27—
1·44	1·55+
1·44	1·21+
1·44	1·67—
1·41	1·28—
	1·54+
$M_1{}^* = 1 \cdot 4243$	$M_2{}^* = 1 \cdot 42$

$$G' = \frac{M_1{}^*}{M_2{}^*} = 1 \cdot 003$$
$$2(R_2 - R_1) = 0 \cdot 5$$
$$2(A_2 - A_1) = 0 \cdot 6$$
$$G = 1 \cdot 002$$

Anmerkung. G bedeutet die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal stärker sich eine Kugel bei dauernder Ladung polarisirt als bei alternirender.

Es ist also:

$$G = \frac{M \text{ (bei dauernder Ladung)}}{M \text{ (bei alternirender Ladung)}},$$

oder wie leicht einzusehen

$$= \frac{E \text{ (bei alternirender Ladung)}}{E \text{ (bei dauernder Ladung)}}.$$

Bei der Schwefelkugel wurde eine zugehörige Metallkugel desshalb nicht untersucht, weil schon durch Boltzmann's Versuche alle hierauf abzielenden Daten sehr genau festgestellt sind.

Bei folgenden Kugeln wurden jedoch auch immer zugehörige Metallkugeln untersucht.

Glaskugel.

Isolirte Kugel		Metallkugel
Alternirende Ladung	Dauernde Ladung	
$2R = 1038 \cdot 8$	$1038 \cdot 3$	$2R = 1024 \cdot 2$
$2A = 71 \cdot 0 - 74 \cdot 4$	$2A = 45 \cdot 7 - 67 \cdot 4$	$2A = 54 \cdot 1 - 90 \cdot 7$
$2A_i = 73 \cdot 3$	$2A_i = 53 \cdot 7$	$2A_m = 69 \cdot 1$
a^*	a^*	a
0·71	0·52+	1·39
0·70	0·47—	1·39
0·70	0·46—	1·38
0·70	0·53+	1·40
0·71	0·51+	1·40
0·70	0·48—	1·38
	0·47—	1·39
$M^* = 0 \cdot 70333$	0·52+	$M = 1 \cdot 39$
	$M^* = 0 \cdot 495$	

Alternirende Ladung.

$$E' = 0 \cdot 978$$

$$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 450$$

$$2(R_m - R_i) = -14 \cdot 6$$

$$2(A_m - A_i) = -4 \cdot 2$$

$$E = 1 \cdot 462$$

Dauernde Ladung.

$$E' = 0 \cdot 688$$

$$\frac{V_i}{V_m} E = 1 \cdot 020$$

$$2(R_m - R_i) = -14 \cdot 1$$

$$2(A_m - A_i) = 15 \cdot 4$$

$$E = 1 \cdot 019$$

$$G = 1 \cdot 435$$

Flussspath (I. Versuch).

Isolirte Kugel		Metallkugel
Alternirende Ladung	Dauernde Ladung	
$2R=850\cdot1$	$2R=851\cdot4$	$2R=833\cdot1$
$2A=37\cdot1-39\cdot5$	$2A=32\cdot2-62\cdot6$	$2A=38\cdot8-41\cdot4$
$2A_i=38\cdot4$	$2A_i=46\cdot7$	$2A_m=40\cdot1$
a^*	a^*	a
1·42	0·97+	0·72
1·43	1·85—	0·72
1·43	1·73—	0·71
1·45	1·03+	0·72
1·42	0·99+	0·74
$M^*=1\cdot43$	1·82—	$M=0\cdot722$
	1·66—	
	1·04+	
	$M^*=1\cdot39$	

Alternirende Ladung	Dauernde Ladung
$E'=1\cdot033$	$E'=1\cdot004$
$2(R_m-R_i=-17\cdot0$	$2(R_m-R_i)=-18\cdot3$
$2A_m-A_i)=1\cdot7$	$2(A_m-A_i)=-6\cdot6$
$\frac{V_i}{V_m}E'=1\cdot517$	$\frac{V_i}{V_m}E'=1\cdot475$
$E=1\cdot527$	$E=1\cdot491$

$$G=1\cdot024$$

Flussspath (II. Versuch).

Isolirte Kugel		Metallkugel
Alternirende Ladung	Dauernde Ladung	
$2R=817\cdot 3$	$2R=819\cdot 6$	$2R=817\cdot 0$
$2A=51\cdot 8-60\cdot 5$	$2A=40\cdot 0-68\cdot 8$	$2A=48\cdot 3-51\cdot 4$
$2A_i=57\cdot 9$	$2A_i=50\cdot 6$	$2A_m=50\cdot 1$
a^*	a^*	a
1·35	1·00—	0·76
1·36	1·51+	0·72
1·35	1·40+	0·75
1·35	1·06—	0·74
1·35	1·00—	0·74
1·36	1·45+	$M=0\cdot 742$
$M^*=1\cdot 3533$	1·39+	
	1·07—	
	1·01—	
	1·41+	
	1·35+	
	1·13—	
	$M^*=1\cdot 23$	

Alternirende Ladung	Dauernde Ladung
$E'=1\cdot 008$	$E'=0\cdot 912$
$\frac{V_i}{V_m}E'=1\cdot 480$	$\frac{V_i}{V_m}E'=1\cdot 337$
$2(R_m-R_i)=-0\cdot 3$	$2(R_m-R_i)=-2\cdot 6$
$2(A_m-A_i)=-7\cdot 8$	$2(A_m-A_i)=-0\cdot 5$
$E=1\cdot 485$	$E=1\cdot 339$

$$G=1\cdot 109$$

Flussspath (III. Versuch).

Isolirte Kugel		Metallkugel
Alternirende Ladung	Dauernde Ladung	
$2R = 904\cdot3$	$2R = 906\cdot6$	$2R = 892\cdot9$
$2A = 33\cdot5 - 35\cdot7$	$2A = 45\cdot1 - 81\cdot6$	$2A = 33\cdot2 - 39\cdot2$
$2A_i = 34\cdot6$	$2A_i = 60\cdot6$	$2A_m = 36\cdot8$
a^*	a^*	a
1·39	0·92+	0·79
1·38	1·71—	0·75
1·38	1·53—	0·79
1·38	0·97+	0·73
1·33	0·93+	0·78
1·30	1·63—	0·78
$M^* = 1\cdot36$	1·50—	0·76
	0·98+	0·75
	$M^* = 1\cdot27125$	$M = 0\cdot76625$

Alternirende Ladung	Dauernde Ladung
$E' = 1\cdot042$	$E' = 0\cdot974$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1\cdot520$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1\cdot430$
$2(R_m - R_i) = -11\cdot4$	$2(R_m - R_i) = -13\cdot7$
$2(A_m - A_i) = -2\cdot2$	$2(A_m - A_i) = 0$[1]
$E = 1\cdot526$	$E = 1\cdot438$

$$G = 1\cdot061$$

[1]) Da bei Ableitung der Correctionsformel vorausgesetzt wurde, dass bei Einhängung der isolirenden und der Metallkugel der Ausschlag der zweiten Drehwage nahe derselbe sei, dies aber hier nicht stattfand, so darf der Werth von $A_m - A_i$ nicht aus der obigen Tabelle entnommen werden. Da vielmehr die Flussspathkugel fast genau so stark wie die Metallkugel angezogen wurde, so war zu erwarten, dass bei gleichem Ausschlage der zweiten Drehwage $A_m = A_i$ geworden wäre. Da ferner nach den in der ersten Tabelle angeführten Zahlen die reducirte Anziehung der Metallkugel nur sehr wenig von der Stärke der Einwirkung abhängt, so wurde $A_m - A_i = 0$ gesetzt. Dasselbe gilt überall, wo $A_m - A_i$ mit dem Zeichen [1]) versehen ist. Eine weitere Motivirung hievon liegt in dem Umstande, dass bei allen andern Beobachtungen $A_m - A_i$ verschwindend klein ist.

Quarzkugel (I. Versuch).

Isolirte Kugel				Metallkugel
Alternirende Ladung		Dauernde Ladung		
Metronom 60 Schläge	Metronom 120 Schläge	3 Funken	5 Funken	
$2R=869\cdot1$	$2R=869\cdot4$	$2R=879\cdot8$	$2R=870\cdot5$	$2R=882\cdot5$
$2A=41\cdot8-42\cdot8$	$2A=69\cdot7-72\cdot3$	$2A=52\cdot8-74\cdot8$	$2A=158\cdot5-180\cdot4$	$2A=37\cdot7-40\cdot5$
$2A_i=42\cdot4$	$2A_i=70\cdot8$	$2A_i=60\cdot0$	$2A=167\cdot5$	$2A_m=39\cdot0$
a^*	a^*	a^*	a^*	a
1·46	1·45	0·79+	0·76+	0·72
1·43	1·44	0·82—	0·76—	0·70
1·44	1·46	0·78—	0·76—	0·69
1·44	1·44	0·80+	0·79+	0·70
1·45	1·44	0·78+	0·76+	0·70
		0·81—	0·77—	
		0·79—	0·76—	
		0·81+	0·78+	
$M^*=1\cdot442$	$M^*=1\cdot446$	$M^*0\cdot7975$	$M^*=0\cdot7675$	$M=0\cdot702$

Alternirende Ladung:		Dauernde Ladung:	
Metronom 60 Schläge	Metronom 120 Schläge	3 Funken	5 Funken
$E' = 1 \cdot 012$	$E' = 1 \cdot 015$	$E' = 0 \cdot 560$	$E' = 0 \cdot 539$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 835$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 840$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 015$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 0 \cdot 977$
$2(R_m - R_i) = + 13 \cdot 4$	$2) R_m - R_i) = 13 \cdot 1$	$2(R_m - R_i) = 2 \cdot 7$	$2(R_m - R_i) = 12 \cdot 0$
$2(A_m - A_i) = - 3 \cdot 4$	$2(A_m - A_i) = 0$ [1]	$2(A_m - A_i) = 0$ [1]	$2(A_m - A_i) = 0$ [1]
$E_{60} = 1 \cdot 827$	$E_{120} = 1830$	$E_3 = 1 \cdot 013$	$E_5 = 0 \cdot 968$

$$E = 1 \cdot 829 \qquad\qquad E = 0 \cdot 991$$

$$G = 1843$$

Quarzkugel (II. Versuch).

Isolirte Kugel				Metallkugel
Alternirende Ladung		Dauernde Ladung		
Metronom 72 Schläge	Metronom 144 Schläge	3 Funken	5 Funken	
$2R=912\cdot5$	$2R=913\cdot5$	$2R=913\cdot5$	$2R=914\cdot6$	$2R=914\cdot6$
$2A=46\cdot2$—$59\cdot7$	$2A=58\cdot2$—$95\cdot1$	$2A=62\cdot9$—$89\cdot1$	$2A=186\cdot6$—$242\cdot9$	$2A=50\cdot8$—$57\cdot4$
$2A_i=53\cdot3$	$2A_i=82\cdot4$	$2A_i=77\cdot0$	$2A_i=216\cdot4$	$2A_m=53\cdot8$
a^*	a^*	a^*	a^*	a
1·43	1·43	0·69+	0·81—	0·68
1·43	1·47	0·92—	0·73+	0·70
1·44	1·42	0·88—	0·71+	0.70
1·42	1·48	0·72+	0·86—	0·71
1·44	$M^*=1\cdot45$	0·70+	$M^*=0\cdot7775$	0·69
1·42		0·93—		0·70
1·44		0·87—		0·72
$M^*=1\cdot43142$		0·72+		0·70
		$M^*=0\cdot80375$		$M=0\cdot70$

Alternirende Ladung:		Dauernde Ladung:	
Metronom 72 Schläge	Metronom 144 Schläge	3 Funken	5 Funken
$E' = 1 \cdot 002$	$E' = 1 \cdot 015$	$E' = 0 \cdot 563$	$E' = 0 \cdot 544$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 8165$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 840$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 021$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 0 \cdot 986$
$2(R_m - R_i) = 2 \cdot 1$	$2(R_m - R_i) = 1 \cdot 1$	$2(R_m - R_i) = 1 \cdot 1$	$2(R_m - R_i) = 0 \cdot 0$
$2(A_m - A_i) = 0 \cdot 5$	$2(A_m - A_i) = 0$ [1]	$2(A_m - A_i) = 0$ [1]	$2(A_m - A_i) = 0$ [1]
$E_{72} = 1 \cdot 813$	$E_{144} = 1 \cdot 839$	$E_3 = 1 \cdot 021$	$E_5 = 0 \cdot 986$
$E = 1 \cdot 826$		$E = 1 \cdot 003$	

$$G = 1 \cdot 821$$

Kalkspath (I. Versuch).

Isolirte Kugel				Metallkugel
Alternirende Ladung		Dauernde Ladung		
I. Haken	II. Haken	I. Haken	II. Haken	
$2R = 919\cdot5$	$2R = 916\cdot5$	$2R = 922\cdot7$	$2R = 918\cdot0$	$2R = 916\cdot1$
$2A = 48\cdot9 - 50\cdot0$	$2A = 43\cdot9 - 45\cdot3$	$2A = 34\cdot5 - 46\cdot5$	$2A = 33\cdot2 - 53\cdot2$	$2A = 43\cdot7 - 44\cdot6$
$2A_i = 49\cdot5$	$2A_i = 44\cdot6$	$2A_i = 40\cdot2$	$2A_i = 39\cdot4$	$2A_m = 44\cdot3$
a^*	a^*	a^*	a^*	a
1·60	1·64	1·38+	1·49+	0·62
1·62	1·63	1·61—	1·67—	0·62
1·60	1·65	1·45—	1·50—	0·61
1·62	1·62	1·55+	1·64+	0·61
1·63	1·66	1·37+	1·46+	0·62
	1·64	1·64—	1·65—	0·61
		1·44—	1·51—	
		1·52+	1·60+	
		1·37+	1·45+	
		1·65—	1·69—	
		1·45—	1·56—	
		1·54+	1·61+	
$M^* = 1\cdot614$	$M^* = 1\cdot64$	$M^* = 1\cdot4975$	$M^* = 1\cdot56916$	$M = 0\cdot615$

I. Haken.

Wirkung senkrecht zur optischen Axe:

Alternirende Ladung	Dauernde Ladung
$E' = 0 \cdot 992$	$E' = 0 \cdot 921$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 440$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 337$
$2(R_m - R_i) = -3 \cdot 4$	$2(R_m - R_i) = -6 \cdot 6$
$2(A_m - A_i) = -5 \cdot 2$	$2(A_m - A_i) = 4 \cdot 1$
$E = 1 \cdot 445$	$E = 1 \cdot 338$

$G = 1 \cdot 080$

II. Haken.

Wirkung parallel der optischen Axe:

Alternirende Ladung	Dauernde Ladung
$E' = 1.008$	$E' = 0 \cdot 965$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 463$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 401$
$2(R_m - R_i) = -0 \cdot 4$	$2(R_m - R_i) = -1 \cdot 9$
$2(A_m - A_i) = -0 \cdot 3$	$2(A_m - A_i) = 4 \cdot 9$
$E = 1 \cdot 463$	$E = 1 \cdot 399$

$G = 1 \cdot 046$

Haken I. und Haken II. standen auf einander senkrecht. Bei dem folgenden Versuche war nur ein Haken.

Kalkspath (II. Versuch).

Isolirte Kugel		Metallkugel
Alternirende Ladung	Dauernde Ladung	
$2R=914\cdot1$	$2R=915\cdot7$	$2R=925\cdot4$
$2A=30\cdot3-32\cdot8$	$2A=60\cdot9-76\cdot6$	$2A=33\cdot3-37\cdot6$
$2A_i=31\cdot5$	$2A_i=69\cdot8$	$2A_m=36\cdot2$
a^*	a^*	a
1·49	1·47+	0·64
1·50	1·49−	0·66
1·51	1·39−	0·65
1·52	1·61+	0·65
1·46	1·47+	0·65
1·49	1·50−	$M=65$
$M^*=1\cdot495$	1·38−	
	1·55+	
	$M^*=1\cdot4825$	

Alternirende Ladung	Dauernde Ladung
$E'=0\cdot972$	$E'=0\cdot963$
$\frac{V_i}{V_m}E'=1\cdot411$	$\frac{V_i}{V_m}E'=1\cdot399$
$2(R_m-R_i)=11\cdot3$	$2(R_m-R_i)=9\cdot7$
$2(A_m-A_i)=4\cdot7$	$2(A_m-A_i)=0$ [1]
$E=1\cdot403$	$E=1\cdot394$

$G=1\cdot006$

I. Selenkugel (11. August Nachmittag).

Isolirte Kugel		Metallkugel
Alternirende Ladung	Dauernde Ladung	
$2R = 857 \cdot 7$	$2R = 860 \cdot 2$	$2R = 846 \cdot 7$
$2A = 21 \cdot 5 - 22 \cdot 4$	$2A = 26 \cdot 4 - 43 \cdot 4$	$2A = 31 \cdot 3 - 32 \cdot 4$
$2A_i = 21 \cdot 8$	$2A_i = 33 \cdot 7$	$2A_m = 32 \cdot 0$
a^*	a^*	a
2·32	1·52—	0·61
2·45	2·12+	0·62
2·33	2·03+	0·61
2·44	1·60—	0·62
2·36	1·53—	0·61
2·37	2·18+	0·62
$M^* = 2 \cdot 3783$	1·99+	$M = 0 \cdot 615$
	1·60—	
	1·54—	
	2·07+	
	1·08+	
	1·65—	
	$M^* = 1 \cdot 8175$	

Alternirende Ladung	Dauernde Ladung
$E' = 1 \cdot 463$	$E' = 1 \cdot 117$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 327$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 013$
$2(R_m - R_i) = -11 \cdot 0$	$2(R_m - R_i) = -13 \cdot 5$
$2(A_m - A_i) = 10 \cdot 2$	$2(A_m - A_i) = -1 \cdot 7$
$E = 1 \cdot 327$	$E = 1 \cdot 020$

$$G = 1 \cdot 301$$

I. Selenkugel (12. August Nachmittag).

Isolirte Kugel		Metallkugel
Alternirende Ladung	Dauernde Ladung	
$2R = 822\cdot3$	$2R = 825\cdot7$	$2R = 821\cdot0$
$2A = 44\cdot6 - 46\cdot2$	$2A = 26\cdot3 - 57\cdot9$	$2A = 48\cdot5 - 51\cdot8$
$2A_i = 45\cdot4$	$2A_i = 41\cdot7$	$2A_m = 50\cdot0$
a^*	a^*	a
1·49	2·15+	0·73
1·49	1·16—	0·74
1·51	1·13—	0·73
1·51	2·07+	0·74
1·49	2·08+	0·74
1·49	1·18—	0·75
$M^* = 1\cdot49666$	1·14—	0·74
	2·19+	$M = 0\cdot73855$
	2·03+	
	1·18—	
	1·16—	
	2·10+	
	$M^* = 1\cdot6308$	

Alternirende Ladung

$$E' = 1\cdot104$$

$$\frac{V_i}{V_m} E' = 1\cdot002$$

$$2(R_m - R_i) = -1\cdot3$$

$$2(A_m - A_i) = 4\cdot6$$

$$E = 1\cdot000$$

Dauernde Ladung

$$E' = 1\cdot204$$

$$\frac{V_i}{V_m} E' = 1\cdot092$$

$$2(R_m - R_i) = -4\cdot7$$

$$2(A_m - A_i) = 8\cdot3$$

$$E = 1\cdot089$$

$$G = 0\cdot918$$

I. Selenkugel (12. August Vormittag).

Isolirte Kugel				Metallkugel
Alternirende Ladung		Dauernde Ladung		
Metronom 60 Schläge	Metronom 104 Schläge	2 Funken	4 Funken	
$2R = 930\cdot5$	$2R = 932\cdot7$	$2R = 933\cdot3$	$2R = 933\cdot8$	$2R = 922\cdot9$
$2A = 30\cdot4 - 39\cdot8$	$2A = 66\cdot5 - 69\cdot1$	$2A = 22\cdot9 - 34\cdot2$	$2A = 82\cdot6 - 96\cdot6$	$2A = 41\cdot7 - 44\cdot2$
$2A_i = 35\cdot7$	$2A_i = 67\cdot7$	$2A_i = 27\cdot0$	$2A_i = 91\cdot1$	$2A_m = 42\cdot8$
a^*	a^*	a^*	a^*	a
1·42	1·40	1·42+	1·40	0·77
1·40	1·40	1·41—	1·42	0·79
1·40	1·40	1·37—	1·35	0·79
1·39	1·40	1·50+	1·47	0·78
1·38	1·39	1·43+	1·40	0·78
1·35	$M^* = 1\cdot398$	1·39—	1·40	$M = 0\cdot782$
1·40		1·36—	1·34	
$M^* = 1\cdot39143$		1·51+	1·46	
		$M^* = 1\cdot42375$	$M^* = 1\cdot405$	

Alternirende Ladung:		Dauernde Ladung:	
Metronom 60 Schläge	Metronom 104 Schläge	2 Funken	4 Funken
$E' = 1\cdot088$	$E' = 1\cdot093$	$E' = 1\cdot113$	$E' = 1\cdot099$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 0\cdot987$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 0\cdot991$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1\cdot009$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 0\cdot997$
$2(R_m - R_i) = -7\cdot6$	$2(R_m - R_i) = -9\cdot8$	$2(R_m - R_i) = -10\cdot4$	$2(R_m - R_i) = -10\cdot9$
$2(A_m - A_i) = 6\cdot8$	$(A_m - A_i) = -24\cdot9$	$2(A_m - A_i) = 15\cdot8$	$2(A_m - A_i) = -48\cdot3$
$E_{60} = 0\cdot987$	$E_{104} = 1\cdot002$	$E_2 = 1\cdot007$	$E_4 = 1\cdot023$
$E = 0\cdot995$		$E = 1\cdot015$	

$$G = 0\cdot980$$

Alternirende Ladung:		Dauernde Ladung:	
Stellung *A*	Stellung *B*	Stellung *A*	Stellung *B*
$E' = 1 \cdot 522$	$E' = 1 \cdot 502$	$E' = 1 \cdot 132$	$E' = 1 \cdot 139$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 437$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 418$	$\frac{V_i}{V_m} E = 1 \cdot 069$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 075$
$2(R_m - R_i) = 10 \cdot 6$	$2(R_m - R_i) = 17 \cdot 6$	$2R_m - R_i) = 8 \cdot 9$	$2(R_m - R_i) = 13 \cdot 4$
$2(A_m - A_i) = 31 \cdot 5$	$2(A_m - A_i) = 16 \cdot 4$	$2(A_m - A_i) = 24 \cdot 7$	$2(A_m - A_i) = 24 \cdot 0$
$E_A = 1 \cdot 410$	$E_B = 1 \cdot 396$	$E_A = 1 \cdot 053$	$E_B = 1 \cdot 057$
$E = 1 \cdot 403$		$E = 1 \cdot 055$	

$$G = 1 \cdot 330$$

II. Selenkugel (18. August Nachmittag).

Isolirte Kugel		Metallkugel
Alternirende Ladung	Dauernde Ladung	
$2R = 911\cdot7$	$2R = 911\cdot0$	$2R = 910\cdot9$
$2A = 41\cdot6 - 43\cdot2$	$2A = 27\cdot3 - 37\cdot8$	$2A = 44\cdot9 - 46\cdot4$
$2A_i = 42\cdot4$	$2A_i = 31\cdot0$	$2A_m = 45\cdot9$
a^*	a^*	a
1·66	1·64+	0·65
1·64	1·70—	0·67
1·65	1·61—	0·66
1·64	1·69+	0·66
1·69	1·62+	0·65
1·65	1·68—	0·66
$M^* = 1\cdot655$	1·63—	0·65
	1·72+	$M = 0\cdot65714$
	$M^* = 1\cdot66125$	

Alternirende Ladung	Dauernde Ladung
$E' = 1\cdot088$	$E' = 1\cdot092$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 1\cdot027$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1\cdot031$
$2(R_m - R_i) = -0\cdot8$	$2(R_m - R_i) = -0\cdot1$
$2(A_m - A_i) = 3\cdot5$	$2(A_m - A_i) = 14\cdot9$
$E = 1\cdot026$	$E = 1\cdot024$

$$G = 1\cdot002$$

Die mit Graphitpulver gemengte Schwefelkugel.

Isolirte Kugel				Metallkugel
Stellung A		Stellung B		
Alternirende Ladung	Dauernde Ladung	Alternirende Ladung	Dauernde Ladung	
$2R = 935\cdot9$	$2R = 939\cdot7$	$2R = 927\cdot9$	$2R = 927\cdot8$	$2R = 930\cdot3$
$2A = 25\cdot5 - 27\cdot0$	$2A = 33\cdot7 - 48\cdot1$	$2A = 22\cdot9 - 24\cdot9$	$2A = 32\cdot6 - 46\cdot3$	$2A = 46\cdot8 - 50\cdot3$
$2A_i = 26\cdot0$	$2A_i = 37\cdot8$	$2A_i = 24\cdot1$	$2A_i = 37\cdot8$	$2A_m = 48\cdot0$
a^*	a^*	a^*	a^*	a
2·06	1·74+	2·00	1·88+	1·05
1·93	1·96—	1·99	1·87+	1·05
2·01	1·77—	2·03	1·72—	1·07
2·01	1·95+	1·97	1·96+	1·05
2·00	1·78+	2·02	1·87+	1·03
2·00	1·96—	M^* 2·008	1·87—	$M = 1\cdot05$
M^* 2·00166	1·72—		1·79—	
	1·97+		1·98+	
	$M^* = 1\cdot85625$		$M^* = 1\cdot8675$	

Alternirende Ladung:		Dauernde Ladung:	
Stellung A	Stellung B	Stellung A	Stellung B
$E' = 2 \cdot 102$	$E' = 2 \cdot 108$	$E' = 1 \cdot 949$	$E' = 1 \cdot 961$
$\frac{V_i}{V_m} E' = 2 \cdot 027$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 2 \cdot 033$	$\frac{V_i}{V_w} E' = 1 \cdot 880$	$\frac{V_i}{V_m} E' = 1 \cdot 891$
$2(R_m - R_i) = -5 \cdot 6$	$2(R_m - R_i) = 2 \cdot 4$	$2(R_m - R_i) = -9 \cdot 4$	$2(R_m - R_i) = 2 \cdot 5$
$2(A_m - A_i) = 22 \cdot 0$	$2(A_m - A_i) = 23 \cdot 9$	$2(A_m - A_i) = 10 \cdot 2$	$2(A_m - A_i) = 10 \cdot 2$
$E_A = 2 \cdot 012$	$E_B = 2 \cdot 009$	$E_A = 1 \cdot 879$	$E_B = 1 \cdot 880$

$$E = 2011 \qquad\qquad E = 1 \cdot 880$$

$$G = 1 \cdot 070$$

Anmerkung. Stellung A bildet mit der Stellung B einen Winkel von 180°. Dadurch, dass man das Mittel nimmt, wird der Fehler eliminirt, der von irgend einer Abplattung der Kugel herrühren könnte.

Der leichteren Übersicht wegen wollen wir im Folgenden die erhaltenen Resultate zusammenstellen:

	Bei alternirender Ladung		Bei dauernder Ladung		*G*
	E	*D*	*E*	*D*	
Metallkugel	—	—	—	—	0·998
Schwefel	—	—	—	—	1·002
Glas	1·462	7·5	1·019	159	1·435
Flussspath I. Versuch	1·527	6·7	1·491	7·1	1·024
Flussspath II. Versuch	1·485	7·2	1·339	9·9	1·109
Flussspath III. Versuch	1·526	6·7	1·438*	7·9*	1·061*
Quarz I. Versuch	1·829*	4·6*	0·991*	∞*	1·838*
Quarz II. Versuch	1·826*	4·6*	1·003*	1000*	1·821*
Kalkspath Wirkung ⊥ optische Axe	1·445	7·7	1·338	9·9	1·080
Kalkspath Wirkung ‖ optische Axe	1·463	7·5	1·399	8·5	1·046
Kalkspath III. Versuch	1·403	8·4	1·394*	8·6*	1·006*

		Bei alternirender Ladung		Bei dauernder Ladung		G
		E	D	E	D	
1. Selenkugel	24 Stunden nach dem Gusse	1·327	10·2	1·020	151	1·301
	später	1·000	∞	1·089	35	0·918
		0·995	∞	1·015	201	0·980
		1·052	59	1·063	49	0·990
2. Selenkugel	24 Stunden nach dem Gusse	1·403	8·4	1·055	56	1·330
	später	1·026	116	1·024	126	1·002
Schwefel mit Graphitpulver gemengt		2·011	4·0	1·880	4·4	1·070

Die mit * bezeichneten Werthe von *E* und *G* sind wegen Unsicherheit der Correction vielleicht etwas ungenau. Eine sehr grosse oder unendliche Dielektricitätsconstante bedeutet, dass die betreffende Kugel so stark, wie eine isolirte Metallkugel angezogen wird. Verschiedene Unregelmässigkeiten, z. B. Werthe des *G*, die kleiner als eins sind, liegen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, doch dürften die Beobachtungen noch einer erheblichen Verfeinerung fähig sein.

XXII. SITZUNG VOM 15. OCTOBER 1874.

Der Secretär theilt eine Zuschrift Sr. Excellenz des Herrn Ackerbau-Ministers vom 11. October mit, womit eröffnet wird, dass dem von der Akademie befürworteten Ansuchen der Herren Hofrath von Schrötter und Bergrath Adolf Patera entsprechend, die Berg- und Hüttenverwaltung zu Joachimsthal angewiesen wurde, eine Quantität vanadinsauren Natrons einzusenden und den genannten Herren zur Verfügung zu stellen.

Herr Dr. Fr. Steindachner übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Ichthyologische Beiträge."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 29. Wien, 1874; 4°.

Central-Observatorium, Physikalisches, zu St. Petersburg: Jahresbericht für 1871 und 1872. St. Petersburg, 1873; 4°. — Annalen: Jahrgang 1872. St. Petersburg, 1873; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 13. Paris, 1874; 4°.

Genootschap, Bataviaasch, van Kunsten en Wetenschappen: Tijdschrift voor indische taal-, land- en volkenkunde. Deel XXI, Aflev. 2. Batavia, & 's Hage, 1874; 8°. — Notulen. Deel XI. 1873, Nr. 3 & 4. Batavia, 1874; 8°.

Gesellschaft, k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Bd. XVII (neuer Folge VII), Nr. 9. Wien, 1874; 8°.

— naturforschende, in Danzig: Schriften. N. F. III. Bandes 2. Heft. Danzig, 1873; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 41. Wien, 1874; 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, von C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. IV. Band. Jahrgang 1872. Heft 1. Berlin, 1874; 8°.

Leiden, Universität: Annales academici. 1868—1869, 1869—1870. Lugduni-Batavorum, 1873 & 1874; 4°.

Löwen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften für das Jahr 1873/4. 8° & 12°.

Musée Teyler: Archives. Vol. III. fasc. 3me. Haarlem, Paris & Leipzig, 1873; 4°.

Nature. Nrs. 248, 250, 258, Vol. X. London, 1874; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger." IVe Année, 2me Série, Nr. 15. Paris 1874; 4°.

Société Hollandaise des Sciences naturelles: Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles. Tome VIII, 3e & 4e Livraisons. La Haye, Bruxelles, Paris, Leipzig, Londres & New-York, 1873; 8°. — Bibliotheca ichthyologica et piscatoria. Haarlem, 1873; 8°.

— Linnéenne du Nord de la France: Bulletin mensuel. 3e Année. 1874; Nrs. 25—28. Amiens; 8°.

Society, The Royal, of London: Philosophical Transactions. For the Year 1873. Vol. 163, Parts 1 & 2. London, 1874; 4°. — Proceedings. Vol. XXI, Nrs. 146—147. Vol. XXII. Nrs. 148—150. London, 1873 & 1874; 8°. — The Anatomy of the Lymphatic System. By E. Klein. London, 1873; 8°. — The Royal Society. 30th November 1873. 4°.

— The Zoological, of London: Transactions. Vol. VIII. Parts 6—8. London, 1873 & 1874; 4°. — Proceedings. For the Year 1873. Parts I—III; for the Year 1874. Part I. London; 8°.

Vereeniging, Koninkl. natuurkundige in Nederlandsch Indië: Natuurkundige Tijdschrift. Deel XXXII. (VII. Serie. Deel II. Aflv. 4—6). Batavia, 's Gravenhage, 1873; 8°.

Verein, Entomologischer, in Berlin: Berliner Entomologische Zeitschrift. XVIII. Jahrgang. (1874.) 3. & 4. Vierteljahrsheft. Berlin; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang Nr. 40—41. Wien, 1874; 4°.

XXIII. SITZUNG VOM 22. OCTOBER 1874.

Herr Prof. Dr. Ludwig Boltzmann erstattet seinen Dank für seine Wahl zum correspondirenden Mitgliede der Akademie.

Derselbe übermittelt ferner einen Nachtrag zu seiner in der Sitzung am 8. October vorgelegten Abhandlung: „Zur Theorie der elastischen Nachwirkung.“ I.

Herr Dr. L. J. Fitzinger erstattet Bericht über die von ihm, mit Unterstützung der Akademie, an den oberösterreichischen Seen und in den dortigen Anstalten für künstliche Fischzucht gewonnenen Erfahrungen, bezüglich der Bastardformen der Salmonen.

Herr Dr. J. Peyritsch legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Zur Synonymie einiger Hippocratea-Arten.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Copenhague: Mémoires. Classe des Lettres. Vol. IV, Nr. 10. Copenhague, 1873; 4°. — Bulletin pour 1873. Nrs. 2—3. Copenhague; 8°.

— Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg: Mémoires. VIIe Série, Tome XIX, Nrs. 8—10; Tome XX, Nrs. 1—5; Tome XXI, Nrs. 1—5. St.-Pétersbourg, 1873 & 1874; 4°. — Bulletin. Tome XVIII, Nrs. 3—5; Tome XIX, Nrs. 1—3. St.-Pétersbourg, 1873 & 1874; 4°. — Repertorium für Meteorologie. Band III. St. Petersburg, 1874; 4°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. August 1874. Berlin; 8°.

— der Wissenschaften und Künste zu Agram: Rad. Knjiga XXVIII. U Zagrebu, 1874; 8°. — *Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium.* Vol. IV. U Zagrebu, 1874; 8°. — Stari pisci hrvatski. Knjiga VI. U Zagrebu, 1874; 8°.

American Chemist. Vol. V, Nr. 1. New-York, 1874; 4⁰.
— Journal of Science and Arts. Third Series. Vol. VI, Nrs. 35—36; Vol. VII, Nrs. 37—42. New Haven, 1873 & 1874; 8⁰.
Annalen (Justus Liebig's) der Chemie. Band 173, Heft 2 & 3; Band 174, Heft 1. Leipzig & Heidelberg, 1874; 8⁰.
Annales des mines. VIIᵉ Série. Tome V, 1ʳᵉ Livraison de 1874. Paris; 8⁰.
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 14. Paris, 1874; 4⁰.
Gesellschaft, Estnische, zu Dorpat: Verhandlungen. VIII. Bd., 1. Heft. Dorpat, 1874; 8⁰. — Sitzungsberichte. 1873. Dorpat, 1874; 8⁰.
— Naturforschende, in Emden: LIX. Jahresbericht. 1873. Emden, 1874; 8⁰.
— Astronomische, in Leipzig: Vierteljahrsschrift. IX. Jahrgang. 2. Heft. Leipzig, 1874; 8⁰. — XIII. Publication: Beobachtungen der Sonnenflecken zu Anclam von G. Spörer. Leipzig, 1874; 4⁰.
— Senckenbergische naturforschende: Abhandlungen. IX. Bandes 1. & 2. Heft. Frankfurt a. M., 1873; 4⁰.
— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 20. Wien, 1874; 4⁰.
Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang. Nr. 42. Wien, 1874; 4⁰.
Jena, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1873/4. 4⁰ & 8⁰.
Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 21. Graz, 1874; 4⁰.
Lotos. XXIV. Jahrgang. August & September 1874. Prag; 8⁰.
Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 20. Band, 1874, VII.—IX. Heft. Gotha; 4⁰.
Nature. Nr. 259, Vol. X. London, 1874; 4⁰.
Nuovo Cimento. Serie 2ᵃ. Tomo XII. Luglio e Agosto 1874. Pisa; 8⁰.
Osservatorio, Reale, di Brera in Milano: Pubblicazioni Nr. VII, parte 3ᵃ. Milano & Napoli, 1874; 4⁰.
Philomathie in Neisse: XVIII. Bericht. Neisse, 1874; 8⁰.
Repertorium für Experimental-Physik etc. von Ph. Carl. X. Band, 2., 3. & 4. Heft. München, 1874; 8⁰.

Revista de Portugal e Brazil. 2ᵉ Vol. Nr. 7—11. Lisboa, 1874; 4⁰.

— de la Universidad de Madrid. 2ᵃ Época. Tomo III, Nr. 5—6; Tomo IV, Nr. 1—2. Madrid, 1874; gr. 8⁰.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue des cours scientifiques de la France et de l'étranger.“ IVᵉ Année, 2ᵐᵉ Série, Nr. 16. Paris, 1874; 4⁰.

Sociedad Mexicana de historia natural: La Naturaleza. Tomo II. Entrega Nr. 40—42. Mexico, 1873/4; 4⁰.

Société Botanique de France: Bulletin. Tome XXIᵉ, 1874. Comptes rendus des séances. 2; Revue bibliographique A. Paris; 8⁰.

— Géologique de France: Bulletin. 3ᵉ Série. Tome II. 1874. Nrs. 3—4. Paris; 8⁰.

— Mathématique de France: Bulletin. Tome II. Nrs. 3—4. Paris, 1873; 8⁰.

— des Ingénieurs civils: Mémoires et comptes rendus des travaux. 3ᵉ Série, 27ᵉ Année, 2ᵉ Cahier. Paris, 1874; 8⁰.

— Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'Orient. XXVIIᵉ Année, Nr. 12; XVIIIᵉ Année, Nrs. 1—4. Constantinople, 1874; 4⁰.

Society, The Asiatic, of Bengal: Journal. Part I, Nr. 4. 1873; Part I, Nr. 1. 1874; Part II, Nr. 4. 1873; Part II, Nr. 1. 1874. Calcutta; 8⁰. — Proceedings. 1874. Nrs. I—V. January-May. Calcutta; 8⁰.

— The Royal Astronomical, of London: Monthly Notices. Vol. XXXIV, Nr. 8. June 1874. London, 8⁰.

— The Royal Geographical, of London: Journal. Vol. XLIII. London. 1873; 8⁰. — Proceedings. Vol. XVIII, Nr. 4. London, 1874; 8⁰.

— The Royal, of Edinburgh: Transactions. Vol. XXVII, Part I. For the Session 1872—73. 4⁰. — Proceedings. Session 1872—73. Vol. VIII. Nrs. 85—86. 8⁰.

Verein für Erdkunde zu Dresden: X. Jahresbericht. Dresden, 1874; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 42. Wien, 1874; 4⁰.

Über eine Modification der herrschenden Gastheorie.

Von **C. Puschl.**

Wenn eine Flüssigkeit in einem geschlossenen Gefässe unter einem als überall gleich anzusehenden Drucke steht, den wir durch die entsprechende Höhe h einer Säule derselben Flüssigkeit messen können, so fliegen durch eine irgendwo gemachte Öffnung die an sie stossenden Flüssigkeitstheilchen mit der Geschwindigkeit

$$U = \sqrt{2gh} \qquad 1)$$

heraus, wenn g die Beschleunigung der Schwerkraft ist.

Bedeutet p den in der Flüssigkeit herrschenden Druck auf 1 Quadratmeter in Kilogrammen und v das Volumen von 1 Kilogramm derselben, so ist die Druckhöhe $h = pv$ Meter und wir haben daher auch

$$U = \sqrt{2gpv}. \qquad 2)$$

Grenzt also eine Flüssigkeit, während sie sonst unter einem gewissen Drucke steht, irgendwo an einen Raum, in welchem eine vollkommen freie Bewegung gestattet ist, so treten die benachbarten Theilchen in denselben mit einer Geschwindigkeit ein, die ihrer Grösse nach derjenigen gleich ist, welche sie bei freiem Falle durch die entsprechende Druckhöhe erlangen würden. In freie Räume, welche innerhalb einer Flüssigkeit momentan vorhanden wären, müssten die angrenzenden Theilchen gleichfalls mit solchen Geschwindigkeiten hineinstürzen. Auf die Grösse dieser Räume käme es dabei nicht an, wenn nur die Bewegung in denselben vollkommen frei wäre. Einen Raum nun, in welchem seine Bewegung vollkommen frei ist, gibt es für jedes Flüssigkeitstheilchen; es ist dessen Gleich-

gewichtsort, d. h. jener Raum, für welchen die auf ein solches allseitig einwirkenden Kräfte sich aufheben. Insofern also in einer Flüssigkeit zwischen ihren Theilchen eine durchschnittlich überall gleiche Spannung herrscht, müssen dieselben sich durch ihre Gleichgewichtsorte mit Geschwindigkeiten bewegen, als wenn sie von der entsprechenden Druckhöhe frei herabgefallen wären. Es sei m die Masse eines Flüssigkeitstheilchens und, alle als gleich angenommen, n deren Zahl in der Gewichtseihheit, also $nmg = 1$, so ist die zur Erzeugung jenes Bewegungszustandes nöthige Arbeitskraft

$$\frac{nmU^2}{2} = \frac{U^2}{2g} = pv,$$

deren thermisches Äquivalent $= \frac{pv}{A}$ ist, wenn A das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit bedeutet.

Indem bei diesem Bewegungszustande in der Flüssigkeit durchschnittlich überall der Druck p herrscht, muss jedes Theilchen derselben diesen allseitigen äusseren Druck durch einen allseitigen inneren Gegendruck compensiren. Bezeichnen wir nun die Wärmemenge, welche 1 Kilogramm der Flüssigkeit vermöge des Zustandes besitzt, demzufolge in jedem Theilchen derselben eine gewisse, dem allseitigen Drucke p das Gleichgewicht haltende innere Spannung resultirt, mit w_1, so ist das ganze, in der gedachten Flüssigkeit vorhandene Wärmeäquivalent

$$w = w_1 + \frac{pv}{A}. \tag{3}$$

In den schwer zusammendrückbaren Flüssigkeiten beträgt das Wärmeäquivalent $\frac{pv}{A}$ unter den gewöhnlichen Umständen nur einen sehr kleinen Theil ihrer Gesammtwärme, z. B. für Wasser bei 0° C unter dem atmosphärischen Drucke noch nicht $\frac{1}{10000}$ derselben und da hier über die Grösse und den Sinn der Veränderung, welche die Wärmemenge w_1 durch Zusammendrückung erfahren mag, ohnehin nichts bekannt ist, so lässt

sich für diese Körper vorderhand aus der obigen Gleichung kein erheblicher Gewinn ziehen.

Wenden wir nun unsere Gleichung 3) auf ein vollkommenes Gas an. Wir wollen dabei die Vorstellung zu Grunde legen, dass in diesem Falle die allseitige Spannung eines ausdehnsam flüssigen Volumelements dadurch erzeugt werde, dass die ein solches Volumelement ausmachenden Atome darin nach allen Seiten frei umherfliegen, wobei dasselbe als Ganzes noch eine eigene Bewegung besitzen kann. Es sei μ die Masse eines jeden dieser Atome und ν deren Zahl in einem gasförmigen Raumelemente $= r$ mit der Masse m, ferner u^2 das durchschnittliche Quadrat der Geschwindigkeit jener Atome innerhalb des Raumelementes r, so ist nach der bekannten Deduction

$$pr = \frac{\nu\mu u^2}{3} = \frac{mu^2}{3}$$

und somit für das Gasvolumen v, wenn man sich dieses aus n solchen Raumelementen bestehend denkt:

$$pv = \frac{nmu^2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{nmu^2}{2}.$$

Die lebendige Kraft $\frac{nmu^2}{2}$ ist hierbei die zur Erzeugung des Druckes p im Volumen v nöthige Arbeitskraft, sie repräsentirt also die in der Gleichung 3) mit w_1 bezeichnete Wärmemenge, vorausgesetzt, dass die Atome des gedachten Gases in sich selbst keine Wärme besitzen, d. h. dass sie thermisch einfache Atome seien. Wir haben demnach für ein aus solchen Atomen bestehendes Gas zu setzen

$$Aw_1 = \frac{nmu^2}{2}$$

und hieraus folgt

$$pv = \frac{2}{3} Aw_1. \tag{4}$$

Setzen wir den hieraus sich ergebenden Werth von

$$w_1 = \frac{3pv}{2A}$$

in die Gleichung 3) ein, so wird

$$w = \frac{3pv}{2A} + \frac{pv}{A} = \frac{5pv}{2A}$$

und somit

$$pv = \frac{2}{5} Aw \tag{5}$$

d. h. die zur Erzeugung des Druckes in einem thermisch einfachen, vollkommenen Gase nöthige Wärmemenge macht zwei Fünftel seiner Gesammtwärme aus.

Andererseits ist bekanntlich, wenn k das Verhältniss der specifischen Wärme eines vollkommenen Gases bei constantem Drucke zu jener bei constantem Volumen bedeutet:

$$pv = (k-1)\, Aw; \tag{6}$$

hält man diese Relation mit unserer Gleichung 5) zusammen, so folgt für ein thermisch einfaches, vollkommenes Gas

$$k-1 = \frac{2}{5}$$

und daher

$$k = \frac{7}{5} = 1 \cdot 4.$$

Dieser oder ein ihm sehr nahe kommender Werth des Verhältnisses der specifischen Wärme bei constantem Drucke zu jener bei constantem Volumen kommt in einigen Gasen, und zwar in denjenigen, welche man für thermisch einfach zu halten den meisten Grund hat, wirklich vor, und ich glaube, dass, wenn die Urheber der hier benutzten Vorstellung von der Entstehung des Gasdruckes sogleich zu dem hier erhaltenen Resultate gekommen wären, dieses sicher für den glänzendsten Beweis der Richtigkeit jener Vorstellung gegolten hätte. Nach obiger Modification der ursprünglichen Theorie ist $\frac{5pv}{2A}$ das Minimum der in einem vollkommenen Gase überhaupt möglichen Gesammtwärme, wogegen nach der unmodificirten Theorie das Minimum

der möglichen Gesammtwärme $= \frac{3pv}{2A}$ wäre, entsprechend einem Werthe von $k = \frac{5}{3} = 1\cdot667$; aber bisher ist in keinem Gase ein auch nur annähernd so grosser Werth von k gefunden worden, und daher sahen sich Clausius und andere ihm beistimmende Physiker genöthigt anzunehmen, dass selbst schon die am einfachsten constituirten Gase eine (auf die Grösse des Druckes nicht influirende) innere Atomwärme besitzen, von welcher man allerdings nicht weiter angeben konnte, warum sie gerade den zur Aufrechthaltung der Theorie ihr beizulegenden Werth haben sollte. Wie diejenigen anderer Physiker, haben auch die neueren darauf abzielenden Bemühungen Boltzmann's zu keinem befriedigenden Resultate geführt.

Nach dem Gesagten wird man, bei Festhaltung an der bisherigen Hypothese vom Entstehen des Gasdruckes, sich vorstellen müssen, dass die Atome eines Gases, indem sie innerhalb ihrer Spielräume nach allen Seiten frei hinfliegen und durch ihre Stösse einen allseitigen Druck erzeugen, zunächst die schon als ausdehnsam flüssig zu betrachtenden Volumelemente desselben constituiren, welche selbst in Folge sehr starker localer Druckdifferenzen sehr rasche gegenseitige Bewegungen haben, auf solche Weise Erschütterungswellen (Verdichtungen und Verdünnungen) bildend, deren Dimensionen immer noch von unmessbarer Kleinheit sind. Vermöge jener Druckdifferenzen bestehen zwischen benachbarten Volumelementen bewegende Kräfte, welche unter sonst gleichen Umständen der absoluten Temperatur des Gases proportional sind, und es scheinen mir diese Kräfte von wesentlicher Bedeutung für die Vorgänge der Diffusion, Wärmeleitung und inneren Reibung der Gase sein zu müssen, welche Vorgänge ohnehin, was ihre Abhängigkeit von der Temperatur betrifft; keineswegs der ursprünglichen Theorie entsprechen und denen dieselbe in solcher Hinsicht erst durch später eingefügte Hilfshypothesen anzupassen versucht wurde.

Von den erwähnten Erschütterungswellen, als den Schallwellen ähnlich, wird man ohne Schwierigkeit zugeben, dass sie, obwohl ihnen locale Temperatur- und Druckdifferenzen entsprechen, doch auf die Temperatur und den Druck des Gases

im Ganzen genommen keinen Einfluss ausüben. Dies führt dann zu dem wichtigen Schlusse, dass die Temperatur eines Gases (und wohl eines Körpers überhaupt) unabhängig ist von der den localen Druckdifferenzen entsprechenden Arbeitskraft und nur von der die allseitige Spannung seiner Volumelemente bedingenden, in der Gleichung 3) mit w_1 bezeichneten Wärme abhängt. Setzen wir für den Zustand eines vollkommenen Gases

$$w_1 = ct,$$

wobei t die absolute Temperatur und nach obiger Hypothese der Factor c ersichtlich eine constante Grösse ist, so ergibt sich aus 3) die Gleichung:

$$w = ct + \frac{pv}{A}, \tag{7}$$

worin also ct die Temperaturwärme des Gases und das in wellenartigen Bewegungen bestehende Wärme-Äquivalent $\frac{pv}{A}$ eine darin zwar immer vorhandene, aber auf dessen Temperatur nicht influirende Arbeitskraft vorstellt.

Es dürfte nun von Interesse sein, die specifische Temperaturwärme c für die permanent gasförmigen Grundstoffe aus den bezüglichen Versuchsresultaten numerisch zu bestimmen; denn diese specifische Wärme ist anscheinend diejenige, welche man zur Entscheidung der Frage, inwiefern solche Gase dem Gesetze von Dulong und Petit genügen, mit der experimentellen specifischen Wärme der festen oder flüssigen Grundstoffe vergleichen muss. Für diesen Zweck erhalten wir zunächst aus der vorstehenden Gleichung mit Rücksicht auf die Relation 6):

$$\frac{ct}{w} = 1 - \frac{pv}{Aw} = 2 - k$$

und weil $\frac{ct}{w}$ zugleich das Verhältniss der specifischen Wärme c zu derjenigen bei constantem Volumen, nämlich, wenn wir letztere mit s_1 bezeichnen,

$$\frac{ct}{w} = \frac{c}{s_1}$$

ist, so folgt:

$$c = (2-k)\, s_1\,; \tag{8}$$

ferner ist, wenn wir die experimentelle specifische Wärme (bei constantem Drucke) s nennen, nach dem obigen $\frac{s}{s_1} = k$, und wir haben somit:

$$c = \frac{(2-k)s}{k}. \tag{9}$$

Für die gasförmigen Grundstoffe Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff fanden wir $k = 1{\cdot}4$; es ist somit für diese Gase

$$c = \frac{3}{7}\, s. \tag{9a}$$

Nach Regnault[1] ist nun z. B. für Sauerstoff die specifische Wärme bei constantem Drucke $s = 0{\cdot}2175$, woraus folgt:

$$c = 0{\cdot}0932;$$

multiplicirt man diese Zahl mit dem gewöhnlich angenommenen Äquivalentgewichte des Sauerstoffs (= 16), so kommt als Product die für das erwähnte Gesetz viel zu kleine Zahl 1·4912. Da man es in solchen Fällen mit Vielfachen zu versuchen pflegt, so thun wir dieses auch hier und es zeigt sich, dass das Vierfache (= 64) des früher genommenen Äquivalentgewichts mit dem obigen Werthe von c multiplicirt das Product

5·9648

gibt (oder 37·28 nach den älteren Äquivalentzahlen, also hier die des Sauerstoffs = 400 gesetzt). Man darf dieses wohl als eine vollkommene Übereinstimmung mit dem Gesetze von *Dulong* und *Petit* bezeichnen. Für den Stickstoff folgt aus dem von Regnault gefundenen Werthe von $s = 0{\cdot}2438$ die specifische Temperaturwärme $c = 0{\cdot}1045$; das Product dieser Zahl mit dem Vierfachen (= 56) des gewöhnlich angenommenen Äquivalentgewichtes jenes Gases ist

5·8520

[1] Fortschritte der Physik. Bd. XVIII. S. 347.

und das fast gleiche Product 5·8440 erhält man mit der aus dem Regnault'schen Versuchswerthe $s = 3·4090$ berechneten specifischen Temperaturwärme $c = 1·4610$ des Wasserstoffs, wenn man sein Äquivalentgewicht = 4 setzt. Von den drei einfachen Producten ist das Mittel $P = 1·4717$ und das Mittel aus den vierfachen Producten $4P = 5·8868$.

Dieses befriedigende Resultat[1] scheint zu beweisen, dass die erwähnten Grundstoffe in ihrem freien gasförmigen Zustande ein viermal grösseres Äquivalentgewicht besitzen, als man ihnen nach ihren flüssigen oder festen Verbindungen gewöhnlich zuschreibt, und dass die specifische Wärme c in der That diejenige ist, mit welcher sie dem Gesetze von Dulong und Petit entsprechen. Wir wollen dieselbe deswegen die wahre specifische Wärme der Gase nennen.

Zur Probe dessen wollen wir aus den wahren specifischen Wärmen der Elemente des Wasserdampfes die wahre specifische Wärme dieser chemischen Verbindung berechnen. Da dieselbe auf 8 Gewichtstheile Sauerstoff 1 Gewichtstheil Wasserstoff enthält, so folgt zunächst für das entsprechende Knallgasgemenge

$$c = \frac{8 \times 0·0932 + 1 \times 1·4610}{9} = 0·2452;$$

das vierfache dieser Zahl = 0·9808 gibt fast genau die specifische Wärme des Wassers. Es scheint also, dass die Elemente des Wasserdampfes ohne Veränderung ihrer wahren specifischen Wärmen in diese Verbindung eingehen und dass das Äquivalentgewicht des Wasserdampfes das Vierfache von dem des Wassers ist. Da die specifische Wärme des Eises nahe = $^1/_2$ ist, so darf

[1] Dass die bezüglichen Producte bei den festen Grundstoffen durchschnittlich etwas grösser sind, ist insoferne ganz entsprechend, als dabei die ohne Zweifel etwas zu grosse experimentelle specifische Wärme benützt ist. Aus dem Anschlusse der permanent gasförmigen Grundstoffe an das Dulong-Petit'sche Gesetz folgt nach einer von mir aufgestellten Hypothese, dass dieselben für den weitaus grössten Theil der bei gewöhnlicher Temperatur vorkommenden Wärmestrahlung vollkommen opak sein müssen. Für Versuche über thermische Transparenz der Körper, namentlich solcher, welche etwa, wie der Kohlenstoff, die längsten Wärmewellen leicht durchlassen, ist diese Bemerkung von Wichtigkeit.

man nach den soeben erhaltenen Zahlenwerthen bereits vermuthen, dass die Äquivalentgewichte der Gase die einfachsten ganzen Multipla der für die entsprechenden flüssigen oder festen Körper gewöhnlich angenommenen sind.

Während nach der ursprünglichen Theorie alle Gase eine gewisse (zu ihrer Volumspannung nichts beitragende) innere Atomwärme besitzen müssten, ist nach unserer modificirten Theorie eine solche nur für jene Gase anzunehmen, in welchen, obwohl sie dem Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze folgen, doch der Werth von k bedeutend kleiner als 1·4 ist. Gase von dieser Beschaffenheit mögen thermisch zusammengesetzt heissen. In denselben enthält also die Temperaturwärme ct neben der die Volumspannung erzeugenden Wärme $= \frac{3pv}{2A}$ noch einen für die Spannung unwirksam gemachten Theil, den wir mit $c_0 t$ bezeichnen wollen, oder es ist

$$ct = \frac{3pv}{2A} + c_0 t. \qquad 10)$$

Denken wir uns ein thermisch zusammengesetztes Gas aus zwei oder mehreren einfachen Gasen entstanden und bezeichnen wir die wahre specifische Wärme des entsprechenden Gemenges der letzteren mit C und dessen Volumen bei denselben Umständen mit V, so ist

$$Ct = \frac{3pV}{2A}$$

und somit

$$\frac{c - c_0}{C} = \frac{v}{V}; \qquad 11)$$

wonach also die bei dem Übergange eines Gemenges thermisch einfacher Gase in ein thermisch zusammengesetztes Gas vorkommenden stets sehr einfachen Volumreductionen dadurch bedingt scheinen, dass die Temperaturwärme jedes Gases oder Gasgemenges nur nach Verhältnissen ganzer Zahlen wechseln und nur nach solchen Verhältnissen in einen volumspannenden und einen in dieser Hinsicht unwirksamen Theil zerfallen kann.

Ich halte diese Folgerung in theoretischer Hinsicht für besonders beachtenswerth.

Da z. B. nach dem Obigen für den Wasserdampf $c = C$ und zugleich für denselben $\frac{v}{V} = \frac{2}{3}$ ist, so folgt für diesen Dampf aus 11):

$$c_0 = \frac{1}{3} c;$$

d. h. wenn man die Temperaturwärme des Gemenges der drei Gasvolume, welche sich zu Wasserdampf verbinden können, $= 3$ setzt, so ist auch diejenige des Wasserdampfes bei derselben Temperatur $= 3$, aber es wirkt hier davon nur ein Theil $= 2$ volumspannend, während ein Theil $= 1$ zwar als Temperaturwärme vorhanden, aber für die Spannung unwirksam gemacht ist.

Geben wir der Gleichung 10) die Form

$$\frac{(c-c_0)t}{w} = \frac{3pv}{2Aw},$$

so folgt aus derselben nach dem Früheren

$$\frac{c-c_0}{s_1} = \frac{3}{2}(k-1) \tag{12}$$

und durch Combination dieser Formel mit 8)

$$\frac{c-c_0}{c} = \frac{3(k-1)}{2(2-k)}, \tag{13}$$

wonach man aus dem Werthe von $\frac{c_0}{c}$ das Verhältniss k der specifischen Wärme bei constantem Drucke zu derjenigen bei constantem Volumen berechnen kann. Diese letztere Formel mit 11) verbunden, gibt endlich noch:

$$\frac{c}{C} = \frac{v}{V} \cdot \frac{2(2-k)}{3(k-1)}. \tag{14}$$

Für den Wasserdampf ist nach dem Obigen $c_0 = \frac{1}{3}c$ und hieraus folgt

$$k = \frac{17}{13} = 1{\cdot}3077,$$

folglich nach 9)

$$c = \frac{9}{17}s. \tag{9b}$$

Da für diesen Dampf, wie wir vorhin gefunden haben, die wahre specifische Wärme $c = 0{\cdot}2452$ anzunehmen ist, so erhält man mit diesen Daten für dessen specifische Wärme bei constantem Drucke den Werth $s = 0{\cdot}4631$, ein Resultat, welches mit dem von Regnault erhaltenen Beobachtungswerthe (0·4750 nach einer früheren, oder 0·4805 nach der späteren Angabe) so nahe übereinstimmt, als man bei der vermuthlichen Abweichung des Wasserdampfes vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze, wodurch der experimentelle Werth von s grösser ausfällt, erwarten kann.

Ähnlich wie die permanent gasförmigen Grundstoffe, und die ihnen desswegen auch als thermisch einfach beizuzählenden, chemisch zusammengesetzten Gase: Kohlenoxyd, Stickstoffoxyd und Chlorwasserstoff, sehr nahe übereinstimmende Werthe von k (theoretisch $= 1{\cdot}4$) haben, so zeigen hinwieder die chemisch zusammengesetzten Gase: Wasserdampf, Schwefelwasserstoff und Ammoniak nebst den darum für thermisch zusammengesetzt zu haltenden Gasen Chlor und Brom, einen nahe gleich stark verminderten Werth von k, den wir aus dem Verhalten des Wasserdampfes theoretisch $= \frac{17}{13} = 1{\cdot}3077$ gefunden haben. Diesen Werth für das Ammoniakgas angenommen, folgt für dasselbe aus der Gleichung 13) ebenso, wie für den Wasserdampf:

$$c_0 = \frac{1}{3}c$$

und, weil für jenes Gas $\frac{v}{V} = \frac{1}{2}$ ist, nach 11)

$$c = \frac{3}{4} C;$$

d. h. wenn man die Temperaturwärme des Gemenges der vier Gasvolume, die sich zu Ammoniak verbinden können, = 4 setzt, so ist diejenige des Ammoniakgases bei der nämlichen Temperatur nur = 3, wovon dann ein Theil = 2 als volumspannend wirkt, während ein Theil = 1 zwar noch als Temperaturwärme vorhanden, aber für die Spannung unwirksam gemacht ist.

Aus den oben angegebenen wahren specifischen Wärmen der Bestandtheile des Ammoniakgases berechnet, ist, da dasselbe auf 14 Gewichtstheile Stickstoff 3 Gewichtstheile Wasserstoff enthält:

$$C = \frac{14 \times 0{\cdot}1045 + 3 \times 1{\cdot}4610}{17} = 0{\cdot}3439;$$

daher $c = \frac{3}{4}\, C = 0{\cdot}2577$, und hieraus folgt nach 9*b*), da $k = \frac{17}{13}$ ist, die specifische Wärme des Ammoniakgases bei constantem Drucke

$$s = 0{\cdot}4868,$$

zu dem von Regnault gefundenen Werthe = 0·5084 mit gleicher Annäherung stimmend, als wir beim Wasserdampfe gefunden haben.

In dem nächst einfachen Falle thermisch zusammengesetzter Gase, wo der auf den Druck nicht influirende Theil der Temperaturwärme schon die Hälfte derselben ausmacht und also $c_0 = \frac{1}{2}\, c$ ist, gibt die Formel 13) für das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Drucke zu jener bei constantem Volumen den wieder bedeutend verminderten Werth

$$k = \frac{5}{4} = 1{\cdot}25.$$

Diesem sehr nahe kommen die empirischen Werthe von k bei Kohlensäure, Stickstoffoxydul, schwefeliger Säure und Grubengas. Nehmen wir demnach für diese Gase theoretisch $k = \frac{5}{4}$ an

und wählen wir davon zur näheren Betrachtung das Stickstoffoxydul. Da seiner Bildung aus den Elementen eine Volumreduction von 3 auf 2 entspricht, so ist für dasselbe $\frac{v}{V} = \frac{2}{3}$ und daher nach 11), indem zugleich $c_0 = \frac{1}{2} c$ ist:

$$c = \frac{4}{3} C;$$

d. h. wenn man die Temperaturwärme des Gemenges der drei Gasvolume, welche Stickstoffoxydul geben können, $= 3$ setzt, so ist diejenige des Stickstoffoxyduls bei derselben Temperatur $= 4$, wovon dann aber nur ein Theil $= 2$ ausdehnend wirkt, während der andere Theil $= 2$ in dieser Hinsicht ohne Wirkung ist.

Aus den wahren specifischen Wärmen der Bestandtheile des Stickstoffoxyduls berechnet, ist, da dasselbe auf 7 Gewichtstheile Stickstoff 4 Gewichtstheile Sauerstoff enthält,

$$C = \frac{7 \times 0\cdot1045 + 4 \times 0\cdot0932}{11} = 0\cdot1004;$$

daher die specifische Temperaturwärme der chemischen Verbindung $c = \frac{4}{3} C = 0\cdot1339$ und hieraus folgt nach der Formel 9) welche für $k = \frac{5}{4}$ in

$$c = \frac{3}{5} s \qquad 9c)$$

übergeht, die specifische Wärme des Stickstoffoxyduls bei constantem Drucke:

$$s = 0\cdot2232,$$

mit dem Regnault'schen Versuchswerthe $= 0\cdot2262$ fast zusammenfallend.

Weiterhin ist der nächst einfache Fall thermischer Zusammensetzung bei Gasen derjenige, wo der die Spannung erzeugende zu dem in dieser Hinsicht aufgehobenen Theile der Temperaturwärme sich wie 2 : 3 verhält. Dazu gehören unter den von

Regnault untersuchten Gasen und Dämpfen das ölbildende Gas und der Schwefelkohlenstoff, indem bei denselben das Verhältniss k dem jener Bedingung entsprechenden theoretischen Werthe

$$k = \frac{23}{19} = 1{\cdot}2105$$

sehr nahe kommt. Nehmen wir letzteren als wirklich geltend an, so ist für diesen Fall $c_0 = \frac{2}{5}\,c$ und insbesondere für das ölbildende Gas nach 14), der Volumreduction $\frac{v}{V} = \frac{1}{3}$ entsprechend, $c = \frac{5}{6}\,C$; es bestehen also bei diesem Gase die einfachen Verhältnisse

$$C : c : (c - c_0) : c_0 = 6 : 5 : 2 : 3.$$

Die zur Berechnung von C erforderte Kenntniss der wahren specifischen Wärme des hypothetischen Kohlenstoffgases kann man durch die Annahme ersetzen, es sei das Product derselben mit dem Äquivalentgewichte dem Mittelwerthe $P = 1{\cdot}4717$ der bezüglichen Producte bei den thermisch einfachen gasförmigen Grundstoffen gleich. Es ist darnach die wahre specifische Wärme des Kohlenstoffgases

$$= \frac{1{\cdot}4717}{12} = 0{\cdot}1226$$

und hiermit erhält man, indem das ölbildende Gas C_2H_4 aus Kohlenstoff und Wasserstoff im Gewichtsverhältnisse 6 : 1 besteht:

$$C = \frac{6 \times 0{\cdot}1226 + 1{\cdot}4610}{7} = 0{\cdot}3138.$$

Demnach ist die wahre specifische Wärme des ölbildenden Gases

$$c = \frac{5}{6}\,C = 0{\cdot}2615$$

und hieraus folgt nach der für $k = \frac{23}{19}$ geltenden Formel

$$c = \frac{15}{23}\,s \qquad 9d)$$

die specifische Wärme bei constantem Drucke

$$s = 0{\cdot}4009$$

fast identisch mit dem Regnault'schen Versuchswerthe $s = 0{\cdot}4040$.

Man kann bei Ermittlung der Wärmeverhältnisse thermisch zusammengesetzter Gase auch in anderer Weise vorgehen, als wir in den bisher betrachteten Fällen gethan haben. Eliminirt man nämlich aus den Gleichungen 9) und 14) die Grösse k, so folgt

$$c = s - \frac{4}{3} \cdot \frac{v}{V} \cdot C, \qquad 15)$$

wonach man die wahre specifische Wärme einer gasförmigen chemischen Verbindung berechnen kann, wenn ihre specifische Wärme bei constantem Drucke, die Condensation ihrer Bestandtheile in Gasform und die wahre specifische Wärme des Gemenges derselben bekannt sind. Einen entsprechend angenäherten Werth von k erhält man dann nach der Formel 9):

$$k = \frac{2}{1 + \frac{c}{s}}.$$

Das theoretische Bestimmungsstück C betreffend, kann man von dessen Kenntniss leicht Umgang nehmen. Setzt man nämlich das Product der wahren specifischen Wärme mit dem gewöhnlichen Äquivalentgewichte für alle thermisch einfachen gasförmigen Elemente $= P$, bedeutet ferner N die Zahl der in Verbindung tretenden Gasvolume und a das gewöhnlich angenommene Äquivalentgewicht der Verbindung, d. h. die Summe der Äquivalentgewichte der Bestandtheile, so hat man

$$C = \frac{NP}{a};$$

zugleich ist, wenn die N Gasvolume des Gemenges sich zu n Volumen der chemischen Verbindung condensiren,

$$\frac{v}{V} = \frac{n}{N}$$

und somit folgt aus der obigen Formel:

$$c = s - \frac{4nP}{3a}. \qquad 16)$$

Beispielsweise ist nach Regnault für Schwefelkohlenstoffdampf $s = 0·1569$; da sein Äquivalentgewicht $a = 76$ und, seiner Condensation auf zwei Volume entsprechend, $n = 2$ ist, so folgt mit dem für die permanent gasförmigen Grundstoffe erhaltenen Mittelwerthe $P = 1·4717$ die wahre specifische Wärme jenes Dampfes

$$c = 0·1569 - 0·0516 = 0·1053;$$

aus der für diesen Fall mit dem theoretischen Werthe $k = \frac{23}{19}$ geltenden Formel 9*d*) folgt der übereinstimmende Werth:

$$c = \frac{15}{23} \times 0·1569 = 0·1023.$$

Es bestehen also bei diesem Gase die einfachen Verhältnisse

$$C : c : (c - c_0) : c_0 = 3 : 5 : 2 : 3.$$

Nach dem Vorigen wird man bei Untersuchung der Wärmeverhältnisse von Gasen mit complicirter Zusammensetzung etwa in folgender Weise verfahren können. Regnault findet z. B. für den Dampf von Holzgeist CH_4O die specifische Wärme $s = 0·4580$; da nun, der Condensation dieses Dampfes auf zwei Volume entsprechend, $n = 2$ und sein Äquivalentgewicht $a = 32$ ist, so wird mit dem Werthe von $P = 1·4717$ die wahre specifische Wärme desselben

$$c = 0·4580 - 0·1226 = 0·3354.$$

Multiplicirt man diese Zahl mit dem angegebenen Äquivalentgewichte, so kommt das Product

$$ac = 10·7328 = 7 \times 1·5332,$$

daher nahezu $ac = 7\ P$; d. h. wenn man die Temperaturwärme des Gemenges der 6 Gasvolume, welche sich zu 2 Volume Holzgeist verbinden können, $= 6$ setzt, so ist diejenige des

Holzgeistdampfes bei gleicher Temperatur $= 7$, wovon ein Theil $= 2$ dessen Spannung erzeugt, während der Rest $= 5$ dazu nichts beiträgt.

Indem also bei diesem Dampfe $c_0 = \frac{2}{7} c$ ist, so folgt für denselben als theoretisch genauer Werth des Verhältnisses der specifischen Wärme bei constantem Drucke zu jener bei constantem Volumen nach 13):

$$k = \frac{29}{25} = 1 \cdot 16$$

und mit diesem Werthe von k erhält man nach 9) für den entsprechenden Fall thermischer Zusammensetzung die wahre specifische Wärme

$$c = \frac{21}{29} s, \tag{9e}$$

woraus mit dem oben angegebenen Regnault'schen Versuchswerthe für den Holzgeistdampf

$$c = \frac{21}{29} \times 0 \cdot 4580 = 0 \cdot 3317$$

folgt, mit dem zuvor auf andere Weise erlangten Resultate nahe genug übereinstimmend und somit die bezügliche Schlussfolge bestätigend. Dieser etwas kleinere Werth von c gibt übrigens, noch näher entsprechend, das Product

$$ac = 10 \cdot 6144 = 7 \times 1 \cdot 5163.$$

Ich habe mich im Vorstehenden auf die Betrachtung von Gasen mit den einfachsten Verhältnissen chemischer und thermischer Zusammensetzung beschränkt. Überblicken wir nun die Reihe der Werthe, welche das Product der wahren specifischen Wärme mit dem bezüglichen Äquivalentgewichte in den angeführten Beispielen annimmt. Aus der Gleichung 14) folgt, wenn man darin dem oben Gesagten gemäss

$$\frac{v}{V} = \frac{n}{N} \text{ und } C = \frac{NP}{a}$$

setzt:

$$c = \frac{2(2-k)}{3(k-1)} \cdot \frac{nP}{a} \qquad 17)$$

und somit für alle hier erwähnten chemisch zusammengesetzten Gase, da für jedes derselben $n = 2$ ist[1]:

$$ac = \frac{4(2-k)P}{3(k-1)}. \qquad 18)$$

Demnach ist für $k = \frac{7}{5}$ (Kohlenoxyd, Stickstoffoxyd, Chlorwasserstoff) das Product $ac = 2P$; für $k = \frac{17}{13}$ (Wasserdampf, Schwefelwasserstoff, Ammoniak) ist selbes $= 3P$, für $k = \frac{5}{4}$ (Kohlensäure, Stickstoffoxydul, schwefelige Säure, Grubengas) $4P$, für $k = \frac{23}{19}$ (ölbildendes Gas und Schwefelkohlenstoff) $5P$, für $k = \frac{29}{25}$ (Holzgeist) $7P$. Mit Einschluss des Productes $ac = P$ bei den permanent gasförmigen Grundstoffen verhalten sich also die sämmtlichen gefundenen Productwerthe der Reihe nach wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 7. Eine Zusammensetzungsweise mit dem Producte $ac = 6P$, der Lücke zwischen ölbildendem Gase und Holzgeistdampf entsprechend, kommt unter den von Regnault untersuchten Gasen und Dämpfen wenigstens in der von mir benützten Tabelle[2] nicht vor.

Schliesslich möge hier noch über das vorhin erwähnte Verhalten der chemisch einfachen Gase Chlor und Brom eine kurze

---

[1] Würden die Chemiker consequent den Grundsatz durchführen, dass die Äquivalentgewichte der Gase ihren Dichtigkeiten proportional anzunehmen seien, und wäre dann α das entsprechend angenommene Äquivalentgewicht irgend eines Gases, so wäre für alle Gase ohne Unterschied

$$ac = \frac{2(2-k)P}{3(k-1)} \text{ und } \alpha(s-c) = \frac{4P}{3},$$

unter P den Werth von ac für die thermisch einfachen Gase und somit den Minimalwerth dieses Productes verstanden.

[2] Fortschritte der Physik, Bd. XVIII, S. 347.

Bemerkung folgen. Die für beide Gase aus Regnault's Versuchen hervorgehenden Werthe von k sind einander fast gleich[1] und kommen dem theoretischen Werthe $k = 1{\cdot}3077$ so nahe, dass deren Identität mit letzterem sehr wahrscheinlich ist. Nehmen wir diese an, so muss für Chlor- und Bromgas, wie für Wasserdampf und Ammoniak, $c_0 = \frac{1}{3}c$, d. h. der dritte Theil ihrer Temperaturwärme muss für ihre Spannung unwirksam sein. Diese gasförmigen Grundstoffe werden demnach dem Gesetze von Dulong und Petit mit ihrem Werthe von $c - c_0 = \frac{2}{3}c$, d. h. mit zwei Dritteln ihrer wahren specifischen Wärme genügen müssen. Nun findet Regnault z. B. für Bromgas die specifische Wärme bei constantem Drucke $s = 0{\cdot}0555$; hieraus folgt

$$c = \frac{9}{17} \times 0{\cdot}0555 = 0{\cdot}0294$$

und daher $c - c_0 = \frac{2}{3}c = 0{\cdot}0196$. Multipliciren wir diese Zahl mit dem gewöhnlich angenommenen Äquivalentgewichte des Broms $= 80$, so kommt das Product $1{\cdot}567$, welches in der That nahe mit dem für die permanent gasförmigen Grundstoffe gefundenen Producte zusammenfällt und dessen Vierfaches $= 6{\cdot}268$ dem Gesetze von Dulong und Petit vollkommen entspricht. Da das feste Brom mit dem gewöhnlichen Äquivalentgewichte ebenfalls diesem Gesetze genügt, so folgt, dass freies Bromgas, wenn es in die feste Form übergeht, sein Äquivalentgewicht auf ein Viertel reducirt und dabei seine thermische Zusammengesetztheit aufgibt. Dass übrigens ein Körper auch ohne Veränderung seines Äquivalentgewichtes eine thermische Zusammensetzung seiner Atome aufgeben oder annehmen kann, zeigt die

---

[1] Diese auffallend nahe Übereinstimmung beider Gase beweist, dass die Anomalie ihrer specifischen Wärmen nicht, wie man sonst anzunehmen pflegt, von ihrer Abweichung vom Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetze herrührt, welche gewiss für beide sehr ungleich, aber wohl für keines derselben entfernt so gross ist, als jene Annahme erfordern würde.

thermische Einfachheit des Chlorwasserstoffgases gegenüber der thermischen Zusammengesetztheit des Chlorgases.

Ich habe auf die hier berührten einfachen Zahlenverhältnisse und merkwürdigen Übereinstimmungen, welche schwerlich blosse Spiele des Zufalls sind, bereits früher im Zusammenhange mit èiner neuen Hypothese über die Körperwärme aufmerksam zu machen versucht; sie sind vermuthlich wegen dieses Connexes bisher übersehen worden und dürften nun, als Folgerungen aus der gegenwärtig fast allgemein adoptirten Erklärung des Gasdruckes erscheinend, vielleicht eher Aussicht haben, Beachtung zu finden.

Über einige bestimmte Integrale.

Von **Leopold Gegenbauer.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Juni 1874.)

Setzt man:

$$1.)\quad (a-a_1\cos\vartheta)^{-(2\nu+\rho)}=\sum_0^\infty B_n C_n^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta)\,,\quad [|a|>1\,a_1|],$$

wo $C_n^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta)$ der Coëfficient von α^n in der Entwickelung von $(1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2)^{-\frac{2\nu-1}{2}}$ nach aufsteigenden Potenzen von α ist, so findet man:

$$2.)\quad B_\rho=\frac{\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\Pi(2\nu+2\rho-1)}{2^\rho\,\Pi\left(\frac{2\nu+2\rho-3}{2}\right)\Pi(2\nu+\rho-1)}\;\frac{a_1{}^\rho}{(a^2-a_1^2)^{\nu+\rho}}.$$

Man erhält aber andrerseits für B_ρ auch folgenden Ausdruck durch ein bestimmtes Integral:

$$3.)\quad B_\rho=\frac{(2\rho+2\nu-1)\Pi(\rho)}{2^{2\nu-1}\Pi(2\nu+\rho-2)}\left[\frac{\Pi(2\nu-2)}{\Pi(\nu-1)}\right]^2.$$

$$\int_0^\pi\frac{C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta).\sin^{2\nu-1}\vartheta.d\vartheta}{(a-a_1\cos\vartheta)^{2\nu+\rho}}.$$

Durch Vereinigung dieser beiden Ausdrücke für B_ρ erhält man:

$$4.)\quad \int_0^\pi\frac{C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta).\sin^{2\nu-1}\vartheta.d\vartheta}{(a-a_1\cos\vartheta)^{2\nu+\rho}}=$$

$$\frac{2^{2\nu+\rho-1}\Pi(\nu-1)\Pi(\nu+\rho-1)}{(2\nu+\rho-1)\Pi(2\nu-2)\Pi(\rho)}\;\frac{a_1^\rho}{(a^2-a_1^2)^{\nu+\rho}}.$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$5.)\quad a = 1 + \alpha^2, \quad a_1 = 2\alpha$$

und entwickelt auf beiden Seiten nach aufsteigenden Potenzen von α, so erhält man sofort:

$$6.)\quad \int_0^\pi C_{\rho_1}^{2\nu+\rho}(\cos\vartheta) \,.\, C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta) \,.\, \sin^{2\nu-1}\vartheta \,.\, d\vartheta = 0 \quad [\rho_1 < \rho]$$

$$7.)\quad \int_0^\pi C_{\rho+2\sigma+1}^{2\nu+\rho}(\cos\vartheta) \,.\, C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta) \,.\, \sin^{2\nu-1}\vartheta \,.\, d\vartheta = 0$$

$$8.)\quad \int_0^\pi C_{\rho+2\sigma}^{2\nu+\rho}(\cos\vartheta) \,.\, C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta) \,.\, \sin^{2\nu-1}\vartheta \,.\, d\vartheta = \frac{\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\Pi(2\nu+2\rho+\sigma-1)}{\Pi(\rho)\,\Pi(\sigma)\,\Pi\left(\frac{2\rho+2\nu-1}{2}\right)(2\nu+\rho-1)}\left[\frac{2^{\nu-1}\,\Pi(\nu-1)}{\Pi(2\nu-2)}\right]^2.$$

Setzt man ferner in der Gleichung 4.):

$$9.)\quad a = 1 - \alpha x, \quad a_1 = \alpha\sqrt{x^2-1},$$

entwickelt auf beiden Seiten nach aufsteigenden Potenzen von α und setzt die Coëfficienten von α^n einander gleich, so erhält man, wenn zur Abkürzung die Bezeichnung:

$$10.)\quad C_n^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Pi(n-\rho)\,\Pi(\nu+\rho-1)}{2^{n-\rho}\,\Pi(n+\nu-1)}\,(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\,C_{n-\rho}^{\nu+\rho}(x)$$

eingeführt wird:

$$11.)\quad \int_0^\pi (x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1})^n \,.\, C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta)\,.\,\sin^{2\nu-1}\vartheta\,.\,d\vartheta = \frac{2^{n+2\nu-1}\,\Pi(n)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(2\nu+\rho-2)}{\Pi(\rho)\,\Pi(2\nu-2)\,\Pi(n-\rho)\,\Pi(2\nu+\rho+n-1)}\,C_n^{\nu,\rho}(x).$$

Aus diesem Integrale, welches nur so lange einen Sinn hat, als $n \gtreqless \rho$ ist, kann man sofort ein neues Integral ableiten. Durch partielle Integration findet man zunächst:

$$12.)\quad \int_0^\pi (x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1})^n \,.\, C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta)\,.\,\sin^{2\nu-1}\vartheta\,.\,d\vartheta = \frac{2^\rho\,\Pi(n)\,\Pi(2\nu+\rho-2)\,\Pi\left(\frac{2\nu+2\rho-3}{2}\right)}{\Pi(\rho)\,\Pi(n-\rho)\,\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\Pi(2\nu+2\rho-2)}\,(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\,.$$

$$\int_0^\pi (x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1})^{n-\rho}\,.\,\sin^{2\nu+2\rho-1}\vartheta\,.\,d\vartheta.$$

Führt man in dem Integrale auf der rechten Seite dieser Gleichung eine neue Variable φ durch folgende Gleichungen ein:

$$x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1}}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\sin\varphi}{x + \cos\varphi\sqrt{x^2-1}}$$

$$d\vartheta = \frac{d\varphi}{x + \cos\varphi\sqrt{x^2-1}}$$

so verwandelt sich die Gleichung 12.) in:

$$13.)\quad \int_0^\pi (x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1})^n \,.\, C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta)\,.\,\sin^{2\nu-1}\vartheta\,.\,d\vartheta = \frac{2^\rho\,\Pi(n)\,\Pi(2\nu+\rho-2)\,\Pi\left(\frac{2\nu+2\rho-3}{2}\right)}{\Pi(\rho)\,\Pi(n-\rho)\,\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\,\Pi(2\nu+2\rho-2)}(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}.$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2\nu+2\rho-1}\varphi\,.\,d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{2\nu+n+\rho}}.$$

Berücksichtigt man nun, dass:

$$14.)\quad (x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}\int_0^\pi \frac{\sin^{2\nu+2\rho-1}\varphi\,.\,d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{2\nu+n+\rho}} = \frac{(-1)^\rho\,\Pi(\rho)\,\Pi\left(\frac{2\nu-3}{2}\right)\,\Pi(2\nu+2\rho-2)\,\Pi(2\nu+n-1)}{2^\rho\,\Pi(2\nu+\rho-2)\,\Pi\left(\frac{2\nu+2\rho-3}{2}\right)\,\Pi(2\nu+n+\rho-1)}.$$

$$\int_0^\pi \frac{C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi)\,.\,\sin^{2\nu-1}\varphi\,.\,d\varphi}{(x+\cos\varphi\sqrt{x^2-1})^{2\nu+n}}$$

ist, so erhält man, wenn man noch ϑ für φ schreibt:

$$15.)\quad \int_0^\pi (x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1})^n \cdot C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta)\cdot\sin^{2\nu-1}\vartheta\cdot d\vartheta = \frac{(-1)^\rho\,\Pi(n)\,\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n-\rho)\,\Pi(2\nu+n+\rho-1)}\cdot \int_0^\pi \frac{C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta)\cdot\sin^{2\nu-1}\vartheta\cdot d\vartheta}{(x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1})^{2\nu+n}}.$$

Man erhält also jetzt die Gleichung:

$$16.)\quad \int_0^\pi \frac{C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta)\cdot\sin^{2\nu-1}\vartheta\cdot d\vartheta}{(x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1})^{2\nu+n}} = (-1)^\rho\,\frac{2^{n+2\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(2\nu+\rho-2)}{\Pi(\rho)\,\Pi(2\nu-2)\,\Pi(n+2\nu-1)}\,C_n^{\nu,\rho}(x).$$

Diese Formel 16.) kann als Definition der Functionen $C_n^{\nu,\rho}(x)$ für $\rho > n$ benützt werden, da dieselbe für alle ρ einen Sinn behält. Setzt man in den Gleichungen 11.) und 16.) $\rho = 0$, so erhält man:

$$17.)\quad \int_0^\pi (x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1})^n\cdot\sin^{2\nu-1}\vartheta\cdot d\vartheta = \frac{2^{2\nu-1}\,\Pi(n)\,[\Pi(\nu-1)]^2}{\Pi(2\nu+n-1)}\cdot C_n^\nu(x)$$

$$18.)\quad \int_0^\pi \frac{\sin^{2\nu-1}\vartheta\cdot d\vartheta}{(x+\cos\vartheta\sqrt{x^2-1})^{2\nu+n}} = \frac{2^{2\nu-1}\,\Pi(n)\,[\Pi(\nu-1)]^2}{\Pi(2\nu+n-1)}\cdot C_n^\nu(x).$$

Es mag hier gelegentlich bemerkt werden, dass man in ähnlicher Weise, wie die Gleichung 15.), auch die allgemeinere Transformationsformel:

$$19.)\quad \int_0^\pi (a^2+2aa_1\cos\vartheta+a_1^2)^n . C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta).\sin^{2\nu-1}\vartheta.d\vartheta=(-1)^\rho \frac{\Pi(n)\,\Pi(n+2\nu-1)}{\Pi(n-\rho)\,\Pi(2\nu+n+\rho-1)}(a^2-a_1^2)^{2n+2\nu}.$$

$$\int_0^\pi \frac{C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\vartheta).\sin^{2\nu-1}\vartheta.d\vartheta}{(a^2+2aa_1\cos\vartheta+a_1^2)^{2\nu+n}}$$

herleiten kann.

Um ein neues bestimmtes Integral zu erhalten, multipliciren wir die Gleichung:

$$20.)\quad J_{(a_1x)}^{n+\nu}=\frac{(-i)^n\,\Pi(n)\,a_1^\nu x^\nu}{2^{3\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2.\int_0^\pi e^{a_1xi\cos\vartheta}\,C_n^\nu(\cos\vartheta)\sin^{2\nu}\vartheta.d\vartheta$$

mit $e^{-ax}x^{n+\nu}dx$ und integriren von $x=0$ bis $x=\infty$. Dadurch erhalten wir:

$$21.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}x^{n+\nu}J_{(a_1x)}^{n+\nu}\,dx=\frac{(-i)^n\,\Pi(n)\,a_1^\nu}{2^{3\nu-1}\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}\left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2.\int_0^\infty e^{-ax}x^{n+2\nu}\,dx.$$

$$\int_0^\pi e^{a_1xi\cos\vartheta}\,C_n^\nu(\cos\vartheta)\sin^{2\nu}\vartheta.d\vartheta.$$

Kehren wir auf der rechten Seite die Integrationsordnung um und integriren nach x, so erhalten wir vorerst:

$$22.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\, x^{n+\nu}\, J^{n+\nu}_{(a_1 x)}\, dx = \frac{(-i)^n\, \Pi(n)\, a_1^\nu\, (n+2\nu)}{2^{3\nu-1}\, \Pi(\nu-1)} \left[\frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}\right]^2 \cdot \int_0^\pi \frac{C_n^\nu(\cos\vartheta)\,.\,\sin^{2\nu}\vartheta\,.\,d\vartheta}{(a-i\,a_1\cos\vartheta)^{2\nu+n+1}}.$$

Diese Gleichung verwandelt sich aber sofort, wenn man die Formel 4.) berücksichtigt und μ für $n+\nu$ schreibt, in:

$$23.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\, x^\mu\, J^\mu_{(a_1 x)}\, dx = \frac{\Pi(2\mu)}{2^\mu\, \Pi(\mu)}\; \frac{a_1^\mu}{(a^2+a_1^2)^{\frac{2\mu+1}{2}}}$$

Differentiirt man diese Gleichung einmal nach a, so verwandelt sie sich in:

$$24.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\, x^{\mu+1} J^\mu_{(a_1 x)}\, dx = \frac{\Pi(2\mu+1)}{2^\mu\, \Pi(\mu)}\; \frac{a\, a_1^\mu}{(a^2+a_1^2)^{\frac{2\mu+3}{2}}}$$

Setzt man in 23.) $\mu=\frac{1}{2}$ und in 24.) $\mu=-\frac{1}{2}$, so erhält man die aus den Elementen bekannten Formeln:

25.) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin a_1 x \, dx = \frac{a_1}{a^2+a_1^2}$

26.) $\int_0^\infty e^{-ax} \cos a_1 x \, dx = \frac{a}{a^2+a_1^2}$.

Es sollen nun schliesslich noch die Werthe der beiden bestimmten Integrale:

$$\int_0^\pi C_n^\nu(z) . C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi) . \sin^{2\nu-1}\varphi . d\varphi \, , \quad \int^\pi D_n^\nu(z) . C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi) . \sin^{2\nu-1}\varphi . d\varphi$$

abgeleitet werden, wo:

27.) $z = x x_1 - \sqrt{x^2-1} . \sqrt{x_1^2-1} \cos\varphi$.

28.) $D_n^\nu(z) = \frac{\Pi(\nu-1)\,\Pi(n+2\nu-1)}{2^{n+1}\,\Pi(n+\nu)} \Big[\frac{1}{z^{n+2\nu}} + \frac{(n+2\nu)(n+2\nu+1)}{1!(n+\nu+1)} \cdot \frac{1}{4z^{n+2\nu+2}} + $

$$+ \frac{(n+2\nu)(n+2\nu+1)(n+2\nu+2)(n+2\nu+3)}{2!(n+\nu+1)(n+\nu+2)} \cdot \frac{1}{16 z^{n+2\nu+4}} + \ldots \Big]$$

ist. Die Functionen $C_n^\nu(z)$ und $D_n^\nu(z)$ genügen der partiellen Differentialgleichung:

$$29.)\quad (1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-(2\nu+1)x\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{1-x^2}\left\{\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}+(2\nu-1)\operatorname{cotang}\varphi\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right\}+(n+2\nu)n\,y=0.$$

Setzt man nun:

$$30.)\quad C_n^\nu(z)=\sum_0^n{}^{\rho} A_\rho\, C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi)$$

$$31.)\quad D_n^\nu(z)=\sum_0^\infty{}^{\rho} B_\rho\, C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi),$$

wo A_ρ und B_ρ Functionen von x und x_1 sind, und macht für die Entwickelung von $D_n^\nu(z)$, damit dieselbe für alle φ giltig bleibt, die Voraussetzung, dass x und x_1 reelle positive Grössen sind, die den Bedingungen: $x_1 \leqq 1$, $xx_1 > 1$ genügen, so erhält man durch Substitution dieser Werthe von $C_n^\nu(z)$ und $D_n^\nu(z)$ in 29.) und nachherige Integration der für A_ρ und B_ρ entstehenden linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$32.)\quad A_\rho = a_\rho \,.\, C_n^{\nu,\rho}(x)$$

$$33.)\quad B_\rho = b_\rho \,.\, D_n^{\nu,\rho}(x),$$

wo:

$$34.)\quad D_n^{\nu,\rho}(x)=\frac{2^{n-\rho+1}\,\Pi(n+\nu)}{\Pi(\nu+\rho-1)\,\Pi(2\nu+n+\rho-1)}(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}D_{n-\rho}^{\nu+\rho}(x)$$

ist. Setzt man diese Werthe von A_ρ und B_ρ in die Gleichungen 30.) und 31.) ein, so kann man aus denselben sofort folgende zwei neue Gleichungen herleiten:

$$35.)\quad \int_0^\pi C_n^\nu(z)\,.\,C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi)\,.\sin^{2\nu-1}\varphi\,.\,d\varphi = \frac{2^{2\nu-1}\,\Pi(2\nu+\rho-2)}{(2\nu+2\rho-1)\,\Pi(\rho)}\left[\frac{\Pi(\nu-1)}{\Pi(2\nu-2)}\right]^2.\,a_\rho\,.\,C_n^{\nu,\rho}(x)$$

$$36.)\quad \int_0^\pi D_n^\nu(z)\,.\,C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi)\,.\sin^{2\nu-1}\varphi\,.\,d\varphi = \frac{2^{2\nu-1}\,\Pi(2\nu+\rho-2)}{(2\nu+2\rho-1)\,\Pi(\rho)}\left[\frac{\Pi(\nu-1)}{\Pi(2\nu-2)}\right]^2.\,b_\rho\,.\,C_n^{\nu,\rho}(x).$$

Multiplicirt man nun die Gleichung 35.) mit x^{-n}, 46.) mit $x^{n+2\nu}$ und setzt $x=\infty$, so erhält man die Werthe von a_ρ und b_ρ durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

$$37.)\quad a_\rho = \frac{2^{n-2\nu+1}\,\Pi(n+\nu-1)\,\Pi(\rho)\,(2\nu+2\rho-1)}{\Pi(n)\,\Pi(\nu-1)\,\Pi(2\nu+\rho-2)}\left[\frac{\Pi(2\nu-2)}{\Pi(\nu-1)}\right]^2\int_0^\pi (x_1-\cos\varphi\sqrt{x_1^2-1})^2.\,C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi).\sin^{2\nu-1}\varphi\,.d\varphi$$

$$38.)\quad b_\rho = \frac{\Pi(n+2\nu-1)\,\Pi(\rho)\,[\Pi(2\nu-2)]^2(2\rho+2\nu-1)}{2^{n+2\nu}\,\Pi(n+\nu)\,\Pi(2\nu+\rho-2)\,\Pi(\nu-1)}\int_0^\pi \frac{C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi)\,.\sin^{2\nu-1}\varphi\,.\,d\varphi}{(x_1-\cos\varphi\sqrt{x_1^2-1})^{2\nu+n}}.$$

Setzt man in diesen zwei Gleichungen: $\varphi=\pi-\vartheta$ und berücksichtigt die Formeln 11.) und 16.), so erhält man:

$$39.)\quad a_\rho = (-1)^\rho \frac{(2\nu+2\rho-1)\,\Pi(2\nu-2)}{\Pi(n-\rho)\,\Pi(2\nu+n+\rho-1)} \cdot \left[\frac{2^n\,\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(\nu-1)}\right]^2 C_n^{\nu,\rho}(x_1)$$

$$40.)\quad b_\rho = \frac{(2\nu+2\rho-1)\,\Pi(2\nu-2)}{2(n+\nu)}\, C_n^{\nu,\rho}(x_1).$$

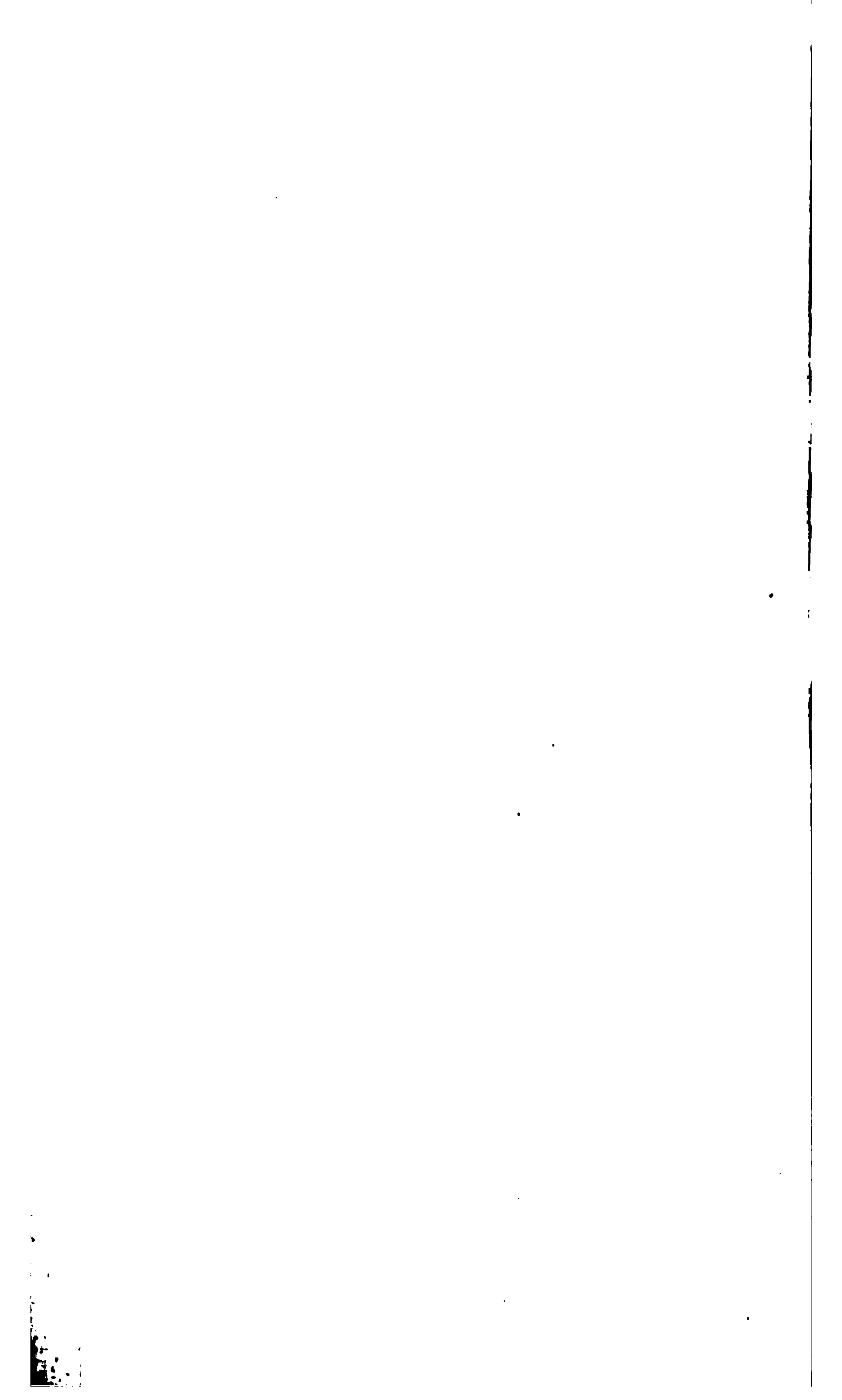
Man hat daher:

$$41.)\quad \int_0^\pi C_n^\nu(z) \cdot C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi) . \sin^{2\nu-1}\varphi \, . \, d\varphi = (-1)^\rho \frac{2^{2n+2\nu-1}\,\Pi(2\nu+\rho-2)\,[\Pi(n+\nu-1)]^2}{\Pi(\rho)\,\Pi(n-\rho)\,\Pi(2\nu-2)\,\Pi(2\nu+n+\rho-1)}\, C_n^{\nu,\rho}(x) \cdot C_n^{\nu,\rho}(x_1)$$

$$42.)\quad \int_0^\pi D_n^\nu(z) \cdot C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi) . \sin^{2\nu-1}\varphi \, . \, d\varphi = \frac{2^{2n-2}\,\Pi(2\nu+\rho-2)\,[\Pi(\nu-1)]^2}{(n+\nu)\,\Pi(\rho)\,\Pi(2\nu-2)} \cdot D_n^{\nu,\rho}(x) \cdot C_n^{\nu,\rho}(x_1)$$

$$43.)\quad C_n^\nu(z) = \Pi(2\nu-2) \left[\frac{2^n\,\Pi(n+\nu-1)}{\Pi(\nu-1)}\right]^2 \sum_0^n {}_\rho (-1)^\rho \frac{2\nu+2\rho-1}{\Pi(n-\rho)\,\Pi(2\nu+n+\rho-1)}\, C_n^{\nu,\rho}(x) \cdot C_n^{\nu,\rho}(x_1) \cdot C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi)$$

$$44.)\quad D_n^\nu(z) = \frac{\Pi(2\nu-2)}{2(n+\nu)} \sum_0^\infty {}_\rho (2\nu+2\rho-1)\, D_n^{\nu,\rho}(x) \cdot C_n^{\nu,\rho}(x_1) \cdot C_\rho^{\frac{2\nu-1}{2}}(\cos\varphi).$$



Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und von dieser eine erhöhte Auflage in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe werden daher vom Jahre 1862 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen** erscheinen, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

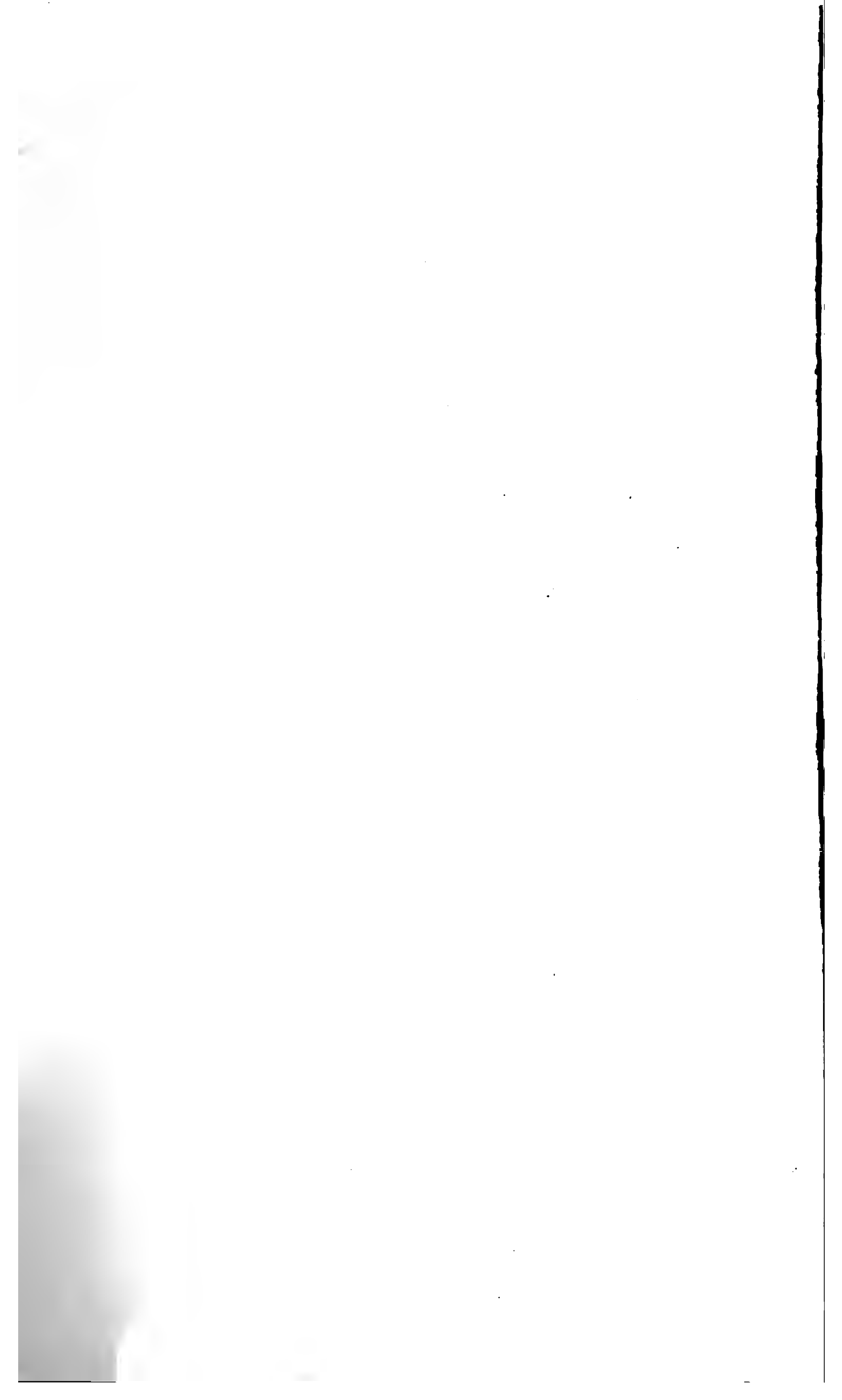
Von der I. und II. Abtheilung werden jährlich 5—7 und von der III. 3—4 Hefte erscheinen.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Der Preis des ganzen Jahrganges sämmtlicher drei Abtheilungen beträgt 24 fl.

Von allen in den Sitzungsberichten erscheinenden Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) bezogen werden.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlung enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.



July 21

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. BAND. IV. und V. HEFT.

Jahrgang 1874. — November und December.

(Mit 1 Tafel und 5 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

INHALT

des 4. und 5. Heftes (November und December 1874) des 70. Bandes, II. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 30 kr. = 26 Ngr.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

9.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XXIV. SITZUNG VOM 5. NOVEMBER 1874.

Der Präsident gibt Nachricht von dem heute erfolgten Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Regierungsrathes und Professors Dr. Friedrich Rochleder.

Sämmtliche Anwesende geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Die Direction der k. k. Unterrealschule zu Bruneck dankt mit Zuschrift vom 24. October für die Betheilung dieser Lehranstalt mit Werken und Separatabdrücken.

Das k. k. militär-geographische Institut macht die Anzeige vom Erscheinen einer Generalkarte von Central-Asien.

Herr Dr. Guido Goldschmiedt überreicht den ersten Theil einer Abhandlung „Über die Bestandtheile des aus schwarzem Senfsamen gewonnenen fetten Öles."

Herr Dr. F. Exner legt eine Abhandlung: „Über den Durchgang der Gase durch Flüssigkeitslamellen" vor.

Herr Prof. Dr. S. L. Schenk übergibt eine Abhandlung, betitelt: „Entwickelungsvorgänge im Eichen nach der künstlichen Befruchtung von *Serpula*".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Anno XXVII, Sess. 5ª. Roma, 1874; 4°.

Akademie der Wissenschaften, Kgl. bayer., in München: Abhandlungen der histor. Classe. XII. Band, II. Abth. München, 1874; 4°. (Nebst den betreffenden Separatabdrücken.) — Sitzungsberichte der philos.-philolog. und histor. Classe. 1873, Heft VI; 1874 Heft I—III; Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe. 1874, Heft I—II. München; 8°. — Dr. Justus Freiherrn von Liebig zum Gedächtniss. Rede von Max v. Pettenkofer. München, 1874; 4°. — Justus

Freiherr von Liebig als Begründer der Agrikultur-Chemie. Eine Denkschrift von August Vogel. München 1874; 4°. — Über den Einfluss des Freiherrn Justus von Liebig auf die Entwicklung der Physiologie. Eine Denkschrift von Theodor L. W. v. Bischoff. München, 1874; 4°. — Gedächtnissrede auf König Johann von Sachsen, gehalten von J. v. Döllinger. München, 1874; 4°.

Akademie der Wissenschaften, k. k., zu Krakau: Rocznik. Rok 1873. W Krakowie, 1874; 8°. — Lud. Serya VI—VII. Kraków, 1873—1874; 8°. — Bibliografia polska XIX. stólecia. Tom I—II. (A—L.) Kraków, 1872 & 1874; 8°. — *Scriptores rerum polonicarum. Tomus II.* Kraków, 1874; 8°. — Sprawozdanie komisyi fizyograficznéj. Tom VII. W Krakowie. 1873; 8°. — Rozprawy i sprawozdanie z posiedzeń wydziału historyczno-filozoficznego. Tom. I. W Krakowie, 1874; 8°. — Pamiętnik. Wydziały: Filologiczny i historyczno-filozoficzny. Tom I. W Krakowie, 1874; 4°. — Wydawnictwa komisyi historycznéj. Nr. 3. W Krakówie, 1874; 4°.

Annalen (Justus Liebig's) der Chemie. Band 172, Heft 3; Band 173, Heft 1. Leipzig & Heidelberg, 1874; 8°.

Annales des mines. VII° Série. Tome V. 2me & 3me Livraisons de 1874. Paris; 8°.

Archiv der Mathematik und Physik, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. LVI. Theil, 3. & 4. Heft. Leipzig, 1874; 8°.

Bibliothèque Universelle & Revue Suisse: Archives des sciences physiques et naturelles. N. P. Tome L°, Nrs. 199—200; Tome LI°, Nr. 201. Genève, Lausanne, Paris, 1874; 8°.

Bureau de la recherche géologique de la Suède: Carte géologique de la Suède. Feuilles Nrs. 46—49. Gross Folio. (Avec renseignements in 8°.) — Description de la formation carbonifère de la Scanie, par Ed. Erdmann. Stockholm, 1873; 4°. — Beskrifning öfver Besier-Ecksteins kromolitografi och litotypografi. Af Algernon Börtzell. Stockholm, 1872; 4°. — Jakttagelser öfver moränbildningar etc. Af Ed. Erdmann. Stockholm, 1872; 8°. — Über die Geognosie der schwedischen Hochgebirge, von A. E. Törnebohm. Stockholm, 1873; 8°. — Om några försteningar från Sveriges

och Norges „Primordialzon", af J. G. O. Linnarsson. Stockholm, 1873; 8°. — Öfversigt af de geologiska förhållandena vid Hallands ås, af David Hummel. Stockholm, 1872; 8°. — Bidrag till kännedom om Sveriges erratiska bildningar etc., af Otto Gumaelius. Stockholm, 1872; 8°. — Die Ausstellung der geologischen Landes-Untersuchung Schwedens auf der Weltausstellung in Wien 1873. Stockholm; 8°.

Cosmos di Guido Cora. II—III. Torino, 1874; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nrs. 15—17. Paris, 1874; 4°.

Gesellschaft der Wissenschaften, königl. böhmische: Abhandlungen vom Jahre 1873. VI. Folge. VI. Band. Prag, 1874; 4°. — Sitzungsberichte. Jahrgang 1872. Juli—December. Prag. 1873; 8°.

— Schlesische, für vaterländische Cultur: Abhandlungen. Philos.-histor. Abtheilung. 1873/4. Breslau, 1874; 8°. — LI. Jahres-Bericht. Breslau, 1874; 8°.

— physikal.-medicin., zu Würzburg: Verhandlungen. N. F. Band VII., u. Band VIII. 1. & 2. Heft. Würzburg, 1874; 8°.

Jahrbücher der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. N. F. IX. Band. Jahrgang 1872. Wien, 1874; 4°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band X. 1.—6. Heft. Leipzig, 1874; 8°.

Meunier, Stanislas, Cours de Géologie comparée. Paris, 1874; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 20. Band, 1874. Heft X, nebst Ergänzungsheft Nr. 38. Gotha; 4°.

— Mineralogische, von G. Tschermak. Jahrgang 1874, Heft 3. Wien; 4°.

Nature. Nr. 260, Vol. X. London, 1874; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". IVe Année, 2me Série, Nrs. 17—18. Paris, 1874; 4°.

Società Italiana di Antropologia e di Etnologia: Archivio. IV. Vol., fasc. 2º Firenze, 1874; 8º.

— degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Anno 1874. Disp. 6ª—8ª. Palermo, 1874; 4º.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin. Tome XLVIII. Année 1874, Nrs. 1—2. Moscou; 8º.

Society, The Asiatic, of Bengal: Journal. Part I, Nr. 2. 1874. Calcutta; 8º. — Proceedings. 1874, Nrs. VI & VII. Calcutta; 8º. — *Bibliotheca Indica.* N. S. Nrs. 268, 294, 306. Calcutta, 1873 & 1874; 8º.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 43—44. Wien, 1874; 4º.

Würzburg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1873/4. 4º & 8º.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang, 14. Heft. Wien, 1874; 4º.

Über die Bestandtheile des aus schwarzem Senfsamen gewonnenen fetten Öles.

Von Dr. Guido Goldschmiedt.

I. Mittheilung.

Unsere Kenntnisse über die Zusammensetzung des Senföles beschränken sich auf das, was Darby in seiner im Jahre 1849 erschienenen Abhandlung [1] mitgetheilt hat. Alle Chemiker, welche nach ihm dieses Öl in den Kreis ihrer Arbeiten gezogen haben, hatten sich nicht die Aufgabe gestellt, nachzuweisen, ob die von Darby gefundenen Bestandtheile die einzigen in demselben vorkommenden seien, und ob ihnen wirklich die Zusammensetzung zukomme, die dieser Forscher für sie aufgestellt hatte, sondern es diente ihnen nur als Rohmateriale, aus welchem sie sich den der Menge nach hervorragendsten Antheil (die Erucasäure) abschieden, um diese selbst eingehender zu studiren.

Darby fand, das fette Öl des schwarzen Senfes bestehe aus den Glycerinäthern zweier bei gewöhnlicher Temperatur fester und einer flüssigen Säure; für die eine Säure vom Schmelzpunkt 70° berechnet er nach damaliger Schreibweise die Formel $C_{68}H_{66}O_5$, 2HO aus den Analysen ihres Bariumsalzes, und hält sie daher für Talgsäure (Stearinsäure), welcher damals noch diese Zusammensetzung zugeschrieben wurde.

Für die andere feste Säure vom Schmelzpunkte 34° fand er die Formel $C_{44}H_{42}O_4$ und nannte sie Erucasäure.

Die flüssige Säure lieferte bei der Analyse ihres Bariumsalzes Zahlen, die der Formel $C_{38}H_{36}O_4$, HO am nächsten

---

[1] Annal. d. Chem. & Pharm. 69. 1.

kamen. Darby selbst aber hält seine analytischen Versuche nicht ausreichend zur Aufstellung einer Formel.

Zur Trennung der Säuren schlug Darby folgendes Verfahren ein: Das Öl wurde mit Natronlauge verseift, ausgesalzen; die Seife mit verdünnter Salzsäure zerlegt und das so erhaltene flüssige Säuregemenge durch Digestion mit Bleioxyd in basische Bleiverbindungen verwandelt; der in Äther lösliche Theil bestand aus der Bleiverbindung der flüssigen Säure, während aus dem Rückstand die festen Säuren gewonnen wurden; diese letzteren trennte Darby durch Krystallisation.

Otto[1] bediente sich bei seiner Arbeit über die Erucasäure zur Isolirung letzterer auch dieser Methode; er gibt aber an, dass das erucasaure Blei der in Äther lösliche Theil der Bleiverbindungen sei, ohne zu beachten, dass er hierbei im Widerspruche mit den Angaben Darby's und den damit übereinstimmenden Websky's[2] und Städeler's[3] ist, die die Erucasäure aus dem Rapsöle gewonnen hatten. Er gelangte auf diesem Wege auch wirklich zu einer Säure, deren Eigenschaften mit jenen der Erucasäure vollkommen übereinstimmten.

Später hat noch Haufsknecht[4] Erucasäure (aus Rapsöl) dargestellt und fand deren Bleiverbindung in Übereinstimmung mit den älteren Forschern beinahe unlöslich in Äther; er gibt übrigens an, dass etwas von dieser Verbindung in die ätherische Lösung übergegangen sei.

Diesen scheinbaren Widerspruch hat Fitz[5] aufgeklärt; derselbe hat im Traubenkernöle eine Säure von der Zusammensetzung der Erucasäure entdeckt, die er mit derselben für identisch hält und die Löslichkeit ihres Bleisalzes untersucht.

Es hat sich hiebei gezeigt, dass dieselbe eine Function der Temperatur ist; das Salz ist im kalten Äther schwer, in heissem leicht löslich.

---

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. 127, 132.
[2] Journ. f. pract. Chemie 58, 449.
[3] Annal. d. Chem. u. Pharm. 87, 133.
[4] Annal. d. Chem. & Pharm. 143, 40.
[5] Berichte d. Berl. chem. Gesellsch. 4, 910.

Trennung der Säuren.

Die Methode Darby's schien mir nicht geeignet, zur Trennung der Säuren angewendet zu werden, wo es sich darum handelte, alle Bestandtheile des Senföles, auch die etwa in sehr geringen Mengen darin enthaltenen, zu isoliren, und ich bediente mich daher des allerdings viel umständlicheren und zeitraubenden Verfahrens der fractionirten Fällung, nachdem ich mich durch mehrere Versuche überzeugt hatte, dass durch unvollständige Verseifung, Trennung des noch unverseiften Öles von der Seife durch Extraction mit Schwefelkohlenstoff, Abdestilliren des letzteren und abermaliges unvollständiges Verseifen, das Ziel nicht schneller erreicht werde und es ausserdem mit grossen Schwierigkeiten verbunden sei, den Schwefelkohlenstoff vollständig von dem unverseiften Rückstande zu entfernen.

Das Materiale zu dieser Untersuchung verdanke ich der Liebenswürdigkeit des Herrn Prof. Schneider; derselbe hatte das Öl vor längerer Zeit aus Senfsamen *(sinapis nigra)* durch Pressen gewonnen, so dass ein Zweifel über die Provenienz desselben unzulässig ist.

Zwei Kilogramm des Öles wurden mit einer zur vollständigen Verseifung mehr als ausreichenden Menge Natronlauge im Dampfbade erhitzt, mit Kochsalz bis zur Abscheidung einer festen Kernseife versetzt und die das Glycerin enthaltende Mutterlauge in einer Schraubenpresse entfernt; der Seifenkuchen wurde noch zweimal mit Wasser verrieben, ausgesalzen und ausgepresst.

Die so erhaltene Seife war weiss; sie wurde verrieben und zweimal in der Kälte mit grossen Mengen 94 % Alcohol geschüttelt. Die Lösung wurde jedesmal durch Pressen vollständig von dem Rückstande getrennt.

Von der Lösung wurde der Alcohol durch Destillation entfernt und die letzten Spuren desselben durch Erwärmen im Wasserbade unter Zusatz von Wasser vertrieben. Die Seife wurde dann ausgesalzen und mit verdünnter Salzsäure zerlegt. Es schied sich eine selbst in Kältemischungen ganz klar und flüssig bleibende Säure ab, die wegen der zu ihrer Untersuchung

sich nicht eignenden Sommerszeit sogleich wieder verseift und in geschlossenen Gefässen aufbewahrt wurde.

Ich werde mich im nächsten Winter mit dem Studium dieser Säure beschäftigen und die erzielten Resultate zum Gegenstande einer zweiten Mittheilung über die Bestandtheile des Senföles machen.

Im Laufe der Arbeit wurden noch mehrere kleinere Portionen flüssiger Säure erhalten, die wie diese vorläufig unberücksichtigt bleiben müssen.

Der in kaltem Alcohol ungelöste Theil der Gesammtseife wurde nun in siedendem 94% Alcohol gelöst und der heissen Lösung 60 Grm. Chlorcalcium in alcoholischer Lösung zugesetzt. Die Flüssigkeit trübte sich hiebei; bei länger fortgesetztem Erwärmen klärte sie sich, während sich am Boden des Gefässes, das Kalksalz, als ein bei der Siedehitze des Alcohols leicht bewegliches, schweres Öl abschied. Die siedende alcoholische Seifenlösung wurde von diesem Kalksalze durch ein warm gehaltenes Faltenfilter abgegossen und der Rückstand, um sicher alle Natronseife zu entfernen, noch fünfmal mit Alcohol (die alkoholischen Waschflüssigkeiten wurden mit dem ersten Filtrate vereinigt) und schliesslich mit Wasser ausgekocht; die Kalkseife wurde noch flüssig aus dem Kolben in eine Porzellanschale gegossen, wo sie schnell zu einer festen, spröden, etwas gelb gefärbten Masse erstarrte.

Ganz dasselbe Verfahren wurde noch 4mal mit je 60 Grm. Chlorcalcium in alcoholischer Lösung wiederholt und so von der alcoholischen Lösung der Natronseifen vier Fractionen Kalkseifen erhalten, die mit *A*, *B*, *C*, *D* bezeichnet werden sollen und die einzeln weiter verarbeitet wurden; die noch übrig bleibende Mutterlauge enthielt zum grössten Theile Natronseife, aber auch etwas Kalkseife, da letztere in Alcohol nicht ganz unlöslich ist.

Der Alcohol wurde zum grössten Theile abdestillirt und die sich dabei im Rückstand abscheidende Kalkseife mit *D* vereinigt. Die Natronseife erwies sich nach dem Zerlegen mit Salzsäure als beinahe ausschliesslich aus dem Salze der flüssigen Säure bestehend und wurde daher vorläufig nicht untersucht.

A wurde hierauf mit verdünnter Salzsäure im Wasserbade erhitzt. Das sich abscheidende farblose Säuregemenge erstarrte

bei gewöhnlicher Temperatur. Es wurde zuerst mit säurehaltigem, dann mehrmals mit reinem Wasser gewaschen, um alles Chlorcalcium und die Salzsäure zu entfernen.

Dieses Gemenge fing an bei 24° zu schmelzen und war bei 40° ganz verflüssigt; es wurde neuerdings mit Natronlauge verseift, ausgesalzen und die Seife dreimal aus Alkohol umkrystallisirt; sie schied sich das drittemal beim Erkalten nicht mehr als gefüllte Seife, sondern krystallinisch ab.

Die Mutterlaugen wurden jedesmal durch Pressen vollständig von der ausgeschiedenen Seife entfernt und vereinigt. Die aus ihnen gewonnenen Säuren wurden, da sie sich in Kältemischungen nur ein wenig, von darin suspendirten festen Säuren trübten, wieder verseift und aufgehoben.

Die durch Krystallisation erhaltene, blendend weisse krystallinische Seife wurde nun wieder mit verdünnter Salzsäure zerlegt, wie oben gewaschen und in heissem absoluten Alcohol gelöst; beim Erkalten fiel eine ziemlich bedeutende Quantität in Gestalt kleiner Nädelchen nieder, die bei 70° schmolzen. Aus der Mutterlauge schied sich selbst nach erfolgter Concentration nichts aus; sie wurde daher mit so viel Wasser verdünnt, dass sich alles gelöste auf der Oberfläche als Öl ansammelte, das erst nach längerem Stehen zu einer weichen Masse erstarrte.

Durch Pressen zwischen Papier wurde die anhängende flüssige Säure so weit als möglich entfernt und dann aus absolutem Alcohol krystallisirt. Die zuerst anschiessende Portion hatte den Schmelzpunkt 59°, die zweite 52°, die vier darauffolgenden von 34° abwärts bis 29°, der letzte Rückstand blieb auch in Kältemischungen flüssig.

Dieses umständliche Verfahren wurde in ganz ähnlicher Weise bei den Kalkseifen *B*, *C*, *D* wiederholt und bei jeder mit ähnlichem Erfolge wie bei der Portion *A*; es wurden aus jeder, wie bei dieser, Fractionen erhalten, die auf eine bei etwa 70° und auf eine etwas über 30° schmelzende Säure schliessen liessen; die Fractionen, deren Schmelzpunkt zwischen diesen Grenzen oder unter 30° lagen, liessen sich nämlich durch weiteres Umkrystallisiren in solche von höherem und niederem Schmelzpunkt zerlegen. Es wurden auf diese Weise etwa 70—80 getrennte Säureportionen erhalten,

die jede für sich auf ihren Schmelzpunkt untersucht wurden, so dass ein Übersehen eines, wenn auch in geringer Menge im Öle vorkommenden Bestandtheiles, nicht leicht möglich war. Von dieser grossen Anzahl von Fractionen wurden diejenigen, deren Schmelzpunkt nur in Grenzen von 1—2° verschieden waren, vereinigt und wieder umkrystallisirt, während die Portionen, deren Schmelzpunkt vereinzelt war, allein derselben Behandlung unterzogen wurden.

Schliesslich wurden nur mehr zwei Schmelzpunkte beobachtet, ein bei 72° gelegener und ein bei den verschiedenen Portionen zwischen 32° und 34° schwankender. Zu bemerken ist noch, dass die Menge der bei höherer Temperatur schmelzenden Säure am bedeutendsten war in *A* und von *B* nach *D* zu, welches nur sehr wenig davon enthielt, abnahm; umgekehrt war *D* am reichsten an flüssiger Säure.

Nachdem der Versuch ergeben hatte, dass bei diesen beiden Säuren, durch weitere fractionirte Fällung, ein weiteres Zerlegen in ihrer Natur nach verschiedene Bestandtheile nicht erfolge, konnte ich überzeugt sein, dass im Öle des schwarzen Senfsamens nur zwei feste Säuren vorkämen, und ging zur Untersuchung dieser selbst über.

Untersuchung der bei höherer Temperatur schmelzenden Säure.

Die bei 72° schmelzende Säure war pulverig, aber deutlich krystallinisch. Sie wurde noch sechsmal aus absolutem Alcohol umkrystallisirt, wobei jedesmal der Schmelzpunkt etwas höher, die krystallinische Beschaffenheit deutlicher wurde; nach dem sechstenmal blieb der Schmelzpunkt constant und war gleich in der auskrystallisirten und der aus der Mutterlauge gewonnenen Säure. So gereinigt, ist die Säure voluminös und besteht aus blendend weissen, verhältnissmässig grossen perlmutterglänzenden Blättchen. Sie löst sich leicht in heissem Alcohol, weniger in kaltem, sehr leicht schon in kaltem Äther. Sie wird zwischen 74—75° weich und schmilzt schnell und vollständig bei 75·5° (uncorrigirt).

Bei der Verbrennung der über Schwefelsäure im Vacuo getrockneten Substanz wurden folgende Werthe erhalten:

I. 0·2192 Gr. gaben 0·6242 Gr. Kohlensäure und 0·2579 Gr. Wasser;

II. 0·1941 Gr. gaben 0·5544 Gr. Kohlensäure und 0·2245 Gr. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet
	I	II	für $C_{22}H_{44}O_2$
C....	77·67	77·89	77·65
H....	13·07	12·85	12·94
O....	9·26	9·26	9·41
	100·00	100·00	100·00

Die für die Säure gefundenen Zahlen und die weiter unten angeführten Salzbestimmungen führen zur Molecularformel

$$C_{22}H_{44}O_2.$$

Eine Säure von dieser Zusammensetzung ist bekannt; sie ist von Völker[1] im Öle des Samens vom *Moringa oleifera* aufgefunden und Behensäure genannt worden.

Völker gab dieser Säure zuerst die Formel $C_{21}H_{42}O_2$, Strecker[2] aber, schlug in einer Bemerkung zu Völker's Arbeit die obige Formel vor, da dieselbe besser mit Völker's Analysen stimmt. Die Behensäure schmilzt bei 76°; da ich für meine Säure 75·5° fand und das Verhalten der beiden Körper ein übereinstimmendes ist, so muss wohl auch die Säure aus dem Senföle als Behensäure angesprochen werden.

Salze der Behensäure.

Natriumsalz. Wenn man eine siedende Lösung von Behensäure in Alcohol genau mit alcoholischer Natronlauge neutralisirt, so scheidet sich beim Erkalten das Natriumsalz als Gallerte aus. Als dasselbe aus Alcohol umkrystallisirt wurde, zeigte es sich, dass die Mutterlauge alkalisch reagire.

Das Umkrystallisiren wurde fortgesetzt, bis kein Alkali mehr an das Lösungsmittel abgegeben wurde, und das Salz dann über Schwefelsäure getrocknet. Dasselbe stellt ein weisses

---

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. 64, 342.

[2] Ebendaselbst 64, 364.

mikrokrystallinisches Pulver dar und gab bei der Analyse folgendes Resultat:

0·4489 Gr. Substanz gaben 0·0495 Gr. schwefelsaures Natrium.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{22}H_{43}O_2Na+C_{22}H_{44}O_2$
Na	3·57	3·27

Es lag also hier eine moleculare Verbindung von einem Molecül behensaurem Natrium mit einem Molecül Behensäure vor, ein sogenanntes „zweifachsaures" Salz, wie es z. B. bei der Stearinsäure bereits bekannt ist.

Das neutrale Natriumsalz wurde durch Kochen einer Lösung von Behensäure in absolutem Alcohol mit trockenem kohlensauren Natrium bis zum Aufhören der Kohlensäureentwicklung dargestellt; die Lösung wurde im Wasserbade beinahe bis zur Trockene eingedampft und der Rückstand in absolutem Alcohol aufgenommen. Das überschüssige kohlensaure Natrium wurde abfiltrirt und das aus der Lösung abgeschiedene Salz, das zunächst gelatinös ist, durch Zusatz von mehr Alcohol aber und schon durch Umrühren krystallinisch wird, und welches trocken ein blendend weisses, leichtes Pulver ist, analysirt.

0·5205 Gr. Substanz gaben 0·1015 Gr. schwefelsaures Natrium.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{22}H_{43}O_2Na$
Na	6·31	6·35

Calciumsalz. Man erhält dasselbe, wenn man eine Lösung des neutralen Natriumsalzes in Alcohol in der Wärme mit alcoholischer Chlorcaliumlösung versetzt. Das Calciumsalz fällt dann als weisses lockeres Pulver nieder, welches mehrmals mit heissem Alcohol und mit Wasser gewaschen wurde.

0·4685 Gr. Substanz gaben 0·0370 Gr. Calciumoxyd.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $(C_{22}H_{43}O_2)Ca$
Ca	5·64	5·57

Bariumsalz. Essigsaures Baryum fällt aus der Lösung des behensauren Natriums, behensaures Barium, als weisses, in Alcohol unlösliches Pulver, das wiederholt mit Alcohol und Wasser gewaschen und über Schwefelsäure getrocknet bei der Analyse folgende Werthe gab:

I. 0·3355 Gr. Substanz gaben 0·0963 Gr. schwefels. Barium.
II. 0·4419 Gr. Substanz gaben 0·1271 Gr. schwefels. Barium.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für
	I	II	$(C_{22}H_{43}O_2)_2Ba$
Ba	16·98	16·91	16·81

Das Kupfersalz wird durch Umsetzung des behensauren Natriums mit essigsaurem Kupfer, beides in alcoholischer Lösung erhalten; es fällt als blaugrüner flockiger Niederschlag nieder, der getrocknet ein hellgrünes Pulver darstellt; dasselbe ist unlöslich in Alcohol und Äther, und wurde durch Waschen mit heissem Alcohol und Wasser gereinigt.

0·4301 Grm. Substanz gaben 0·0454 Grm. Kupferoxyd.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $(C_{22}H_{43}O_2)_2Cu$
Cu.....	8·43	8·56

Untersuchung der leichter schmelzenden Säure.

Nach weiterem Umkrystallisiren wurde der Schmelzpunkt der reinen Säure constant bei 33—34° gefunden. Sie krystallisirt in bis zolllangen, weissen, sehr biegsamen Nadeln, erstarrt nach dem Schmelzen zu einer strahlig krystallinischen Masse und löst sich in allen Verhältnissen in heissem Alcohol.

Die Analyse der im Vacuo getrockneten Säure ergab:

I. 0·3319 Gr. Substanz gaben 0·9519 Gr. Kohlensäure und 0·3742 Gr. Wasser.
II. 0·2596 Gr. Substanz gaben 0·7415 Gr. Kohlensäure und 0·2879 Gr. Wasser.
III. 0·2781 Gr. Substanz gaben 0·7967 Gr. Kohlensäure und 0·3117 Gr. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für
	I	II	III	$C_{22}H_{44}O_2$
C...	78·22	77·90	78·13	78·11
H...	12·53	12·32	12·45	12·43
O...	9·25	9·78	9·42	9·46
	100·00	100·00	100·00	100·00

Diese Zahlen stimmen, wie aus obiger Zusammenstellung ersichtlich, mit den für die Erucasäure berechneten sehr gut überein; auch die weiter unten angeführten Analysen der erucasauren Salze führen zu dieser Molecularformel.

Die Zahlen, welche die Chemiker, die sich früher mit der Erucasäure beschäftigt haben, erhielten, führen alle zu dieser Formel und es ist also kein Zweifel, dass den drei mit diesem Namen bezeichneten Substanzen, aus Senföl, Rapsöl und Traubenkernöl, wirklich diese Zusammensetzung zukomme.

Aus dem Umstande aber, dass von Allen angegeben wird, die Erucasäure verändere sich an der Luft, während meine reine Säure sich seit Monaten unverändert erhält, schliesse ich, dass die bisher untersuchte Säure nicht absolut rein gewesen sei.

Trotz des übereinstimmenden Schmelzpunktes hielt ich aber doch die Annahme der Identität der drei Säuren durch die vorliegenden Angaben nicht für gerechtfertigt, da einerseits, bei Verbindungen von so hohem Moleculargewicht, bei denen eine so grosse Anzahl von isomeren Körpern theoretisch möglich ist, die physikalischen Eigenschaften bei einzelnen der möglichen Fälle leicht beinahe zusammenfallen können, andererseits über die Säuren verschiedener Provenienz thatsächlich Angaben vorliegen, deren Verschiedenheit möglicherweise nicht auf mangelhaften Beobachtungen oder Methoden beruhen konnten, sondern darauf, dass die Säuren nicht identisch, sondern nur isomer wären. Dies gilt zunächst von dem Verhalten gegen salpetrige Säure.

Websky[1] erhielt bei der Einwirkung der salpetrigen Säure auf Erucasäure aus Rapsöl eine isomere, deren Schmelzpunk

[1] Journal f. pract. Chemie, 58, 461.

er bei 59—60° bestimmte; Haufsknecht[1] wiederholte diesen Versuch mit demselben Materiale und mit gleichem Erfolg. Otto[2] hingegen konnte durch dieses Reagens keine Veränderung bei der Senfölsäure erzielen. Fitz[3] endlich, der allerdings nicht ganz reine Säure aus Traubenkernöl zu diesem Versuch angewendet hat, fand den Schmelzpunkt der veränderten Säure bei 56°.

Diese geringe Differenz war wohl von vornherein auf Verunreinigung zurückzuführen; hingegen forderte Otto's Angabe umsomehr zur Wiederholung des Versuches auf, als die Umwandlung der Säuren der Ölsäurereihe in die der Elaïdinsäure bekanntlich sehr leicht und schnell erfolgt.

Ich habe in geschmolzene reine Erucasäure höchstens eine Minute lang salpetrige Säure eingeleitet und fand nach einmaligem Umkrystallisiren der Reactionsmasse aus Alcohol den Schmelzpunkt 59—60°. Es ist somit auf das Bestimmteste die Identität der Säuren verschiedener Provenienz nachgewiesen. Die so veränderte Säure, die Websky (a. a. O.) Brassidinsäure nannte, besteht aus sehr leichten voluminösen Blättchen.

Salze der Erucasäure.

Natriumsalz. Es wurde durch genaue Neutralisation der heissen alcoholischen Säurelösung mit alcoholischer Natronlauge dargestellt; die Lösung gesteht beim Erkalten zur Gallerte, die durch weiteres Umkrystallisiren aus Alcohol krystallinisch erhalten werden kann. Das Salz ist leicht löslich in heissem Alcohol und gibt mit Wasser eine schäumende Seifenlösung.

0·4142 Gr. Substanz gaben 0·0840 Gr. schwefels. Natrium.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{22}H_{41}O_2Na$
Na	6·57	6·39

---

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. 143, 54.

[2] Ebendaselbst 127, 184.

[3] Berichte der Berl. chem. Gesellsch. 4, 913.

Calciumsalz. Versetzt man eine heisse alcoholische Lösung des Natriumsalzes mit alcoholischer Chlorcalciumlösung, so entsteht sofort eine Trübung der Flüssigkeit, die sich bei weiterem Erhitzen wieder klärt, während sich am Boden des Gefässes ein gelblich gefärbtes Öl ansammelt; die klare Flüssigkeit wurde abgegossen und der Rückstand mit so viel Alcohol in Berührung gebracht, als zu dessen Lösung nothwendig war; aus der heiss filtrirten Lösung schied sich beim Erkalten das erucasaure Calcium als weisses Pulver ab, das noch zur vollständigen Reinigung von Chlorcalcium und Chlornatrium mit Wasser gewaschen wurde. Das Salz ist in grossen Mengen siedenden Alcohols löslich, schmilzt unter Wasser. Es wurde im Vacuo getrocknet und der Kalkgehalt bestimmt:

0·2569 Gr. Substanz gaben 0·0219 Gr. Calciumoxyd.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $(C_{22}H_{41}O_2)_2Ca$
Ca	5·56	5·60

Bariumsalz. Durch entsprechende Umsetzung des Natriumsalzes mit essigsaurem Barium zu erhalten; es verhält sich ganz ähnlich dem Calciumsalz, ist aber in Alcohol noch viel schwerer löslich; zur Reinigung wurde wie bei dem Calciumsalze verfahren.

I. 0·4645 Gr. Substanz gaben 0·1334 Gr. schwefels. Barium.
II. 0·3119 Gr. Substanz gaben 0·0889 Gr. schwefels. Barium.

In 100 Theilen:

	Gefunden I	Gefunden II	Berechnet für $(C_{22}H_{41}O_2)_2Ba$
Ba	16·88	16·76	16·86

Silbersalz. Es ist ein weisser, flockiger Niederschlag, der erhalten wird, wenn man eine Lösung des Natriumsalzes in Alcohol mit einer gleichen Lösung von salpetersaurem Silber versetzt. Das Salz schwärzt sich schnell am Lichte; es wurde nach dem Waschen mit Alcohol und Wasser getrocknet und analysirt:

0·2788 Gr. Substanz gaben 0·0670 Gr. Silber.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{22}H_{41}O_2Ag$
Ag	24·03	24·26

Kupfersalz. Es fällt aus der Lösung des Natronsalzes in Alcohol, bei Zusatz von essigsaurem Kupfer, als hellgrüner, flockig krystallinischer Niederschlag zu Boden; derselbe schmilzt unter Alcohol zu einer smaragdgrünen zähen Masse und löst sich in grossen Mengen dieses Lösungsmittels, aus dem es sich beim Erkalten wieder flockig abscheidet.

Das Salz zersetzt sich sehr leicht, selbst bei einer 100° nicht übersteigenden Erwärmung; es wurde durch Waschen mit Alcohol und Wasser von den fremden Salzen befreit und der Kupfergehalt bestimmt:

0·4204 Gr. Substanz gaben 0·0470 Gr. Kupferoxyd.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $(C_{22}H_{41}O_2)_2Cu$
Cu	8·93	8·57

Neben Erucasäure kommt also in dem Ole der Samen von *Sinapis nigra*, nicht, wie Darby behauptet, Stearinsäure, sondern von festen Säuren ausschliesslich Behensäure vor.

Ich bin damit beschäftigt, weitere Erfahrungen über die Erucasäure zu sammeln und habe zunächst Versuche über die Addition von Wasserstoff angestellt.

Es ist mir bereits gelungen, ein Additionsproduct darzustellen und zwar durch Einwirkung von Jodwasserstoff auf Erucasäure, bei Gegenwart von amorphem Phosphor im zugeschmolzenen Rohre und bei einer Temperatur von circa 180°.

Es ist mit grossen Schwierigkeiten verbunden, das Additionsprodukt jodfrei zu erhalten, doch habe ich die zu einigen Bestimmungen nöthige Menge bereits rein in Händen gehabt. Die sowohl an der Säure als an Salzen gemachten, vorläufigen analytischen Versuche führten zur Molecularformel der Behensäure,

da aber der Schmelzpunkt der neuen Säure bei 79—80°, also um 4° höher als der der Behensäure gefunden wurde, so dürfte dieselbe als ein neues, der Behensäure isomeres Glied der Fettsäurereihe angesehen werden.

Ich werde demnächst ausführlicher über diese Säure berichten und gleichzeitig auch die Resultate ähnlicher Versuche mittheilen, die ich mit anderen Säuren der Ölsäure und Elaïdinsäurereihe zu machen beabsichtige.

Wien. Laboratorium des Prof. Schneider, November 1874.

Über den Durchgang der Gase durch Flüssigkeitslamellen.

Von **Dr. Franz Exner,**

Privatdocenten der Physik in Wien.

(Ausgeführt im physikalischen Cabinete der Wiener Universität.)

(Mit 3 Holzschnitten.)

§. 1.

Es ist eine bereits von Draper[1] constatirte Thatsache, dass eine Seifenlamelle, die das eine Ende einer sonst verschlossenen Glasröhre überspannt, sich nach aussen wölbt, sobald man dieselbe in einen mit CO_2 gefüllten Recipienten bringt. Er schloss daraus, dass man es hier mit einer Art Diffusion der Kohlensäure gegen die in der Glasröhre enthaltene Luft zu thun habe, indem die CO_2 die Seifenlamelle, ähnlich wie eine poröse Scheidewand durchdringe.

Marianini[2] hatte ähnliche Experimente gemacht; er bemerkte, dass, wenn er in einem zum Theil mit CO_2 gefüllten Standcylinder Seifenblasen, die mit atmosphärischer Luft gefüllt waren, fallen liess, dieselben bis zur Trennungsfläche von Luft und Kohlensäure einsanken und dort schwimmen blieben, dabei aber ihr Volumen allmälig vergrösserten bis auf das Doppelte und Dreifache und schliesslich platzten. Es konnte kaum ein Zweifel sein, dass man es auch hier mit einer Diffusion der CO_2 in das Innere der Seifenblase zu thun hatte, in Folge dessen die Volumsvergrösserung und schliesslich das Zerplatzen derselben eintrat. Was speciell das letztere anlangt, so bemerkte Marianini, dass die zerstäubten Wasserkügelchen nach allen Rich-

---

[1] Pogg. Ann. XLIII.

[2] Ann. d. ch. et ph. (III) IX und Pogg. Ann. LXV.

tungen hin geschleudert wurden, was offenbar nur von einem im Innern der Blase herrschenden Überdrucke herrühren konnte.

Im Wesentlichen dieselben Erscheinungen traten ein, wenn die Seifenblasen anstatt mit atmosphärischer Luft mit Stickstoff oder Sauerstoff gefüllt wurden.

Auch Vogel und Reischauer[1] hatten Versuche gemacht über die Durchdringung von Flüssigkeitsschichten durch Gase; sie bedeckten eine reducirte Indigolösung mit einer dünnen Schichte von Öl und beobachteten, dass durch diese Ölschicht hindurch sich eine oxydirende Wirkung des in der Atmosphäre enthaltenen Sauerstoffes geltend machte. Allein man hat es hier offenbar nicht so sehr mit Diffusionserscheinungen zu thun, als vielmehr mit den Wirkungen des von den Flüssigkeiten absorbirten Gases.

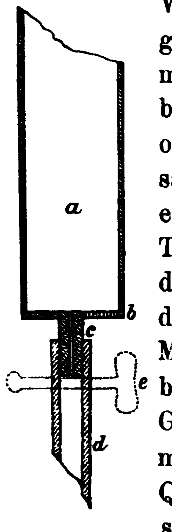
Es ist nun von Interesse, zu untersuchen, in wiefern die durch die Experimente von Draper und Marianini veranschaulichte Diffusion eines Gases durch eine flüssige Scheidewand sich unterscheide von den Erscheinungen der Gasdiffusion durch feste poröse Substanzen. Man kann sich zunächst davon, dass man es hier in der That mit Diffusion zu thun hat, dadurch leicht überzeugen, dass man in einem durch eine Seifenlamelle abgeschlossenen Gefässe in Folge von Gasdiffusion durch diese Lamelle einen manometrisch noch messbaren Überdruck erzeugt. Es lässt sich dies folgendermassen leicht bewerkstelligen. Man nimmt einen Glastrichter von ungefähr 3—4 Centimeter Öffnungsdurchmesser und verschliesst dessen Mündung durch ein Drahtnetz, dessen Maschen ungefähr die Grösse eines Quadratmillimeters besitzen; taucht man dann den Trichter in Seifenlösung so überziehen sich die Maschen des Drahtnetzes sämmtlich mit kleinen Seifenlamellen von ausserordentlicher Haltbarkeit. Verbindet man nun das Ende des Trichters durch einen Kautschukschlauch mit einem Wassermanometer und bringt den Trichter unter eine Glasglocke, in welche beständig Leuchtgas in genügender Menge zuströmt, so beobachtet man bald, dass sich zunächst die kleinen Seifenlamellen nach aussen aufblähen und dass, wenn dieselben eine gewisse Spannung erreicht haben, das

[1] Zeitsch. f. ges. Naturw. XIV.

Manometer zu steigen beginnt. Man kann auf diese Weise leicht einen Überdruck bis zu einem Centimeter Wasserhöhe im Innern des Glastrichters beobachten, höhere Drucke halten die Seifenlamellen nur sehr selten aus. Wenn man an Stelle des mit kleinen Lamellen überzogenen Drahtnetzes den Trichter nur mit einer einzigen grossen Seifenlamelle schliesst, so beobachtet man nur ein Aufblähen derselben, ohne eine messbare Druckdifferenz zu erzielen.

Der Unbeständigkeit der Seifenlamellen wegen war es von vornherein geboten, beim Studium dieser Diffusionserscheinungen nicht Druckänderungen zu messen, sondern die bei beiderseitig gleichbleibendem Drucke eintretenden Volumänderungen; dem entsprechend war auch der zu den nachfolgenden Versuchen gebrauchte, höchst einfache Apparat construirt. Er bestand im Wesentlichen aus einer 90 Mm. langen, 7 Mm. im Durchmesser haltenden Glasröhre *a*, Fig. 1, von überall gleicher Weite, deren eines Ende durch eine Metallplatte *b* geschlossen war, in welche eine feine Thermometerröhre *c* so eingekittet wurde, dass sie eben bis zum inneren Rande der Metallplatte reichte, ohne vorzuragen. Auf dieser Thermometerröhre sass luftdicht ein Kautschukschlauch *d*, durch einen Quetschhahn *e* unmittelbar am Ende der Thermometerröhre verschliessbar. Aussen war längs der Glasröhre eine Millimeterscala so befestigt, dass ihr Nullpunkt am Boden der Röhre bei der Metallplatte *b* stand. Will man den Apparat gebrauchen, so überzieht man das offene Ende der Glasröhre *a* durch Eintauchen in eine Seifenlösung mit einer Lamelle, und saugt dann bei geöffnetem Quetschhahne *e* durch das Kautschukrohr *d* dieselbe so weit in das Innere der Glasröhre ein, bis das Volumen zwischen ihr und der Metallplatte als zum Versuche passend erscheint, worauf der Quetschhahn wieder geschlossen wird. Hat man das Innere der Glasröhre vorher mit Seifenlösung befeuchtet, so besitzt eine solche Lamelle eine ausserordentliche Beweglichkeit; bei nicht abgeschlossenem Volumen und verticaler Stellung

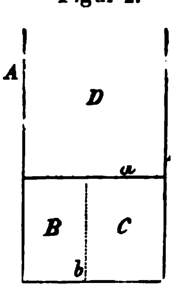
Fig. 1.



der Röhre z. B. gleitet sie durch ihre eigene Schwere längs derselben herab.

Bringt man die Glasröhre mit eingezogener Lamelle, in deren abgeschlossenem Volumen sich Luft befindet, unter eine Glocke, in welche beständig z. B. Leuchtgas einströmt, so beobachtet man alsbald eine Standänderung der Lamelle; der Versuch ist beendet, sobald die Lamelle in einer neuen Lage zur Ruhe gekommen ist. Die Frage ist nun danach gerichtet, mit welchen Geschwindigkeiten die beiderseitigen Gase die Flüssigkeit durchsetzen. Da das ursprüngliche Volumen Luft im Laufe des Versuches vollständig durch die Lamelle diffundirt ist und das schliesslich von derselben abgegränzte Volumen die Quantität des während derselben Zeit eingetretenen Gasvolumens enthält, ferner der Druck beiderseits im Laufe der ganzen Versuchsdauer constant bleibt, so ergibt das Verhältniss des schliesslichen Volumens zum ursprünglichen auch unmittelbar das gesuchte Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten, allerdings unter der Voraussetzung, dass dies letztere Verhältniss während des ganzen Versuches ein constantes sei. Diese Voraussetzung ist aber ohne Zweifel gerechtfertigt; denken wir uns in der Diffusionsröhre A, Fig. 2, die Seifenlamelle a gezogen, ober ihr in D das zu diffundirende Gas und unterhalb derselben im abgeschlossenen Raume $B+C$ sei ursprünglich Luft gewesen. Nach Verlauf einiger Zeit wird dann unterhalb a ein Gemisch von Luft und dem in D befindlichen Gase vorhanden sein und denken wir uns nun die Bestandtheile dieses Gemisches durch eine undurchdringliche Scheidewand b so getrennt, dass zum Beispiel in C alle Luft und in B alles bereits diffundirte Gas sich befindet, so wird offenbar in dem Stück der Seifenlamelle, welches D von B trennt, keine Diffusion mehr eintreten, wohl aber zwischen D und C, und zwar wird letztere Diffusion ganz unter denselben Verhältnissen von Statten gehen, wie die ursprüngliche, nur werden wegen der kleineren Trennungsfläche die ausgetauschten Gasquanta ihrem Volumen nach kleiner sein als die zu Anfang des Versuches in derselben Zeit diffundirten. Es wird somit bei

Figur 2.



stets abnehmender Quantität des Austausches das Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten der beiden Gase während des ganzen Versuches ein constantes sein. Für einen ähnlichen Fall, nämlich für die Diffusion durch poröse, feste Körper hat Bunsen[1] die Constanz dieses Verhältnisses durch Analyse von Gasproben, welche bei zeitweiliger Unterbrechung des Versuches aus dem Diffusionsrohr entnommen wurden, direct nachgewiesen.

Zur Ermittlung dieses Verhältnisses für zwei Gase ist es daher bei der früher besprochenen Anordnung der Diffusionsröhre nur nöthig, den ursprünglichen Stand der Lamelle vor dem Versuche zu notiren und ebenso die neue Ruhelage nach vollendetem Diffusionsprocesse; da der Nullpunkt der an der Diffusionsröhre angebrachten Scala am Abschlusse der Röhre durch die Metallplatte liegt, so ergibt der Quotient aus beiden Ablesungen unmittelbar das gesuchte Verhältniss.

Im Nachfolgenden sind zunächst, bevor weitere Versuche und daraus folgende Schlüsse angeführt werden, die nach dieser Methode ausgeführten Versuche mitgetheilt.

§. 2.

Was zunächst die Herstellung einer geeigneten Seifenlösung anlangt, so unterliegt dieselbe gar keinen Schwierigkeiten; Plateau[2] bediente sich bei seinen Versuchen über Gleichgewichtsfiguren einer solchen, welche aus einer Lösung von einem Gewichtstheil Marseiller Seife in 40 Gewichtstheilen destillirten Wassers gewonnen war und mischte von dieser Lösung noch je drei Volumina mit je zwei Volumina concentrirten Glycerins. Diese Beimischung von Glycerin verleiht den Seifenlamellen allerdings, besonders wenn man solche von grösseren Dimensionen benöthigt, eine ganz ausserordentliche Beständigkeit, allein bei den vorliegenden Versuchen, wo eine Lamelle von dem geringen Durchmesser der Diffusionsröhre gebraucht wurde, genügte stets eine einfache, wässerige Lösung der Seife. Ich nahm zu diesem Zwecke einen Gewichtstheil getrockneter und in Spähne geschnittener Marseiller Seife auf 60—80 Gewichtstheile destil-

---

[1] Gasometrische Methoden.

[2] Pogg. Ann. CXIV.

lirten Wassers, löste dieselbe kalt, und entfernte dann alle im Laufe von $1^1/_2$—2 Stunden noch nicht gelösten Bestandtheile; lässt man dann die Lösung in einem Standcylinder noch 3—4 Tage ruhig stehen, so setzen sich alle übrig gebliebenen unlöslichen Rückstände in Form eines flockigen Niederschlages am Boden des Gefässes ab und man kann die darüber befindliche, vollkommen klare Seifenlösung mittelst eines Hebers leicht von demselben trennen. Die aus dieser Seifenlösung dargestellten Lamellen hatten vollkommen die zu den Versuchen nöthige Haltbarkeit; sie hielten sich stets, wenn nicht äussere mechanische Einflüsse, wie Erschütterung, oder plötzliche Druckänderung, sie zerstörten, durch mehrere Stunden mitunter sogar über Nacht.

Was aber bei Ausführung der Versuche vor Allem nöthig, ist, dass die Innenwand des Diffusionsrohres gut mit Seifenlösung benetzt und vollkommen rein sei, denn das kleinste, kaum sichtbare Schmutzkorn verursacht in der Regel, wenn es von der sich bewegenden Lamelle überschritten wird ein Zerplatzen derselben.

Obwohl später Gelegenheit sein wird, noch ausführlicher darauf zurückzukommen, so will ich doch gleich hier bemerken, dass eine grössere oder geringere Verdünnung der Seifenlösung mit Wasser, sowie eine Beimengung von Glycerin zu derselben auf die Resultate der Versuche nicht von Einfluss ist; nicht so verhält es sich allerdings mit der Beimengung anderer Substanzen, z. B. Alkohol, wie weiter unten noch des Näheren gezeigt werden soll.

Die sämmtlichen nochfolgenden Versuche wurden mit der oben besprochenen wässerigen Lösung von Marseiller Seife ohne irgend welchen Zusatz ausgeführt.

I. Versuche mit Luft und Leuchtgas.

Die Diffusionsröhre wurde bei diesem und den nachfolgenden Versuchen mit anderen Gasen nicht, wie es bei den Vorversuchen geschehen war, in eine Glocke gebracht, die beständig mit dem zu diffundirenden Gase gespeist wird, sondern sie wurde einfach, nachdem die Seifenlamelle in ihr auf einen passenden Stand gebracht war, in verticaler Lage befestigt, und zwar bei specifisch leichteren Gasen als Luft mit dem offenen Ende nach abwärts; das zu diffundirende Gas wird dann von unten durch eine 3—4

Mm. weite Glasröhre continuirlich in das Diffusionsrohr eingeleitet. Es hat sich diese Anordnung als sehr zweckmässig bewährt, weil man auch bei einem verhältmässig geringen Verbrauche von Gas doch immer sicher ist, im unteren Theile des Diffusionsrohres wirklich bloss das einströmende Gas zu haben, was bei Anwendung einer grösseren Glocke, wenn nicht ausserordentliche Gasmengen zur Verfügung sind, doch nur sehr schwer erreichbar ist. Ob die Bewegung der Lamelle der Richtung der Schwere entgegengesetzt war oder nicht, war ganz ohne Einfluss auf den Gang der Versuche, wie es auch bei der ausserordentlichen Beweglichkeit derselben und Empfindlichkeit gegen die geringste Druckdifferenz zu erwarten war.

Die Versuche wurden so angestellt, dass das von der Lamelle im Diffusionsrohre abgeschlossene Volumen zuerst immer mit Luft gefüllt war und man das Gas in dieselbe diffundiren liess; war der Diffusionsprocess zu Ende, also auch der Versuch, so war das neue abgeschlossene Volumen ganz mit Gas gefüllt, es konnte unmittelbar ein zweiter Versuch sich daran schliessen, indem man das Gas gegen die freie Atmosphäre diffundiren liess und die jetzt rückwärts gewendete Bewegung der Lamelle beobachtete; mitunter gestattete die Haltbarkeit der Lamelle sogar eine doppelte und dreifache Wiederholung dieses Versuches.

Um dies an einem Beispiel zu erläutern, will ich hier eine Reihe von vier derartig aufeinander folgenden Versuchen mit derselben Lamelle mittheilen. Zu Beginn des Versuches stand die Lamelle bei 19·0 der Scala, hierauf liess ich Leuchtgas einströmen und notirte in kurzen Intervallen den jedesmaligen Stand der Lamelle so lange, bis er stationär geworden war.

Stand d. Lamelle in Millim. d. Scala	Zeit in Minuten von Beginn des Versuchs
19·0	0
33·0	4
36·5	6
40·2	10
42·0	16
42·0	19

Bei 42·0 hatte somit die Lamelle ihren stationären Stand erreicht; da der Quotient 42·0 : 19·0 das Verhältniss der in gleichen Zeiten ausgetauschten Gas- und Luftvolumina darstellt, so ergibt dieser Versuch für das Verhältniss der Geschwindigkeiten, mit welchen Leuchtgas und Luft die Lamelle durchsetzen, wenn wir dasselbe mit α bezeichnen,

$$\alpha = 2 \cdot 21;$$

d. h. Leuchtgas hat eine 2·21mal grössere Diffusionsgeschwindigkeit als die Luft.

Es wurde nun, ohne an der Diffusionsröhre oder Lamelle etwas zu ändern, der Gaszutritt unterbrochen, so dass das in der Diffusionsröhre eingeschlossene Leuchtgas jetzt in die äussere Luft diffundiren musste; dabei wurde die rückgängige Bewegung der Lamelle beobachtet.

Es ergab sich:

Stand	Zeit
42·0	0
36·0	1
21·8	3¹/₂
19·0	7
18·4	10
18·2	12
18·2	14

Würden die Versuche vollkommen exact vor sich gehen, so hätte die Lamelle sich wieder genau bis 19·0 zurückziehen müssen; statt dessen ging sie bis 18·2, wodurch der Werth von α etwas grösser wird als der vorhergehende. Es ergibt sich

$$\alpha = 2 \cdot 31$$

Es wurde nun in die Diffusionsröhre, die nun wieder ganz mit Luft gefüllt war, abermals Leuchtgas einströmen gelassen; es ergab sich folgende Bewegung der Lamelle:

Stand	Zeit
18·2	0
31·0	2

Stand	Zeit
34·0	$3^1/_2$
41·5	7
41·8	8
42·0	11
42·0	19

Auch hier ist $\alpha = 2{\cdot}31$.

Es wurde nun nochmals die rückgängige Bewegung der Lamelle beobachtet; dieselbe ergab:

Stand	Zeit
42·0	0
25·5	2
19·8	5
18·8	$7^1/_2$
18·5	9
18.2	11
18·2	15

Somit wieder $\alpha = 2{\cdot}31$.

Erst mehrere Minuten nach Vollendung dieses vierten Versuches zerplatzte die Lamelle, welche somit über fünf Viertelstunden die Diffusion ertrug.

Da es bei diesen Versuchen eigentlich nur auf die erste und letzte Ablesung ankommt, so wurde auch auf die Zwischenlagen der Lamelle kein besonderes Gewicht gelegt; um jedoch ein besseres Bild von der Regelmässigkeit im Gange der Versuche zu geben, will ich hier noch einen ausführlicher mittheilen.

Der ursprüngliche Stand der Lamelle war bei 12·0

Differenz	Stand d. Lamelle	Zeit in Minuten
1·8	12·0	0
3·0	13·8	2
1·7	16·8	4
1·5	18·5	
1·5	20·0	6
1·3	21·5	7

Differenz	Stand d. Lamelle	Zeit in Minuten
1·2	22·8	8
0·8	24·0	9
0·7	24·8	10
0·6	25·5	11
0·4	26·1	12
0·5	26·5	13
0·1	27·0	15
0·1	27·1	18
0·0	27·2	23½
	27·2	28

α ergibt sich hieraus = 2·27.

Man sieht aus den bisher mitgetheilten Versuchen schon, dass der Werth von α unabhängig ist von der Grösse des ursprünglichen Luftvolumens in der Diffusionsröhre, oder dass die bei der Diffusion eintretende Volumsänderung proportional ist dem ursprünglichen Volumen, ein Umstand, auf den schon v. Lang[1] bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über Gasdiffusion durch poröse Körper aufmerksam gemacht hat.

Die im Nachfolgenden mitgetheilten Resultate entsprechen noch weiteren 31 Versuchen mit Leuchtgas, welche sämmtlich nach derselben Methode und bei nur wenig um 18° schwankender Zimmertemperatur angestellt wurden; ich theile hier überall die Temperatur, bei welcher die Versuche ausgeführt wurden, mit, denn es wird sich später zeigen, dass dieselbe nicht ganz ohne Einfluss auf den Werth des Verhältnisses α ist. Was die Grösse der ursprünglichen Luftvolumina anlangt, so wurden den Lamellen absichtlich die allerverschiedensten Lagen zwischen 5 und 30 der Scala ertheilt.

Die für α erhaltenen Werthe waren folgende:

2·29	2·17	2·21	2·34
2·22	2·17	2·29	2·36
2·32	2·34	2·17	2·29
2·00	2·34	2·13	2·33
2·03	2·34	2·18	2·29

[1] Wiener Akad. LXI.

2·16	2·26	2·36	2·30
2·33	2·00	2·36	2·22
2·33	2·03	2·34	

Das Mittel aus sämmtlichen Resultaten beträgt 2·27; es dringt somit Leuchtgas mit einer 2·27mal grösseren Geschwindigkeit durch eine Seifenlamelle in Luft als atmosphärische Luft durch dieselbe in das Leuchtgas.

II. Versuche mit Wasserstoff und Luft.

Diese Versuche wurden auf ganz dieselbe Art angestellt wie die früheren mit Leuchtgas; der Wasserstoff wurde auf die gewöhnliche Weise aus reinem Zink und Schwefelsäure dargestellt und vor seinem Eintritte in das Diffusionsrohr erst durch mehrere Waschflaschen mit Wasser geleitet. Es geschah dies erstlich, um ihm seinen Wärmeüberschuss über die äussere Luft zu entziehen, und zweitens, um alle aus der Entwicklungsflasche allenfalls mitgerissenen Säuretheilchen zurückzuhalten, da sonst die Seifenlamelle sofort durch dieselben zersetzt und unbrauchbar wird.

Die Versuche, welche bei einer durchschnittlichen Temperatur von 13° angestellt wurden, ergaben für α einen bedeutend grösseren Werth als die früheren mit Leuchtgas; sie lieferten die folgenden 17 Resultate:

3·60	3·75	4·06	4·12
3·60	3·41	4·16	4·17
3·75	3·41	4·12	3·46
3·75	3·41	4·12	3·55
			3·67

Im Mittel 3·77.

Es tauscht sich somit 1 Volumen Luft gegen 3·77 Volumina Wasserstoff aus.

III. Versuche mit Luft und Kohlensäure.

Versucht man in die Diffusionsröhre Kohlensäure anstatt wie bei den vorhergehenden Versuchen Wasserstoff oder Leuchtgas einzuleiten, so bemerkt man eine ausserordentlich rasche Bewegung der Lamelle in dem Sinne einer Zunahme des abgeschlossenen Volumens, so dass man alsbald erkennt, dass Kohlensäure mit einer vielmal grösseren Geschwindigkeit die

Seifenlamelle durchdringt als Luft. Allein es gelingt nicht die Versuche auf diese Weise zu Ende zu bringen, indem die Seifenlamelle schon nach wenigen Minuten von der durchströmenden Kohlensäure zersetzt und dadurch ihrer Haltbarkeit vollständig beraubt wird.

Ich habe nach vielen vergeblichen Bemühungen die Versuche schliesslich nach folgender, zwar sehr einfacher aber auf grosse Genauigkeit nicht Anspruch machender Methode ausgeführt. Es wurde die Seifenlösung in eine flache Krystallisirschale gegossen, so dass sie den Boden derselben bis zu einer Höhe von ungefähr fünf Mm. bedeckte; auf dem Boden der Schale wurde eine Millimeterscala so befestigt, dass man sie von oben durch die Flüssigkeit hindurch bequem ablesen konnte. Die Kohlensäure wurde dann aus dem Entwicklungsgefässe zunächst zur Abkühlung und Reinigung durch mehrere Waschflaschen geleitet und schliesslich aus einem Kautschukrohr mit engem Glasansatze ausströmen gelassen; erzeugt man nun mit Hilfe dieses Apparates auf der Oberfläche der Seifenlösung in der Krystallisirschale Blasen, die frei auf der Oberfläche schwimmen und mit Kohlensäure gefüllt sind, so kann man leicht die grosse Diffusionsgeschwindigkeit derselben daran bemerken, dass die Blasen in kurzer Zeit sich ausserordentlich zusammenziehen; bei einem schliesslichen, sehr kleinen Volumen erhalten sie sich dann constant. Der Vorgang ist im Wesentlichen hier genau derselbe wie bei der früheren Methode, man hat ein ursprüngliches, abgeschlossenes Volumen Kohlensäure, welches sich im Laufe des Diffusionsversuches gegen ein kleines Volumen Luft, nämlich die schliessliche Blase umtauscht. Kennt man daher das Verhältniss der Volumina der ursprünglichen und schliesslichen Blase, so ist damit auch das Verhältniss der beiderseitigen Diffusionsgeschwindigkeiten gegeben. Zur Ermittlung dieses Verhältnisses diente die oben erwähnte, unter der Flüssigkeit angebrachte Millimeterscala. Es wurden nämlich die zu untersuchenden Blasen in einer solchen Lage auf der Flüssigkeitsoberfläche erzeugt, dass man möglichst genau ihren Durchmesser an der darunter befindlichen Scala ablesen konnte; es bietet dabei nur die erste Bestimmung zu Beginn des Versuches einige Schwierigkeiten, indem man dabei mit der Ablesung zweier Marken auf eine sehr kurze Zeit beschränkt

ist, die zweite Bestimmung dagegen, bei constant gewordener Grösse der Blase lässt sich mit voller Sicherheit ausführen. Es sind die Fehlerquellen bei dieser Methode allerdings sehr bedeutend, erstlich in Folge der bei so rasch auszuführenden Bestimmungen unvermeidlichen Ablesungsfehler und dann weil diese Ablesungsfehler in der dritten Potenz im Resultate zur Geltung kommen. Wenn man daher auch von dieser Methode keine so übereinstimmenden Resultate erwarten darf wie von der früher angewendeten, so schien es mir doch von Interesse, wenigstens angenäherte Resultate zu erhalten; denn alle Versuche, mit Modificationen der ursprünglichen Methode die Diffusion von solchen Gasen zu studiren, welche die Seifenlösung zersetzen, scheiterten an der Unhaltbarkeit der Lamellen, während, in der eben beschriebenen Form angestellt, die Versuche stets gelangen. Es liegt dies offenbar daran, dass hier der Diffusionsprocess im Ganzen ein viel rascherer ist in Folge des günstigeren Verhältnisses zwischen der Quantität des diffundirenden Gases und der Fläche, welche es durchdringt; dann ist auch die Lamelle hier in ihrer Bewegung vollkommen frei, während sie in der Diffusionsröhre immer den, wenn auch sehr geringen Reibungswiderstand am Glase zu überwinden hat.

Die Versuche mit Kohlensäure, deren Resultate nachfolgend mitgetheilt sind, wurden bei einer Zimmertemperatur von 15° ausgeführt; wie rasch der Diffusionsprocess vor sich geht, zeigen die zwei zunächst folgenden Versuche, bei denen nebst den Ablesungen die Zeit bemerkt ist. Leider ist es aber wegen der Kürze der Versuchsdauer nicht möglich, mehr als 3—4 Ablesungen zu machen.

Durchmesser der Blase in Millimetern	Zeit in Minuten
26	0
10	1/2
7	1
7	4

Die erste und letzte Ablesung hievon ergeben das Verhältniss des ursprünglich in der Blase enthaltenen Kohlensäure-

volumens zu dem schliesslich darin enthaltenen Luftvolumen, also das Verhältniss der Geschwindigkeiten, mit welchen die beiden Gase die Lamelle durchdringen. Dieses Verhältniss, wie im Früheren mit α bezeichnet, ergibt sich hieraus zu $\alpha = 51 \cdot 2$.

Ein anderer Versuch war der folgende:

Durchmesser der Blase in Millimetern	Zeit in Minuten
50	0
17	3
14	4
14	7

Hier ergibt sich, aus der ersten und letzten Ablesung berechnet, $\alpha = 45 \cdot 5$.

Weitere 13 Versuche ergaben die folgenden Resultate:

Ursprüngliche Grösse in Millim. d. Durchmessers	Schliessliche Grösse in Millim. d. Durchmessers	α
25	7	45·5
38	11	45·2
18	5	46·6
28	8	52·7
15	4	52·7
22	6	49·3
30	8·5	43·9
19	5·5	41·4
30	8·5	43·9
22	6	49·3
41	12	42·8
18	5	46·6
22	6	49·3

Als Mittel aus diesen 15 Versuchen ergibt sich $\alpha = 47 \cdot 1$. Wenn nun diese Resultate, welche zwischen den allerdings sehr weiten Grenzen von 41·4 bis 52·7 schwanken, auch nicht auf grosse Genauigkeit Anspruch machen können, so geben sie doch in Bezug auf die vorangegangenen Versuche ein Bild von der

grossen Geschwindigkeit, mit welcher Kohlensäure eine Seifenlamelle durchdringt.

IV. Versuche mit Luft und Schwefelwasserstoff.

Da Schwefelwasserstoff die Seifenlösung in noch höherem Grade zersetzt als die Kohlensäure, so musste auch hier an Stelle der ursprünglichen Methode das bei den Versuchen mit Kohlensäure angewendete Verfahren mit Blasen eingeschlagen werden. Es stellte sich dabei für Schwefelwasserstoff eine noch viel grössere Diffusionsgeschwindigkeit heraus als für Kohlensäure, in Folge dessen sich auch die Beobachtungen auf die Ablesung der ursprünglichen und schliesslichen Grösse der Blasen beschränken mussten; in der folgenden Tabelle sind die Resultate von 12 Versuchen mitgetheilt.

Ursprüngliche Grösse in Millim. d. Durchmessers	Schliessliche Grösse in Millim. d. Durchmessers	α
15	2·8	154
16	3·0	152
20	3·5	186
20	3·5	186
12	2·2	157
20	3·5	186
21	3·8	168
20	3·8	146
15	2·8	154
15	2·8	154
14	2·6	153
16	2·8	186

Das Mittel aus diesen 12 Versuchen ergibt für α den Werth 165; es würden sich somit während des Diffusionsprocesses gegen 1 Volumen Luft 165 Volumina Schwefelwasserstoff austauschen; dass die Resultate nicht besser unter einander stimmen, rührt daher, dass schon ein sehr geringer Beobachtungsfehler, und solche sind unvermeidlich, eine bedeutende Änderung im Werthe für α bewirkt. Die Temperatur, bei welcher die vorliegenden Versuche ausgeführt wurden, betrug 16°; der bei denselben verwendete Schwefelwasserstoff wurde aus reinem

Schwefelantimon und Salzsäure dargestellt. Entwickelt man ihn aus Schwefeleisen an Stelle des Schwefelantimons, so erhält man immer nebst dem Schwefelwasserstoff noch unbestimmte Quantitäten von Wasserstoff, welche dann den Versuch beeinträchtigen und einen viel zu kleinen Werth für α ergeben, indem der Wasserstoff um so viel langsamer die Lamelle durchdringt, als der Schwefelwasserstoff.

V. Versuche mit Luft und Ammoniak.

Macht man die Versuche mit Ammoniak im Diffusionsrohr, so zerreisst die Seifenlamelle sofort, indem sie sich momentan aufbläht. Aus dem ganzem Hergange erkennt man leicht, dass der Grund hievon in einer ganz plötzlichen Drucksteigerung innerhalb des durch die Lamelle abgeschlossenen Volumens liegt, der die Lamelle in ihrer Bewegung nicht rasch genug zu folgen im Stande ist; es musste daher auch hier das Verfahren mit den Blasen, wie bei Kohlensäure und Schwefelwasserstoff angewendet werden. Es zeigte sich, dass die Blasen mit ganz ausserordentlicher Geschwindigkeit sich verkleinerten und auf ein Minimum zusammenzogen, so dass der ganze Process kaum mehr als $\frac{1}{2}$—1 Secunde beanspruchte; es war in Folge dessen auch nicht möglich, viele Messungen anzustellen, nur in einzelnen Fällen konnten Messungen mit einiger Sicherheit gemacht werden. So ergab sich z. B. in mehreren aufeinanderfolgenden Versuchen übereinstimmend der Durchmesser der anfänglichen, also mit Ammoniak gefüllten Blase zu 18·0 Mm und der der schliesslichen, also mit Luft gefüllten, zu 0·5 Mm., was für die Verhältnisszahl α den ausserordentlich grossen Werth von 46000 ergeben würde.

Es liegt die Vermuthung nahe, dass dieses so rasche Zusammensinken einer mit Ammoniak gefüllten Blase seinen Grund darin hätte, dass das Ammoniak von der darunter befindlichen wässerigen Seifenlösung absorbirt würde; das ist aber keineswegs der Fall, denn es ändert sich der Hergang des Versuches durchaus nicht, wenn man die zu verwendende Seifenlösung vorerst vollständig mit Ammoniak sättigt; der Werth von α bleibt auch in diesem Falle derselbe. Man hat es hier somit wirklich mit einer derartig schnellen Durchdringung der Lamelle seitens

des Ammoniaks zu thun, dass sich gegen 1 Volumen einströmender Luft 46.000 Volumina Ammoniak umtauschen.

Die Versuche wurden bei einer Temperatur von 17° ausgeführt.

VI. Versuche mit Luft und Sauerstoff.

Der zur Diffusion verwendete Sauerstoff wurde auf die gewöhnliche Weise aus Chlorkali durch Glühen erzeugt; da derselbe verhältnissmässig langsam die Seifenlamelle durchdringt, so wurde zu diesen Versuchen wieder die ursprüngliche Methode mit dem Diffusionsrohr verwendet. Die Versuche verliefen im Allgemeinen mit derselben Regelmässigkeit wie die früheren, so dass es genügt, hier nur beispielsweise einen derselben in seinem ganzen Verlaufe mittzutheilen.

Das Diffusionsrohr war mit Luft gefüllt und Sauerstoff wurde gegen die Lamelle einströmen gelassen.

Stand d. Lamelle in Millimetern der Scala	Zeit in Minuten
19·3	0
22.0	2
24·5	3
28·0	$4^1/_2$
30·0	$5^1/_2$
32·0	7
35·0	9
36·0	10
37·0	$11^1/_2$
37.5	13
37·8	15
37·8	18

Für α ergibt sich hieraus der Werth 1·95.

Es wurden noch weitere 10 Versuche auf dieselbe Weise angestellt; dieselben ergaben für α die folgenden Werthe:

1·91	2·00	2·00
1·86	1·93	2·00
2·00	1·94	1·95
		1·94

Das Mittel aus diesen 11 Werthen ist 1·95, d. h. gegen 1 Volumen Luft tauschen sich 1·95 Volumina Sauerstoff bei der Diffusion aus. Die Temperatur während der Versuche betrug 15°.

VII. Versuche mit Luft und Stickstoff.

Der verwendete Stickstoff wurde aus atmosphärischer Luft gewonnen, indem derselben ihr Sauerstoffgehalt durch Phosphorverbrennung entzogen wurde. Er wurde zur Reinigung durch Waschflaschen mit Wasser geführt und man konnte ihn dann in beliebigen Quantitäten in das Diffusionsrohr einströmen lassen. Schon bei Vorversuchen zeigte sich evident, dass Stickstoff langsamer durch die Seifenlamelle diffundire als Luft, wie dies auch zu erwarten war, da Sauerstoff schneller diffundirt als dieselbe. Von allen bisherigen Versuchen ergaben die mit Stickstoff die unter einander am meisten übereinstimmenden Werthe; von den Versuchen, welche gleichfalls mit dem Diffusionsrohr ausgeführt wurden, möge hier wieder nur einer ausführlich mitgetheilt werden, indem sämmtliche andere auf ganz dieselbe Weise verliefen.

Das Diffusionsrohr war mit Luft gefüllt und es wurde der Stickstoff gegen die Lamelle einströmen gelassen.

Stand d. Lamelle in Millimeter der Scala	Zeit in Minuten
16·8	0
16·0	2
15·0	3
14·8	5
14·5	7
14·5	10

Hieraus ergibt sich $\alpha = 0{\cdot}86$. Weitere 15 Versuche ergaben die Werthe:

0·87	0·86	0·86
0·86	0·86	0·86
0·85	0·86	0·86
0·85	0·86	0·86
0·85	0·86	0·86

Das Mittel hiervon beträgt 0·86; somit tauschen sich gegen 1 Volumen Luft nur 0·86 Volumina Stickstoff aus, bei einer Temperatur von 15°, bei welcher die vorstehenden Versuche angestellt wurden.

Man kann aus den Versuchen mit Sauerstoff und Stickstoff schon eine Controle entnehmen über die Genauigkeit der Versuche überhaupt, denn da die atmosphärische Luft zu 4 Fünftheilen aus Stickstoff und 1 Fünftheil aus Sauerstoff zusammengesetzt ist, so lässt sich hieraus, wenn für eines der Gase die auf Luft bezogene Diffusionsconstante α bekannt ist, dieselbe auch für das andere Gas berechnen, oder man kann umgekehrt aus den für Sauerstoff und Stickstoff gefundenen Werthen für α den für atmosphärische Luft daraus zusammensetzen, welcher dann offenbar gleich 1 sein muss, da sich die Diffusionsconstanten ja auf Luft beziehen. Nun ist in Bezug auf Sauerstoff

$^1/_5\alpha = 0·390$ und in Bezug auf Stickstoff $^4/_5\alpha = 0·688$.

Das würde somit für Luft statt 1 den Werth 1·08 ergeben. Es ergibt dies einen Fehler von $8^0/_0$, der, wie sich später zeigen wird, seinen Grund darin hat, dass für Sauerstoff ein entschieden zu grosser Werth für α gefunden wurde, der sich aber trotz aller Vorsichtsmassregeln mit Constanz ergab. Es ist übrigens bei der Schwierigkeit und Umständlichkeit der Versuche, besonders mit rein darzustellenden Gasen, ein Fehler von $8^0/_0$ immerhin ein günstiges Resultat zu nennen.

VIII. Versuche mit Leuchtgas und Sauerstoff.

Um eine weitere Controle der vorangegangenen Resultate zu haben, welche sich sämmtlich auf Versuche mit zwei Gasen beziehen, von denen das eine Luft war, wurde nun direct Leuchtgas mit Sauerstoff zur Diffusion gebracht. Es wurde zu diesem Zwecke in das zuerst mit Luft gefüllte Diffusionsrohr eine Lamelle bis zu einem beliebigen Stande eingezogen und sodann das durch dieselbe abgeschlossene Volumen durch Diffusion

selbst vollständig mit Leuchtgas gefüllt. Die Lamelle stand jetzt bei 9·0 der Scala. Nun wurde, wie bei den früheren Versuchen, Sauerstoff in das Diffusionsrohr einströmen gelassen und sofort zeigte sich ein Zurückweichen der Lamelle, also eine Verkleinerung des abgeschlossenen Volumens, wie es auch zu erwarten war, da nach den vorangegangenen Versuchen Sauerstoff langsamer die Lamelle durchdringt als Leuchtgas. Die Lamelle zog sich auf diese Weise bis 7·5 der Scala zurück. Es ist somit der Diffusionscoëfficient von Sauerstoff in Leuchtgas

$$= \frac{7 \cdot 5}{9 \cdot 0} = 0 \cdot 83,$$

d. h. je 0·83 Volumina Sauerstoff tauschen sich gegen 1 Volumen Leuchtgas aus. Nun ergibt sich aber aus den früheren Versuchen unter I und VI der Diffusionscoëfficient von Sauerstoff gegen Luft zu 1·95 und der von Leuchtgas gegen Luft zu 2·27; berechnet man hieraus den Coëfficienten für Sauerstoff gegen Leuchtgas, so erhält man $\frac{1 \cdot 95}{2.27} = 0 \cdot 86$, was mit dem direct gefundenen Werthe 0·83 so gut stimmt, als man es nur erwarten kann.

IX. Versuche mit Leuchtgas und Wasserstoff.

Auf gleiche Weise wurden Controlversuche mit Leuchtgas und Wasserstoff angestellt. Nachdem wieder das abgeschlossene Volumen im Diffusionsrohr mit Leuchtgas gefüllt war, stand die Lamelle bei 9·0 der Scala; es wurde nun Wasserstoff einströmen gelassen und die Lamelle stieg und erreichte ihren stationären Stand erst bei 14·8. Hieraus ergibt sich der Diffusionscoëfficient für Wasserstoff gegen Leuchtgas zu $\frac{14 \cdot 8}{9 \cdot 0} = 1 \cdot 64$. Bei einem zweiten Versuche war der ursprüngliche Stand der Lamelle bei 15·0 und der schliessliche bei 24·0; daraus ergibt sich der Coëfficient zu 1·60, das Mittel aus beiden Versuchen also 1·62, oder es tauschen sich 1·62 Volumina Wasserstoff gegen 1 Volumen Leuchtgas aus. Nun ist aber zufolge der früheren Versuche unter I und II der Diffusionscoëfficient von Leuchtgas gegen Luft = 2·27 und der von Wasserstoff gegen Luft = 3·77; mithin berechnet sich der Coëfficient von Wasserstoff gegen

Leuchtgas aus diesen früheren Beobachtungen zu 1·65, was wiederum mit dem direct beobachteten Werthe in guter Übereinstimmung steht.

X. Versuche mit Stickstoff und Wasserstoft.

Es wurde schliesslich auch ein Versuch mit Stickstoff und Wasserstoff und zwar unter Anwendung grösstmöglicher Sorgfalt angestellt und dabei gleichzeitig auf den Gang der Lamelle Rücksicht genommen indem deren Stand zu möglichst vielen Zeiten während des Versuches notirt wurde.

In das ursprünglich mit Luft angefüllte Diffusionsrohr wurde eine Lamelle eingezogen; dieselbe stand bei 10·0 der Scala. Hierauf wurde in das Diffusionsrohr Stickstoff einströmen gelassen und die Bewegung der Lamelle beobachtet; es ergab sich Folgendes:

Differenz	Stand der Lamelle	Zeit in Minuten
0·7	10·0	0
0·3	9·3	1
0·2	9·0	2
0·1	8·8	3
0·1	8·7	4
0·1	8·6	5
0·0	8·5	6
0·0	8·5	7
	8·5	8

Hieraus ergibt sich das Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten von Stickstoff und Luft zu 0·85, was mit dem früher gefundenen Werthe 0·86 fastg enau übereinstimmt. Nachdem so das abgeschlossene Volumen des Diffusionsrohres vollständig mit Luft gefüllt war, wurde Wasserstoff dagegen einströmen gelassen und die Bewegung der Lamelle abermals beobachtet; es ergaben sich die folgenden Zahlen:

Differenz	Stand der Lamelle	Zeit in Minuten
5·5	8·5	0
4·0	14·0	1/4
3·0	18·0	1/2
3·0	21·0	3/4
3·0	24·0	1
2·0	27 0	1 1/2
1·0	29·0	2
1·0	30·0	2 1/2
1·0	31·0	3
1·0	32·0	3 1/2
0·6	33·0	4
0·4	33·6	4 1/2
0·3	34·0	5
0·3	34·3	5 1/2
0·2	34·6	6
0·1	34·8	7
0·1	34·9	8
0·0	35·0	9
0·0	35·0	10
	35·0	11

Man sieht aus diesen Zahlen den regelmässigen Gang der Lamelle. Das Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten von Wasserstoff und Stickstoff ergibt sich hieraus zu $\frac{35\cdot0}{8\cdot5} = 4\cdot12$; berechnet man dasselbe aus den früher unter II und VII gefundenen auf Luft bezogenen Coëfficienten für Wasserstoff und Stickstoff, nämlich 3·77 und 0·86, so ergibt sich dasselbe zu 4·38, was von dem durch vorstehenden Versuch direct gelieferten Werthe nicht erheblich abweicht.

Schliesslich ergiebt dieser Versuch auch noch einen Werth für das Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten von Wasserstoff und Luft; da nämlich das ursprüngliche Volumen im Diffusionsrohre — noch vor der Füllung mit Stickstoff — 10·0 war, und das schliessliche mit Wasserstoff gefüllte 35·0, so ergibt sich daraus α für Wasserstoff bezogen auf Luft zu 3·50; das Mittel

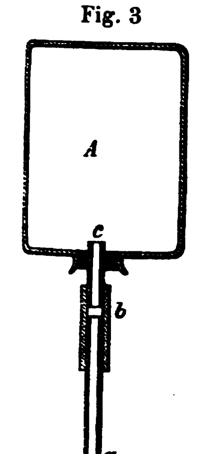
aus den unter II mitgetheilten Versuchen mit Wasserstoff und Luft betrug 3·77.

XI. Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher Gase die Lamelle durchdringen.

Die sämmtlichen bisher mitgetheilten Versuche konnten nur darauf abzielen, das Verhältniss zu bestimmen, in welchem die Geschwindigkeiten zweier durch eine Seifenlamelle diffundirender Gase zu einander stünden. Es ist aber auch von Interesse, zu fragen, wie gross an und für sich die Geschwindigkeit dieser Bewegung sei? Unter Zugrundelegung der in den vorangegangenen Versuchen ermittelten Coëfficienten α und mit Zuhilfenahme einiger weiterer Versuche fällt es nicht schwer, diese Frage zu beantworten.

Denken wir uns das *Diffusionsrohr* an dem einen Ende nicht geschlossen, sondern in Verbindung gesetzt mit einem grossen, übrigens auch abgeschlossenen Volumen, in der Weise wie es Figur 3 zeigt; *a* ist das Diffusionsrohr, welches mittelst des Kautschukverbindungsstückes *b* an das mit der Flasche *A* fest verbundene Glasansatzstück *c* befestigt werden kann. Soll der Apparat zu einem Versuche verwendet werden, was, wie früher bei dem Diffusionsrohre, allein in verticaler Stellung geschieht, so wird das Diffusionsrohr *a* mit *b* abgenommen, eine Seifenlamelle in dasselbe eingezogen und auf einen passenden Stand gebracht und sodann *a* mit *b* wieder an *c* luftdicht angesetzt; im Übrigen wird das zu untersuchende Gas wie früher von unten in das Diffusionsrohr einströmen gelassen. Oberhalb der Lamelle und im ganzen Volumen *A* befindet sich Luft von der Temperatur der Umgebung. Während bei den früheren Versuchen, wo das ursprünglich abgeschlossene Volumen Luft nur ein sehr kleines war, die Bewegung der Lamelle anfänglich eine sehr rasche war, sich aber in dem Maasse verlangsamte, als sich die Verschiedenheit der ober- und unterhalb der Lamelle befindlichen Gase verringerte und schliesslich gleich Null wurde,

Fig. 3



sobald Gleichheit eintrat, wird bei der gegenwärtigen Anordnung des Versuches diese Bewegung wenigstens eine geraume Zeit hindurch eine constante sein und erst sehr allmälig sich verlangsamen. Denn ist das Luftvolumen in A sehr gross im Verhältniss zu dem durch die Diffusion eintretenden Volumen des anderen Gases, so wird auch das in A befindliche Gasgemisch, selbst nachdem der Versuch schon einige Zeit gedauert, sich noch wenig von Luft unterscheiden und es wird möglich sein, eine Reihe mit der Zeit gleichmässig fortschreitender Stände der Lamelle zu notiren; der Versuch hört natürlich auf, sobald sich eine Verlangsamung in der Bewegung der Lamelle bemerkbar macht.

Man muss bei dem so eingerichteten Apparate natürlich darauf achten, dass während des Versuches die in demselben eingeschlossene Luft keinen Temperaturschwankungen unterliegt, weil sonst die beobachteten Stände der Lamelle untereinander nicht mehr vergleichbar wären. Bei der kurzen Dauer der Versuche unterliegt dies jedoch keinerlei Schwierigkeiten. Ebenso empfindlich ist der Apparat gegen plötzliche Änderungen des Luftdruckes; so erkennt man z. B. das Öffnen und Schliessen der Zimmerthüre sofort an einer starken Schwankung in der Bewegung der Lamelle, und es müssen deshalb alle derartigen Störungen während eines Versuches vermieden werden.

Aus der Beobachtung der gleichmässig fortschreitenden Bewegung der Lamelle lässt sich aber auf die Geschwindigkeit schliessen, mit welcher die beiden Gase diffundiren. Denn ist das Diffusionsrohr cubicirt und v das Volumen, um welches sich die Lamelle in einer Minute verschiebt, so ist $v = V - V'$, wenn wir mit V und V' die Volumina bezeichnen, welche von den beiden Gasen in einer Minute die Lamelle durchdringen. Aus den früheren Versuchen ist ferner das Verhältniss $\frac{V}{V'}$ bekannt für die verschiedenen Gase und mit α bezeichnet worden. Aus den beiden Gleichungen

$$v = V - V'$$

und

$$\frac{V}{V'} = \alpha$$

erhält man

$$V = \frac{\alpha v}{\alpha - 1}$$

und

$$V' = \frac{v}{\alpha - 1},$$

somit direct die Quantitäten, die in einer Minute durch die Lamelle gingen.

Die bei den nachfolgenden Versuchen zur Herstellung des Volumens A verwendete Flasche fasste ungefähr vier Liter, das Diffusionsrohr hatte eine Länge von 180 Mm. und mass im lichten Durchmesser überall 10·5 Mm., die Basis somit 86·5□Mm.

Es wurde zunächst ein Versuch mit Leuchtgas angestellt; derselbe ergab:

Differenz	Stand der Lamelle	Zeit in Minuten
8·0	149·0	0
9·0	141·0	1
8·0	132·0	2
8·0	124·0	3
8·0	116·0	4
8·0	108·0	5
	100·0	6

Mittel 8·17.

Von da ab sank die Bewegung der Lamelle auf 7·5 und später auf 7·0 in der Minute. Für diesen Versuch ist somit

$$v = 8{\cdot}17 . 86{\cdot}5 \text{ CMm.} = 706{\cdot}7 \text{ CMm.}$$

Bezeichnen wir mit V das in einer Minute diffundirte Volumen Leuchtgas und mit V' das demselben entsprechende Volumen Luft, so ist

$$V - V' = 706{\cdot}7 \text{ CMm},$$

da die Bewegung der Lamelle in dem Sinne einer Vergrösserung des Volumens A vor sich ging. Aus den Versuchen unter I ist ferner bekannt, dass $\frac{V}{V'} = \alpha = 2{\cdot}27$. Hieraus ergibt sich

$$V = 1{\cdot}263 \text{ Cc.}$$

und

$$V' = 0{\cdot}556 \text{ Cc.}$$

Um ein wirkliches Maass der Geschwindigkeit zu bekommen, müssen wir diese Zahlen jetzt noch auf eine Diffusionsfläche von 1□C. beziehen; wenn wir diese so bezogene Volumina respective mit φ und φ' bezeichnen, so erhalten wir $\varphi = 1{\cdot}46$ Cc. und $\varphi' = 0{\cdot}64$ Cc. Bei der Diffusion von Leuchtgas gegen Luft durchdringen somit in einer Minute 1·46 Cc. Leuchtgas und 0·64 Cc. Luft den Quadrat-Centimeter der Lamelle.

Ausser diesem Versuche mit Leuchtgas wurden zu demselben Zwecke zwei weitere Versuche mit Wasserstoff angestellt; der Apparat war ganz in derselben Weise zusammengestellt und gebraucht wie im Vorhergehenden, nur dass jetzt Wasserstoff an Stelle des Leuchtgases in das Diffusionsrohr einströmen gelassen wurde. Die Bewegung der Lamelle war folgende:

Differenz	Stand der Lamelle	Zeit in Minuten
13·0	139	0
14·0	126	1
15·0	112	2
15·0	97	3
13·0	82	4
14·0	69	5
14·0	55	6
	41	7

Dies gibt eine mittlere Bewegung der Lamelle um 14·0 Mm. in der Minute. Ein zweiter Versuch ergab folgende Werthe:

Differenz	Stand der Lamelle	Zeit in Minuten
13·0	149	0
14·0	136	1
15·0	122	2
14·0	107	3
14·0	93	4
13·0	79	5

Differenz	Stand der Lamelle	Zeit in Minuten
13·0	66	6
14·0	53	7
13·0	39	8
13·0	26	9
	13	10

Das ist 13·6 in der Minute, oder im Mittel aus beiden Versuchen 13·8. Für Leuchtgas hatte sich im vorhergehenden Versuche hierfür die Zahl 8·17 ergeben; daraus resultirt als Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten von Wasserstoff und Leuchtgas gegen Luft $\frac{13 \cdot 80}{8 \cdot 17} = 1 \cdot 68$, während auf ganz anderem Wege früher unter IX hierfür 1·62 und bei den ursprünglichen Versuchen unter I und II 1·65 gefunden wurde, alles Werthe, welche, soweit man es bei derartigen Versuchen nur verlangen kann, miteinander in Übereinstimmung stehen.

Um nun aus dem vorliegenden Versuche die absolute Geschwindigkeit des diffundirenden Wasserstoffes zu finden, hat man auf ganz dieselbe Art zu verfahren, wie früher bei dem Versuche mit Leuchtgas. Unter Beibehaltung derselben Bezeichnung erhalten wir hier

$$v = 13{\cdot}8 \,.\, 86{\cdot}5 \text{ CMm.} = 1193{\cdot}7 \text{ CMm.}$$

Bezeichnen wir wieder mit V das in einer Minute diffundirte Wasserstoffvolumen und mit V' das gleichzeitig dagegen ausgetauschte Luftvolumen, so ist

$$v = V - V' = 1193{\cdot}7 \text{ CMm.},$$

da auch hier die Bewegung der Lamelle im Sinne einer Vergrösserung des abgeschlossenen Volumens stattfand. Es ist ferner nach den Versuchen unter II das Verhältniss

$$\frac{V}{V'} = \alpha = 3{\cdot}77;$$

aus diesen beiden Gleichungen berechnet sich

$$V = 1{\cdot}625 \text{ Cc. und } V' = 0{\cdot}431 \text{ Cc.}$$

Beziehen wir diese Werthe nun wieder auf eine Diffusionsfläche von 1 Quadrat-Centimeter und bezeichnen dieselben wie früher mit φ und φ', so erhalten wir

$$\varphi = 1{\cdot}88 \text{ Cc. und } \varphi' = 0{\cdot}50 \text{ Cc.}$$

Es durchdringen somit bei der Diffusion von Wasserstoff gegen Luft in einer Minute 1·88 Cc. Wasserstoff und 0·50 Cc. Luft gleichzeitig den Quadrat-Centimeter der Lamelle.

Es wäre von Interesse gewesen, die sehr rasch diffundirenden Gase, wie Kohlensäure, Schwefelwasserstoff und Ammoniak, in Bezug auf die absolute Geschwindigkeit bei der Diffusion zu untersuchen, allein es musste dies aus denselben Gründen unterbleiben, aus denen im früheren bei der Untersuchung dieser Gase von der Methode mit dem Diffusionsrohr abgewichen werden musste.

§. 3.

Es soll nun der Versuch gemacht werden, die durch die vorstehenden Versuche constatirten Thatsachen zu erklären oder doch wenigstens unter einen gemeinschaftlichen Gesichtspunkt zusammenzufassen.

Es genügt ein Blick auf die Resultate des vorhergehenden Paragraphs, um zu sehen, dass die Diffusion durch Flüssigkeitslamellen ein von der Diffusion durch feste, poröse Körper vollkommen verschiedener Vorgang ist; bei letzterer ist bekanntlich das specifische Gewicht der Gase das entscheidende Moment, ohne dass sich, wie Bunsen[1] gezeigt hat, eine Wechselwirkung zwischen Gas und diffundirter Wand nachweisen liesse. Dagegen lassen die vorstehenden Versuche durchaus keinen einfachen Zusammenhang zwischen Diffusionsgeschwindigkeit und Dichte des Gases erkennen; auch zeigt sich die Diffusionsgeschwindigkeit bei den verschiedenen Gasen in so ausserordentlich weiten Grenzen variabel, dass es keinem Zweifel unterliegt, man habe es hier mit Erscheinungen zu thun, die in erster Linie von specifischen Wechselwirkungen zwischen Gas und diffundirter Flüssigkeit bedingt seien. Es liegt nahe, zu-

[1] Gas. Methoden.

nächst an Absorptionserscheinungen zu denken, und es ergibt sich hier allerdings ein directer Zusammenhang zwischen Diffusionsgeschwindigkeit und Absorptionscoëfficienten eines Gases, welcher, wenn auch nicht quantitativ, so doch qualitativ die Erscheinungen erklärt. Ich will zur besseren Veranschaulichung in der nachfolgenden Tabelle nochmals die Diffusionsgeschwindigkeiten der verschiedenen Gase — die der Luft gleich 1 gesetzt — also die früher mit α bezeichneten Werthe mittheilen und gleichzeitig die Absorptionscoëfficienten derselben für Wasser beisetzen; da die bei den Versuchen verwendete wässerige Seifenlösung nur in ausserordentlich verdüntem Zustande benutzt wurde, so scheint es mir gestattet, für dieselbe auch direct die Absorptionscoëfficienten des Wassers anzuwenden.

Tabelle I.

Gas	α	Apsorpt.-Coëff. C
N	0·86	0·015
Luft	1	0·017
O	1·95	0·030
Leuchtgas	2·27	0·025
H	3·77	0·019
CO_2	47·1	1·002
H_2S	165	3.165
NH_3	46000	700

Unter Absorptionscoëfficienten ist hier die Anzahl Gasvolumina zu verstehen, welche 1 Volumen Wasser absorbirt; dieselben sind sämmtlich, mit Ausnahme des Coëfficienten für Leuchtgas, der von Bunsen in seinen gasometrischen Methoden mitgetheilten Tabelle entnommen. Der Coëfficient für Leuchtgas wurde speciell zum vorliegenden Zwecke bestimmt; 6 Versuche ergaben die folgenden Werthe:

0·025	0·022
0·023	0·027
0·026	0·026

Im Mittel also 0·025.

Es lässt die vorstehende Tabelle einen Zusammenhang zwischen Diffusionsgeschwindigkeit und Absorptionscoëfficienten im Grossen und Ganzen nicht verkennen, allein sie zeigt zugleich, dass durchaus keine Proportionalität besteht. Wasserstoff, der einen kleineren Absorptionscoëfficienten besitzt als Sauerstoff und Leuchtgas, zeigt nichtsdestoweniger eine beträchtlich grössere Diffusionsgeschwindigkeit als diese beiden, und dass gerade bei Wasserstoff, der auch in Bezug auf seine Dichte so beträchtlich von den übrigen Gasen abweicht, diese Unregelmässigkeit auftritt, liess vermuthen, dass man es hier ausser mit Absorption auch noch mit Diffusion in der Art wie bei festen Körpern zu thun habe.

Diese Vermuthung zeigte sich auch vollkommen bestätigt. Nimmt man an, dass die Überführung der beiden Gase einestheils durch eine Absorption seitens der Lamelle und Wiederabgabe bewirkt werde, anderentheils aber durch eine Diffusion der Gase durch die Lamelle als eine poröse Scheidewand von ausserordentlich geringer Dicke, so muss sich die Diffusionsgeschwindigkeit eines Gases proportional ergeben dem Ausdrucke $\frac{C}{\sqrt{\delta}}$, wo C der Absorptionscoëfficient und δ die Dichte des betreffenden Gases ist.

Es hat sich nun gezeigt, dass sich die erhaltenen Resultate, trotz der sehr weiten Grenzen ihrer Werthe, vollkommen dieser Formel anpassen und die nachfolgende Tabelle zeigt die Übereinstimmung zwischen den nach dieser Formel berechneten Werthen von α für die verschiedenen Gase und den beobachteten. Es ist hier wieder α das Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeit eines Gases zu der von Luft, oder die Diffusionsgeschwindigkeit der Luft $= 1$ gesetzt, direct die Diffusionsgeschwindigkeit des betreffenden Gases.

Tabelle II.

Gas	Apsorpt.-Coëff. C	Dichte δ	$\frac{C}{\sqrt{\delta}}$	α beobacht.	α berechn.
N........	0·015	0·97	0·0153	0·86	0.85
Luft......	0·017	1·00	0·017	—	1·00
O........	0.030	1·106	0·0285	1·95	1·60
Leuchtgas.	0·025	0·480	0·036	2·27	2·12
H........	0·019	0·070	0·072	3·77	3·89
CO_2......	1·002	1·52	0·812	47·1	45·1
H_2S......	3·165	1·17	2·94	165	163·3
NH_3......	700	0·59	903·0	46000	54450

Da die Absorptionscoëfficienten sich bei manchen Gasen nicht unbeträchtlich mit der Temperatur ändern, wie aus der Bunsen'schen Tabelle ersichtlich ist, so wurden bei Berechnung der vorstehenden Werthe natürlich stets die der Temperatur des Versuches entsprechenden Coëfficienten verwendet. Was die Bestimmung der Dichte des Leuchtgases anlangt, so wurde dieselbe durch die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit ausgeführt. Es wurde die halbe Wellenlänge eines bestimmten Tones in Leuchtgas bei 9 Versuchen gefunden:

9·83	9·91	9·80
9·83	9·95	9·80
9·85	9·70	9·95

Im Mittel = 9·847 Centimeter.

Die halbe Wellenlänge desselben Tones in Luft bei gleicher Temperatur ergab sich zu

6·83	6·85
6·83	6·80
6·83	6·81

Im Mittel 6·825 Centimeter.

Hieraus ergibt sich die in der Tabelle aufgeführte Dichte des Leuchtgases zu 0·480.

Die berechneten und beobachteten Werthe von α in der Tabelle stimmen so weit überein, dass man die früher gemachte Voraussetzung, die Diffusionsgeschwindigkeit sei für alle untersuchten Gase proportional dem Ausdrucke $\frac{C}{\sqrt{\delta}}$ wohl als gerechtfertigt ansehen darf; daraus geht aber hervor, dass man eine Seifenlamelle in der That als eine poröse Wand von so geringer Dicke betrachten muss, dass ihre Poren als Löcher in unendlich dünner Wand wirken, und nicht als Canäle wie bei allen festen porösen Körpern, für welch' letztere, wie Bunsen[1] nachgewiesen hat, die Relation, dass die Diffusionsgeschwindigkeiten sich umgekehrt verhalten wie die Quadratwurzeln aus den Dichten der Gase, keine Giltigkeit mehr hat.

Am schlechtesten von allen Beobachtungen stimmen die Werthe von Sauerstoff mit den gerechneten, allein trotz wiederholter sorgfältiger Versuche konnte der Grund hiervon nicht ermittelt werden. Dass der Mittelwerth aus den Beobachtungen mit Schwefelwasserstoff so gut mit dem gerechneten Werthe übereinstimmt, ist natürlich nur Zufälligkeit, denn es variiren die einzelnen beobachteten Werthe von Schwefelwasserstoff von 146 bis 186; allein immerhin ist die Übereinstimmung nicht zu verkennen.

Wenn die gemachte Voraussetzung über den Zusammenhang zwischen Diffusionsgeschwindigkeit und Absorptionscoëfficienten durch die bisher mitgetheilten Versuche in der Weise bestätigt wurde, dass für eine Reihe von Gasen ihr diesbezügliches Verhalten gegen eine und dieselbe absorbirende Flüssigkeit, nämlich wässerige Seifenlösung, constatirt wurde, so kann man andererseits den Beweis auch in umgekehrter Richtung antreten und das Verhalten der Gase gegen verschiedene absorbirende Flüssigkeitslamellen untersuchen. Allein es ist mir wenigstens bisher nicht gelungen, anderweitige Flüssigkeiten ausfindig zu machen, aus welchen sich Lamellen von so grosser Dauerhaftigkeit erzeugen liessen, wie sie zu diesen Versuchen vonnöthen ist; es musste sich daher in dieser Richtung die Untersuchung darauf beschränken, zu der wässerigen Seifen-

[1] Gas. Methoden.

lösung, Flüssigkeiten von anderen Absorptionseigenschaften beizusetzen, welche doch nichts an der Zähigkeit der Lamelle ändern durften. Hierzu schien mir absoluter Alcohol besonders geeignet; denn einestheils verlieren die Lamellen nichts an ihrer Haltbarkeit, selbst wenn die Lösung bis zu $^1/_8$ aus absolutem Alcohol besteht, und anderentheils sind für letzteren die Absorptionscoëfficienten bezüglich der bei den früheren Versuchen verwendeten Gase von Bunsen[1] sehr genau bestimmt.

Die von mir verwendete Mischung bestand aus 7 Volumtheilen der früheren Seifenlösung auf 1 Volumen absoluten Alcohols, und als diffundirende Gase wurden Luft und Wasserstoff verwendet. Im Übrigen waren die Versuche ganz so wie die früheren, indem das gewöhnliche Diffusionsrohr benützt wurde, und der Wasserstoff in dasselbe gegen die Lamelle einströmen gelassen wurde.

Bei einem Vorversuche stand die Lamelle ursprünglich bei 10·0 der Scala und nach beendetem Diffusionsprocess auf 27·0; bezeichnen wir wieder dem früheren entsprechend das Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten von Wasserstoff und Luft mit α, so würde dieser Versuch $\alpha = 2{\cdot}70$ ergeben.

Ein anderer Versuch ergab:

Stand der Lamelle	Zeit in Minuten
6·0	0
9·0	2
12·0	4
14·5	6
16·5	8
17·0	$9^1/_2$
17·0	11

Dies gibt $\alpha = 2{\cdot}83$ und ein dritter Versuch:

---

[1] Gas. Methoden.

Stand der Lamelle	Zeit in Minuten
4·2	0
6·0	2
9·0	6
10·5	8
11·0	9
11·3	11
11·5	11½
11·5	14

Daraus $\alpha = 2{\cdot}73$.

Das Mittel aus diesen 3 Versuchen ergibt $\alpha = 2{\cdot}75$, also einen bedeutend kleineren Werth als früher bei reiner Seifenlösung, wo für α der Werth 3·77 gefunden wurde[1].

Wenn wir nun sehen wollen, wie dieser beobachtete Werth mit der Theorie stimmt, so müssen wir das α wieder in ganz derselben Weise berechnen, wie es für die Tabelle II geschehen war. Zu diesem Zwecke müssen wir aber erst den Absorptionscoëfficienten der Mischung für Wasserstoff und Luft aus den Absorptionscoëfficienten ihrer Bestandtheile bestimmen.

Bezeichnen wir mit C_m den Absorptionscoëfficienten der Mischung und mit V_w das Volumen Wasser, mit V_a das Volumen Alkohol und dem entsprechend mit C_w und C_a die Absorptionscoëfficienten von Wasser und Alcohol, so hat man allgemein

$$C_m = \frac{V_w \,.\, C_w + V_a \,.\, C_a}{V_w + V_a}$$

Bei der angewendeten Mischung war

$$\frac{V_w}{V_a} = 7$$

[1] Es wurde schon früher bei Gelegenheit der Versuche mit Leuchtgas erwähnt, dass ein Zusatz von Glycerin zur Seifenlösung die Haltbarkeit der Lamelle erhöht, ohne eine Änderung im Werthe des α zu bewirken, es haben nachträgliche Absorptionsversuche mit Glycerin und Leuchtgas ergeben, dass reines Glycerin durchaus nichts Merkliches von Leuchtgas absorbirt; es erklärt sich somit auch die Constanz der gefundenen Werthe bei Versuchen mit und ohne Zusatz von Glycerin.

Bezeichnen wir ferner den Absorptionscoëfficienten der Mischung für Luft mit C_m^L, den des Wassers für Luft mit C_w^L und den des Alcohols mit C_a^L so erhalten wir

$$C_m^L = \frac{7 \cdot C_w^L + C_a^L}{8}$$

Es ist aber $C_w^L = 0{\cdot}018$.

Da C_a^L nicht direct bestimmt ist, so muss man es aus den beiden von Bunsen bestimmten Absorptionscoëfficienten des Alcohols für Stickstoff und Sauerstoff berechnen. Bezeichnet man diese beiden mit C_a^N und C_a^O, so hat man

$$C_a^L = \frac{4}{5} \cdot C_a^N + \frac{1}{5} \cdot C_a^O$$

Es ist aber nach Bunsen

$$C_a^N = 0 \cdot 1214 \text{ und } C_a^O = 0 \cdot 2840,$$

somit

$$C_a^L = 0 \cdot 154.$$

Aus den Werthen für C_a^L und C_w^L und der Gleichung für C_m^L ergibt sich ferner

$$C_m^L = 0 \cdot 0350.$$

In derselben Weise muss nun in Bezug auf Wasserstoff verfahren werden, um den Werth von C_m^H zu bestimmen. Es ist wieder

$$C_m^H = \frac{7 \cdot C_w^H + C_a^H}{8}$$

Nach Bunsen ist aber

$$C_w^H = 0 \cdot 0193 \text{ und } C_a^H = 0 \cdot 0675.$$

Daraus berechnet sich

$$C_m^{II} = 0 \cdot 0253$$

Wenn wir nun wie bei der Berechnung der Tabelle II weiter verfahren und die Werthe von $\frac{C}{\sqrt{\delta}}$ bilden, denen proportional eben die Diffusionsgeschwindigkeiten sein sollen, so erhalten wir für Luft

$$\frac{C}{\sqrt{\delta}} = 0 \cdot 0350$$

und für Wasserstoff

$$\frac{C}{\sqrt{\delta}} = \frac{0 \cdot 0253}{0 \cdot 265} = 0 \cdot 0954$$

und aus diesen beiden Werthen den schliesslichen Quotienten α, welcher das Verhältniss der Diffusionsgeschwindigkeiten gibt, = 2·73, während die Beobachtung hierfür 2·75 ergeben hat.

Man sieht also, dass auch nach dieser zweiten Methode, wenngleich nur wenige Beobachtungen vorliegen, eine vollkommene Übereinstimmung zwischen der Beobachtung und der gemachten Voraussetzung besteht, dass die Diffusionsgeschwindigkeiten der Gase proportional seien dem Ausdrucke $\frac{C}{\sqrt{\delta}}$.

Es erklären sich somit die Diffusionserscheinungen der Gase bei einer flüssigen Scheidewand aus einer doppelten Ursache: erstens findet eine Aufnahme und Wiederabgabe der Gase von Seiten der Lamelle statt, deren Beträchtlichkeit sich nach den respectiven Absorptionscoëfficienten richtet, und zweitens tritt ein Gasaustausch durch die Flüssigkeitswand ein, wie ein solcher von der Theorie für eine poröse Scheidewand von unendlich geringer Dicke gefordert wird, bei dem sich nämlich die ausgetauschten Quantitäten umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Dichten der beiden Gase verhalten. Diese beiden Ursachen scheinen die Erscheinungen beim Durchgang der Gase durch Flüssigkeitslamellen gleichzeitig zu bedingen.

Ich will schliesslich noch auf eine Ähnlichkeit aufmerksam machen, welche mir zwischen den vorliegenden Versuchen und den von Graham beobachteten Erscheinungen in Bezug auf die

Absorption und den Durchgang des Wasserstoffs durch Platin, Palladium und Eisen zu bestehen scheint. Graham[1] hat nämlich nachgewiesen, dass diese Metalle bei gewöhnlicher Temperatur weder Wasserstoff absorbiren (wenn nicht im status nascendi) noch für denselben durchgänglich sind, dass diese beiden Erscheinungen aber in der Glühhitze auftreten; es scheint also auch hier ein ähnlicher Zusammenhang zwischen Absorption und Diffusion zu bestehen wie bei den Flüssigkeiten. Noch mehr spricht hierfür das folgende Experiment Graham's. Er leitete durch eine glühende Palladiumröhre ein Gemisch von gleichen Theilen Kohlensäure und Wasserstoff; während von Wasserstoff, der bekanntlich von Palladium in ausserordentlichen Mengen absorbirt wird, in einer Minute 1017·5 Cc. den Quadratmeter der Röhrenwand durchdrangen, diffundirte von Kohlensäure, die von Palladium auch nicht absorbirt wird, gar keine noch nachweisbare Quantität. Es ist also kaum ein Zweifel, dass auch hier ein inniger Zusammenhang zwischen Absorption und Diffusion besteht.

---

[1] Pogg. Ann. CXXXIV.

XXV. SITZUNG VOM 12. NOVEMBER 1874.

Herr Custos Th. Fuchs erstattet einen kurzen Bericht über seine mit Subvention der Akademie vorgenommene Untersuchung der jüngeren Tertiärbildungen an der Ostküste Italiens, und erbietet sich, der Akademie auch für die weitere Ausführung des begonnenen Unternehmens seine Kräfte zu widmen.

Herr Ludwig Birkenmajer in Lemberg übersendet eine Abhandlung: „Zur Theorie der Gase".

Herr Schiffslieutenant K. Weyprecht übermittelt die im Laufe der österr.-ungar. Polarexpedition mit dem Schleppnetze gesammelten Grundproben und Thiere mit dem Ersuchen, dieselben zur weiteren Bearbeitung an die speciellen Fachmänner zu vertheilen.

Herr Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung: „Über die Ausdehnung der festen Körper mit steigenden Temperaturen", vom Herrn Dr. Al. Handl, Professor an der Militär-Akademie zu Wiener Neustadt.

Herr Prof. Dr. S. L. Schenk legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Die Spermatozoën von *Murex brandaris*".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Tomo X. Entrega 118; Tomo XI, Entrega 119. Habana, 1874; 8°.

Anstalt, Kgl. ungar. geologische: Évkönyve. III. kötet, 1 füzet. Pest, 1874; 4°. — Mittheilungen. III. Band, 1. Heft. Pest, 1874; 4°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 30—32. Wien, 1874; 8°.

Beobachtungen, Schweizer Meteorologische. April — September 1873. Zürich; 4°.

Beobachtungen, magnetische und meteorologische, an der k. k. Sternwarte zu Prag, im Jahre 1873. Prag, 1874; 4°.

Breslau, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1873/4. 4° & 8°.

Comitato, R., Geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1874, Nr. 3 bis 6. Roma, 1874; gr. 8°.

Essex Institute: Bulletin. Vol. V. 1873. Salem, Mass., 1874; 8°.

Geological and Geographical Survey of the Territories, U. St.: Miscellaneous Publications. Nr. 4. Washington, 1874; 8°.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 21. Wien, 1874; 4°.

— k. ungar., naturwissenschaftliche: Közlöny. V. kötet, 41.—52. füzet. Buda-Pest, 1873; 4°. — A fajok eredete a természeti kiválás utján etc. irta Charles Darwin. I.—II. kötet. Budapest, 1874; 8°. — Elöadások az elemi élettan Köréből. Irta Th. H. Huxley, Budapest, 1873; 8°. — A hö mint a mozgás egyik neme. Irta John Tyndall. Budapest, 1874; 8°. — A jelen geologiája. Irta Bernhard von Cotta. Budapest, 1873; 8°. — Die Eishöhle von Dobschau. Von Jos. Alex. Krenner. Budapest, 1874; 4°. — Die Ebbe und Fluth in der Rhede von Fiume. Von E. Stahlberger. Budapest, 1874; 4°.

Instituut, koninkl. Nederlandsch meteorologisch: Jaarboek vor 1873. I. Deel. Utrecht, 1873; 4°.

Karpathen-Verein, Ungar.: Jahrbuch. I. Jahrgang. 1874. Kassa; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1874, Nr. 13—15. Wien; 4°.

Lotos. XXIV. Jahrgang. Juli 1874. Prag; 8°.

Lund, Universität: Acta. Philosophi, Språkvetenskap och Historia. 1871; Tom. IX. 1872; Theologi. 1871; Mathematik och Naturvetenskap. 1871; Tome IX. 1872. Lund 1871—1872; 4°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administrat. Militär-Comité. Jahrgang 1874, 10. Heft. Wien; 8°.

Moniteur scientifique du D^teur^ Quesneville. 395e Livraison. Paris, 1874; 4°.

Museum Francisco-Carolinum: XXXII. Bericht. Linz, 1874; 8°.
— d'histoire naturelle de Paris: Nouvelles Archives. Tome VIIIe, 1er—4e fasc.; Tome IXe, 1er—4e fasc. Paris, 1872 & 1873; 4°.
Nature. Nr. 262, Vol. XI. London, 1874; 4°.
Naval Observatory, United States: Astronomical and Meteorological Observations made during the Year 1871. Washington, 1873; 4°.
Observatorium zu Tiflis: J. B. Biot's Tafeln zur Berechnung barometrischer Höhenmessungen. Neu berechnet und erweitert von H. Kiefer. Tiflis, 1874; 8°. — Inhaltsverzeichniss zum Bibliotheks-Katalog des Tiflis'schen Physikalischen Observatoriums nach dem Stande vom 1. Mai 1874. Von H. Kiefer. Tiflis, 1874; 8°.
Peabody Academy of Science: V^th Annual Report. Salem, 1873; 8°. — The American Naturalist. Vol. VI, Nr. 12 (1872); Vol. VII, Nrs. 1—12 (1873); Vol. VIII, Nr. 1 (1874.) Salem, Mass., 8°.
Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1874. XXIV. Band, Nr. 3. Wien; 4°. — Verhandlungen. Jahrgang 1874, Nr. 13. Wien; 4°.
Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXIV. Band. Jahrgang 1874, October-Heft. Wien; 8°.
„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger.“ IVe Année, 2e Série, Nr. 19. Paris, 1874; 4°.
Société Nationale des Sciences naturelles de Cherbourg: Mémoires. Tome XVIII (2e Série, Tome VIII). Paris & Cherbourg, 1874; 8°.
Verein, geognostisch-montanistischer, für Steiermark: Schluss-Bericht. Graz, 1874; 8°.
Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 45. Wien, 1874; 4°.

Über die Ausdehnung der festen Körper mit steigenden Temperaturen.

(Beiträge zur Moleculartheorie. IV.)

Von Dr. **Al. Handl,**
Professor an der k. k. Wiener-Neustädter Militär-Akademie.

Es ist meines Wissens noch nicht versucht worden, den Zusammenhang zwischen Volumen und Temperatur bei den festen Körpern aus dem Molecularverhalten in ähnlicher Weise zu erklären, wie diess für die gasförmigen Körper in der sogenannten dynamischen Theorie der Gase geschieht; denn die ganz allgemein gehaltene Bemerkung, dass die Molecüle bei grösserer Lebhaftigkeit ihrer Bewegungen auch weiter auseinander rücken müssen, ist denn doch nicht hinreichend klar, und lässt bei näherer Betrachtung noch allerlei Schwierigkeiten erkennen.

Ich habe in der vorliegenden Mittheilung den Grundgedanken zu entwickeln versucht, von welchem meiner Ansicht nach die gedachte Erklärung ausgehen müsste; dieselbe schliesst sich an meine früheren, im Mai und Juli 1872 der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorgelegten und in den Sitzungsberichten Bnd. LXV, pag. 377 und LXVI, pag. 136 veröffentlichten Bemühungen an, einfache und klare, wenigstens näherungsweise gültige Vorstellungen über das Verhalten der Molecüle in allen Aggregationsformen der Körper zu gewinnen. Die lange Pause zwischen den früheren Mittheilungen und der gegenwärtigen wurde durch Berufsgeschäfte und allerlei störende Verhältnisse verursacht.

Um die Vorstellungen auf die allereinfachste Form zu reduciren, werde ich zunächst nur zwei einzelne Molecüle der Untersuchung unterziehen, wie ich solches bereits in der Abhandlung über die Constitution der Flüssigkeiten (Sitzber. LXV, pag. 387) beispielsweise angedeutet habe; von den Bewegungen dieser

Molecüle werde ich nur die in die Verbindungslinie ihrer Massenmittelpunkte fallenden Componenten berücksichtigen, da diese hauptsächlich massgebend sein müssen; und endlich werde ich das eine dieser beiden Molecüle als ruhend voraussetzen, indem dem anderen die totale, relative Bewegung zugeschrieben wird, wodurch sich an den Resultaten offenbar nichts Wesentliches verändert.

In einem festen Körper muss man sich nun den Massenmittelpunkt des beweglichen Molecüles um eine gewisse Gleichgewichtslage schwingend denken, und zwar mit einer so geringen Vibrationsgeschwindigkeit versehen, dass diese durch die Anziehungskräfte, welche je zwei Nachbartheilchen auf einander ausüben, vollständig aufgehoben werden kann, noch ehe diese Theilchen ihre gegenseitigen Wirkungssphären verlassen haben. Die drehenden Schwingungen des Molecüles um gewisse durch seinen Massenmittelpunkt gehende Axen, so wie die oscillirenden Bewegungen der Atome innerhalb des Molecüles, welche die Lage seines Massenmittelpunktes nicht zu verändern vermögen, sind vorläufig ebenfalls ausser Acht gelassen.

Als erste Vorbereitung für die folgenden Schlüsse muss nun die Wirksamkeit der Molecularkräfte näher ins Auge gefasst werden. Da ein fester Körper keines äusseren Druckes bedarf, um bei constanter Temperatur sein Volumen dauernd unverändert zu behalten, so müssen wir annehmen, dass die Molecularkräfte, welche zwischen zwei vollkommen ruhend gedachten Molecülen thätig seien, bei einem bestimmten Abstande ihrer Massenmittelpunkte, den wir x_0 nennen wollen, verschwinden; bei einem kleineren Abstande der Massenmittelpunkte, $x < x_0$, nehmen diese Kräfte einen abstossenden Charakter (positive Werthe) an, bei $x > x_0$ dagegen werden sie anziehend (negativ). Bei einigermassen grösseren Werthen von x aber verschwinden die Eigenthümlichkeiten der sogenannten Molecularwirkung, und die zwischen den Theilchen noch übrigbleibenden Kräfte sind die Ursache der Gravitation. Damit ist also gesagt, dass die Gravitation und die moleculare Anziehung im wesentlichen denselben Ursprung haben, und dass die Verschiedenheiten derselben nur durch die verschiedenen geometrischen Verhältnisse, die durch den Abstand der wirksamen Theilchen bedingt sind,

begründet werden, ganz besonders dadurch, dass die Abstossungen der Ätherhüllen auf grössere Entfernungen hin unmerklich werden. Wenn diess so ist, so können wir im Voraus sagen, dass die moleculare Anziehung zweier Theilchen niemals grösser werden kann, als die Gravitation bei demselben Abstande ihrer Massenmittelpunkte sein würde; denn erstens treten die abstossenden Kräfte in geringeren Distanzen mit immer grösseren Intensitäten auf, zweitens vermindern sich selbst die anziehenden Kräfte, wenn die Annäherung so weit fortgeschritten ist, dass die Gestalt der Molecüle bereits Einfluss gewinnt, d. h., dass man die von den einzelnen Atomen ausgehenden Anziehungen nicht mehr als parallel annehmen, sondern nur gewisse Componenten derselben in Rechnung nehmen darf. Wenn man auch von diesem Einflusse der Gestalt der Molecüle vorläufig absehen will, so würde den allgemeinen Forderungen, denen die Molecularkräfte zwischen zwei Theilchen entsprechen sollen, eine Formel von der Gestalt:

$$K = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mm'}{x^2} + \frac{af(mm')}{x^{n+2}},$$

Genüge leisten, unter m und m' die Massen der beiden Theilchen verstanden, welche im Inneren eines homogenen Körpers einander gleich sind; unter x deren Abstand, und unter a eine Constante. Soll $x = x_0$ der Gleichgewichtsabstand sein, in welchem die Kraft der Nulle gleich wird, so ist:

$$-\frac{mm'}{x_0^2} + \frac{af(mm')}{x_0^{n+2}} = 0,$$

$$mm' x_0^n = af(mm'),$$

und also:

$$K = -\frac{mm'}{x^2}\left\{1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^n\right\}, \qquad 1)$$

wobei noch zu bemerken ist, dass $n > 1$ sein muss.

Die Formel 1) ist nicht neu, sie wird u. a. von Briot abgeleitet und in derselben $n = 4$ gesetzt, sie zeigt alle vorhin geforderten Eigenschaften, und dazu noch folgendes:

Lassen wir das bewegliche Molecül von seiner Gleichgewichtslage aus gleiche Wege ξ nach entgegengesetzten Richtungen zurücklegen, so wird bei der Annäherung: $x = x_0 - \xi$ und

$$K_1 = -\frac{mm'}{(x_0-\xi)^2}\left\{1-\left(\frac{x_0}{x_0-\xi}\right)^n\right\} =$$

$$K_1 = -\frac{mm'}{x_0^2}(1-\alpha)^{-2}\left\{1-(1-\alpha)^{-n}\right\}$$

wenn:

$$\frac{\xi}{x_0} = \alpha$$

gesetzt wird.

Ebenso wird bei der Entfernung der beiden Theilchen von einander:

$$x = x_0 + \xi$$

$$K_2 = -\frac{mm'}{(x_0+\xi)^2}\left\{1-\left(\frac{x_0}{x^0+\xi}\right)^n\right\} =$$

$$K_2 = -\frac{mm'}{x_0^2}(1+\alpha)^{-2}\left\{1-(1+\alpha)^{-n}\right\},$$

differenzirt man noch sowohl K_1 als K_2 nach α, so sieht man sehr deutlich, dass bei einer Annäherung der Theilchen von der Gleichgewichtsdistanz aus die Abstossungen in viel rascherer Progression wachsen, als die Anziehungen bei einer Entfernung der Theilchen von einander; ja diese Anziehungen erreichen sogar einen Maximalwerth, wenn

$$\alpha = \sqrt[n]{\frac{n+2}{2}} - 1,$$

und nehmen von da aus wieder ab, um sich mehr und mehr den dem Gravitationsgesetze entsprechenden Werthen zu nähern. Für die Abstossungen gibt es keinen solchen Maximalwerth.

Weil gerade diese ungleichmässige Veränderlichkeit der Molecularkräfte bei gleichmässigen Veränderungen der Distanz der Molecüle den Hauptstützpunkt der folgenden Erörterungen bildet, so will ich dieselbe noch durch eine kleine Zahlentabelle illustriren, welche unter der Annahme $n = 4$ berechnet ist.

Damit ist noch nicht gesagt, dass die späteren Erörterungen nur unter dieser Annahme $n = 4$ gültig seien, sondern es soll nur der leichteren Anschaulichkeit wegen ein Zahlenbeispiel gegeben werden. Die Tabelle enthält für einige Werthe von

$$\alpha = \frac{\xi}{x_0}$$

die Abstände der Massenmittelpunkte der Molecüle;

$$\frac{x}{x_0} = (1 \pm \alpha),$$

die Werthe der blossen Gravitation:

$$G = -\frac{mm'}{x_2}, \quad \text{wobei } \frac{mm'}{x_0^2} = 1$$

gesetzt ist, und endlich die Molecularkräfte: K, nach der Formel 1) unter Voraussetzung von $n = 4$ berechnet und ebenfalls auf den Werth der Gravitation in der Gleichgewichtslage als Einheit bezogen. Die algebraische Differenz dieser beiden Grössen gibt dann die moleculare Abstossung. In den zwei nächsten Spalten findet man die Werthe für K und für die moleculare Abstossung $K - G$ unter der Annahme $n = 3$, was dem von Maxwell aufgestellten Satze entsprechen würde, dass die Abstossung den fünften Potenzen der Moleculardistanzen verkehrt proportional sei. Für diesen Fall tritt das Maximum der Anziehung auf bei

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} - 1 = 0 \cdot 3572,$$

für $n = 4$ dagegen bei

$$\alpha = \sqrt{3} - 1 = 0 \cdot 3161.$$

α	$\frac{x}{x_0}$	G	$K_{n=4}$	$K-G$	$K_{n=3}$	$K-G$
0·5	0·5	—4·0000	+59·9360	+63·9360	+28.0000	+32·0000
0·4	0·6	—2·7778	+18·6557	+21·4335	+10·0823	+12·8601
0·3	0·7	—2·0408	+ 6·4505	+ 8·4913	+ 3·9091	+ 5·9499
0·2	0·8	—1·5625	+ 2·2522	+ 3·8147	+ 1·4893	+ 3·0518
0·1	0·9	—1·2346	+ 0·6471	+ 1·8817	+ 0·4589	+ 1·6935
0	1·0	—1	0	+ 1	0	+ 1
0·1	1·1	—0·8265	— 0.2620	+ 0.5645	— 0·2056	+ 0·6209
0·2	1·2	—0·6944	— 0·3595	+ 0·2349	— 0·2925	+ 0·4019
0·3	1·3	—0·5917	— 0·3845	+ 0·2072	— 0·3224	+ 0·2693
0·4	1·4	—0·5102	— 0·3774	+ 0·1328	— 0·3243	+ 0·1859
0·5	1·5	—0·4444	— 0·3567	+ 0·0877	— 0·3127	+ 0·1317

Jedenfalls darf man behaupten: Wenn ein Molecül aus seiner Gleichgewichtslage um gleiche Wegesstrecken verschoben wird, so dass es sich das einemal seinem Nachbarmolecüle nähert, das anderemal von demselben entfernt, so ist die im ersteren Falle auftretende Abstossungskraft bedeutend stärker als die durch den zweiten Fall hervorgerufene Anziehungskraft. Bevor ich nun die Folgerung aus diesem Satze ziehe, muss ich über das Volumen eines Molecüles mir einige Bemerkungen erlauben.

Wäre ein Molecül vollkommen bewegungslos (weder mit einer Bewegung seines Massenmittelpunktes, noch mit drehenden oder inneren Schwingungen versehen), so könnte man ihm ein ganz bestimmtes Volumen und eine ganz bestimmte Gestalt beilegen, sobald man sich über jene Unsicherheit in der Volumsbestimmung hinwegsetzen würde, welche in dem allmäligen Übergang der verdichteten Ätherhülle des Molecüls in den Dichtigkeitszustand des umgebenden freien Äthers begründet ist. (Vergl. meine Beiträge zur Moleculartheorie I. Sitzgsbr. v. October 1867.) Einen discontinuirlichen Übergang dieser Ätherdichtigkeiten, also eine scharfe Begrenzung des Molecüles in diesem Sinne anzunehmen, scheint mit wenig Wahrscheinlichkeit für sich zu haben, man müsste sich also durch eine willkürliche

Annahme über jene Dichtigkeitsdifferenz im Äther, welche als Grenze des Molecüles zu gelten habe, über diese Schwierigkeit hinweghelfen. Wenn nun die Atome eines solchen Molecüles in Bewegungen gerathen, welche jedenfalls Schwingungen mit sehr kurzer Schwingungsdauer sein werden, so wird das Volumen dieses Molecüls variabel innerhalb einer gewissen Periode *(E)*, welche gleich ist dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen der Schwingungszeiten der einzelnen Atome; könnten wir aber das Molecül isoliren und einer Beobachtung durch den Gesichts- oder Tastsinn unterziehen, so würden wir es an allen Orten wahrnehmen, an welche ein Atom desselben auch nur ein einziges Mal im Laufe jener Schwingungsperiode *(E)* gelangt, und das Volumen, welches das Molecül einer solchen idealen Beobachtung gegenüber zeigen würde, und welches ich sein scheinbares Volumen wegen der inneren Bewegungen nennen will, wäre constant und bedeutend grösser als das wahre, veränderliche Volumen in jedem einzelnen Zeitmomente.

Dieselbe Betrachtung lässt sich wieder auf die drehenden Schwingungen eines Molecüles anwenden, und wenn diese Drehungen, wie wir es bei Gasen und tropfbar flüssigen Körpern voraussetzen, zu vollen Umdrehungen werden, so ist damit evident gemacht, dass die scheinbare Gestalt derselben die Kugelgestalt sein muss. Halbmesser dieser Kugel ist die vom Massenmittelpunkt aus gemessene grösste Dimension im scheinbaren Volumen des Molecüles wegen der inneren Bewegung der Atome. Freilich ist dabei immer vorausgesetzt, dass die Periode der inneren Bewegung sowohl als die Rotationsdauer des Molecüles eine verschwindend kleine Zeitgrösse sei, gegen welche Voraussetzung man vielleicht a priori Bedenken erheben könnte; in praxi aber hat man in der dynamischen Theorie der Gase noch immer an der Kugelgestalt der Molecüle festgehalten, wohl weniger desshalb, weil man von der Richtigkeit dieser Anschauung überzeugt gewesen wäre, als weil man die ohnehin verwickelten Untersuchungen nicht noch durch die Annahme anderer Moleculargestalten erschweren wollte, solange nicht zwingende Gründe dafür auftreten würden. Meine Erklärung der scheinbaren Gestalten hilft über die Schwierigkeit hinweg, welche darin liegt, dass die Molecüle derselben Substanz im flüssigen und gasförmi-

gen Zustand kugelförmig, im festen Zustand anders gestaltet sein sollen, wie es die Krystallisationsgesetze verlangen [1].

Sobald mit einer Veränderung der Temperatur eines (festen) Körpers auch Veränderungen der Amplituden der inneren und drehenden Schwingungen verbunden sind, bedingen dieselben auch Veränderungen im scheinbaren Volumen und der scheinbaren Form der Molecüle, und zwar haben die inneren Bewegungen hauptsächlich auf die Grösse, die drehenden vorwiegend auf die Gestalt den massgebenden Einfluss. Die in diesem Sinne mit einer Temperaturserhöhung verbundene Vergrösserung der Molecüle kann aber nicht die Ursache jener sichtbaren Ausdehnung der Körper durch die Wärme sein, welche in dem (linearen oder cubischen) Ausdehnungscoëfficienten ihren numerischen Ausdruck findet.

Diese Ausdehnung der Molecüle widerspricht aber auch nicht dem von der dynamischen Theorie der Gase entwickelten Satze, dass die Volumina der Gasmolecüle mit steigenden Temperaturen abnehmen; denn dieser Satz beruht auf einer ganz anderen, und zwar nur uneigentlichen Definition des Begriffes Volumen eines Molecüles. Man ist nämlich, wie Herr Director Stefan in den Sitzgsb. Bd. LXV, 338 (Über die dynamische Theorie der Diffusion der Gase) ausführt, von der Ansicht ausgegangen, dass die Molecüle scharf begränzte elastische Kugeln seien, welche erst dann auf einander zu wirken anfangen, wenn sie sich berühren, „dass aber dann die in die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte fallende Componente der relativen Geschwindigkeit in ausserordentlich kurzer Zeit vernichtet und umgekehrt wird. Fasst man die Abstossung zwischen den Molecülen als eine, wenn auch auf eine beschränkte Distanz fernwirkende Kraft auf, so hat dann der Durchmesser eines Molecüles die Bedeutung jener Distanz zweier gleichartiger Molecüle, in welcher etwa bei einem centralen Zusammenstoss ihre relative Geschwindigkeit vernichtet und umgekehrt wird. Wenn also gesagt wird, Molecüle mit grösseren Geschwindigkeiten haben

---

[1] Man hat diese Schwierigkeit wohl auch durch die Hypothese von einfachen und zusammengesetzten Molecülen zu überwinden gesucht.

kleinere Durchmesser, so heisst das nur, dass die Abstossung zwischen den Molecülen auf einem längeren Wege thätig sein muss, um die zur Vernichtung einer grösseren lebendigen Kraft nöthige Arbeit leisten zu können. Die Annahme eines veränderlichen Durchmessers ist von diesem Standpunkte aus die natürliche" — — und stimmt auch, zwar nicht mit meiner Ausdrucksweise über das Volumen, aber mit meinen Vorstellungen über die Art des Vorganges im wesentlichen überein, bis auf die scharfe Begrenzung der Ätherhülle eines Molecüles, welche ich nicht gut begreifen kann, und ferner auf den Punkt, dass ich nicht von der Nothwendigkeit überzeugt bin, dass die Ätherhüllen sich erst berühren und theilweise durchdringen müssen, ehe sie eine abstossende Wirkung auf einander ausüben können.

Es wurde früher behauptet, dass die aus den inneren und drehenden Bewegungen der Molecüle hervorgehende Vergrösserung derselben nicht die Ursache der Ausdehnung der Körper durch die Wärme sein könne, denn diess würde augenscheinlich voraussetzen, dass die Molecüle mit ihrem, der jeweiligen Temperatur entsprechenden Volumen und mit bei constanter Temperatur ruhenden Massenmittelpunkten wie starre Körper in unmittelbarer Berührung mit einander stünden, was sicherlich nicht der Fall ist; vielmehr glaube ich, dass in den schwingenden Bewegungen der Massenmittelpunkte der Molecüle die Ursache jener Erscheinung zu suchen sei.

Bezüglich dieser Bewegungen drängt sich zunächst die Bemerkung auf, dass sie in festen Körpern auch einen ähnlichen Einfluss auf das scheinbare Volumen und die scheinbare Gestalt der Molecüle haben müssen, wie die inneren und die drehenden Schwingungen, nämlich: bei einer zweckmässigen Beobachtungsweise würde man das Molecül an allen Orten finden, wohin ein Theil desselben auch nur einmal während einer Schwingungsperiode gelangt, und in Folge dessen wird in einem festen Körper „das scheinbare Volumen eines Molecüles wegen der Bewegung des Massenmittelpunktes" wieder ein grösseres, die scheinbare Gestalt eine andere sein, als „das scheinbare Volumen und die scheinbare Gestalt wegen der inneren und drehenden Schwingungen" bei ruhendem Massenmittelpunkte.

Ist $\xi = f(t)$ der Abstand des wirklichen Massenmittelpunktes von seiner Gleichgewichtslage, also $f(t)$ das ihn beherrschende Bewegungsgesetz, und verweilt dieser bewegte Punkt in jedem solchen Abstande während der Zeit dt, ist ferner T die Dauer einer Schwingungsperiode, so ist

$$\xi' = \frac{1}{T}\int_0^T \xi dt,$$

jene Entfernung von der Gleichgewichtslage, in welcher man den „scheinbaren" Massenmittelpunkt des scheinbaren Volumens des Molecüles zu suchen hat.

Nun scheint man bisher wohl allgemein anzunehmen, dass die Schwingungen der Massenmittelpunkte der Molecüle im Innern der festen Körper das einfache Sinusgesetz befolgen, dass die Molecüle den Wärmebewegungen gegenüber sich ebenso verhalten, wie den Schallwellen gegenüber, und dass sie also mit Kräften, die ihren Entfernungen aus der Gleichgewichtslage proportional seien, wieder in dieselbe zurückgezogen werden. Diese Voraussetzung schliesst aber mehrere andere in sich: dass die auf ein einzelnes Molecül einwirkende Kraft als die Resultirende der Wirkungen von sehr vielen, regelmässig in einem grossen kugelförmigen Raume vertheilten Molecülen betrachtet werden könne, welche alle das Gravitationsgesetz befolgen, und dass die Bewegung des einen betrachteten Molecüles keine Rückwirkung auf die anderen Molecüle ausübe, dass auch diese Wirkungen der einzelnen Molecüle durch die ihnen innewohnenden Bewegungen nicht alterirt werden. Es liegt aber offenbar näher, anzunehmen, dass jedes einzelne Molecül vorzugsweise unter dem Einflusse seiner nächsten Nachbarn stehe, und zu untersuchen, welchen Einfluss die Bewegung derselben auf ihr gegenseitiges Verhalten ausübe. Unter den schon oft erwähnten Vereinfachungen wird sich dann folgendes ergeben: Wenn von zweien in der Entfernung x_0 von einander ruhenden Molecülen das eine in Bewegung versetzt wird, indem man ihm eine gewisse Elongation oder eine gewisse Geschwindigkeit

ertheilt und es dann sich selbst überlässt, so wird seine Bewegung einem Gesetze unterworfen sein, welches durch Integration der Gleichung

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = f(\xi)$$

gefunden werden müsste, und welches wir als in der Form

$$\xi = \rho(t)$$

bekannt voraussetzen wollen.

Nach der früher erwähnten Annahme wäre z. B.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -u\xi.$$

und

$$\xi = \rho(t) = a \sin \frac{2\pi t}{T};$$

aus der im Eingange beispielsweise angeführten Wirkungsweise zweier Molecüle würde sich hingegen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{mm'}{(x_0 \pm \xi)}\left\{1 - \left(\frac{x_0}{x_0 \pm \xi}\right)^n\right\},$$

und daraus eine entsprechende Form von $\rho(t)$ ergeben.

Aus diesem Bewegungsgesetze würde man die Lage des scheinbaren Massenmittelpunktes des bewegten Molecüles nach der Formel

$$\xi' = \frac{1}{T}\int_0^T \rho(t) \, . \, dt$$

ermitteln können; für

$$\rho(t) = a \sin \frac{2\pi t}{T} \text{ wird } \xi' = 0;$$

d. h. wenn die Molecüle so aufeinander wirken, dass jedes von ihnen mit einer der Elongation (ohne Rücksicht auf die Richtung) proportionalen Kraft in seine Gleichgewichtslage zurückgezogen wird, so wird die Bewegung nach dem daraus folgenden Gesetze keine Verschiebung der scheinbaren Massenmittelpunkte (oder der mittleren Positionen) derselben zur Folge haben. Für das

andere Wirkungsgesetz der Molecüle hingegen wird sich ein von der Nulle verschiedener Werth für ξ' ergeben, wie man schon

(M) (M')
A ——— B₃ B₁ B ——— B₂ B₄

ohne Durchführung der Rechnung aus folgender Betrachtung ersehen kann: Es seien A, B, die Gleichgewichtslagen zweier Molecüle M, M', von denen M als fest, M' als beweglich angenommen wird.

Erhält M' in B durch einen von aussen kommenden Anstoss eine gewisse Geschwindigkeit (c) gegen A hin, so wird diese wegen des raschen Anwachsens der abstossenden Kräfte sehr bald (in B^1) vernichtet, umgekehrt, und in B angelangt hat M' wieder die Geschwindigkeit $-c$. Auf dem weiteren Wege wird wegen des viel langsameren Anwachsens der Anziehungskräfte auch die Geschwindigkeit viel langsamer vermindert, und der zweite Wendepunkt der Bewegung (B_2) ist viel weiter von B entfernt als B_1. Diese Ungleichheit der Amplituden und Schwingungszeiten nach rechts und nach links wächst mit der Grösse von c, so zwar, dass die Halbirungspunkte von $B_1 B_2$, B_3 B_4, u. s. w. sich immer weiter von B entfernen.

Diese Halbirungspunkte sind aber die scheinbaren Mittelpunkte der bewegten Molecüle, und ähnlich wie diese werden sich die scheinbaren Massenmittelpunkte mit steigenden Werthen von c (steigenden Temperaturen) weiter von ihrer Gleichgewichtslage entfernen.

Was aber von zwei Molecülen nachgewiesen wurde, gilt auch von beliebig vielen in derselben Geraden gelegenen; zwischen je zweien derselben wird eine ihrer relativen Bewegung entsprechende Verschiebung der scheinbaren Massenmittelpunkte eintreten müssen; und wenn in Folge dessen verhältnissmässig grosse Wege (der factischen Verlängerung jener Geraden gleich) von den letzten Molecülen in der Reihe zurückgelegt werden, so wird eben die dazu nothwendige Arbeit auf Kosten der lebendigen Kräfte (Temperatur) der einzelnen Molecüle von der die Bewegung überhaupt erzeugenden Ursache (Wärmequelle) geleistet.

Will man den hiermit angeregten Gedanken zur Erklärung der Ausdehnung der Körper durch die Wärme (welcher durch die von Fick in Poggendorff's Annalen Bnd. 90 gegebene Andeutung angeregt wurde, aber sich wesentlich von derselben unterscheidet) weiter ins Einzelne verfolgen, so wird man kaum umhin können, auch den Einfluss zu berücksichtigen, welchen die rings um die Verbindungslinie AB gelegenen Nachbarmolecüle auf die relativen Verschiebungen von M und M' ausüben.

Um einem etwaigen Missverständnisse vorzubeugen, muss ich die im Vorigen öfters gebrauchten Ausdrücke: scheinbares Volumen, scheinbare Gestalt und scheinbarer Massenmittelpunkt eines Molecüles noch — vielleicht sollte ich sagen — zurücknehmen. Ich wollte durch der Beisatz „scheinbar" andeuten, dass ich damit wirklich jene Eigenschaften meine, mit welchen uns das Molecül bei der Beobachtung „thatsächlich erscheint", im Gegensatz zu der Grösse, Gestalt und dem Massenmittelpunkte eines vollkommen ruhenden Molecüles, welches aber wahrscheinlich gar nirgends in der Natur vorhanden ist, wesshalb wir weder Ursache noch Gelegenheit haben, die Eigenschaften desselben zu erforschen. Meine Auffassung von dem Volumen und der Gestalt eines Molecüles in einem festen Körper scheint mir nicht weniger gerechtfertigt zu sein als die Definition von dem Volumen eines Gases. Streng genommen nehmen die Theilchen eines solchen in jedem einzelnen Zeitmomente nur einen sehr kleinen Theil des ganzen ihnen zu Gebote stehenden Raumes ein, und doch rechnet man jeden Ort, in welchem sich von Zeit zu Zeit ein Gasmolecül vorübergehend befindet, zu dem Volumen des Gases und ist in diesem Sinne berechtiget, die Raumerfüllung desselben, und ebenso die einer Flüssigkeit, als eine continuirliche zu betrachten und bezüglich gewisser Probleme demgemäss zu behandeln.

Nun hat jeder Versuch, die Ausdehnung der Körper durch die Wärme zu erklären, noch mit der eigenthümlichen Schwierigkeit zu kämpfen, dass es nothwendig wird, aus derselben allgemeinen Ursache (Temperaturserhöhung) auch die entgegengesetzte Wirkung abzuleiten, nämlich die bei manchen Krystallen beobachtete Verkürzung gewisser Dimensionen bei steigenden Temperaturen.

In dieser Beziehung scheint es mir nicht zu gewagt anzunehmen, dass die Amplituden der Vibrationen der einzelnen Molecüle nach gewissen Richtungen hin abnehmen, während ihre gesammte lebendige Kraft wächst, dass also nach denselben Richtungen hin eine Verminderung der Dimensionen des scheinbaren Volumens und die Annäherung der scheinbaren Massenmittelpunkte an den Gleichgewichtsort (B) stattfinde.

XXVI. SITZUNG VOM 19. NOVEMBER 1874.

Herr Regierungsrath Dr. E. Mach in Prag übersendet eine „vorläufige Mittheilung über die Schallgeschwindigkeit des Wassers in Röhren", vom Herrn Dr. V. Dvořák.

Herr Director Dr. G. Tschermak legt den ersten Theil einer Abhandlung: „Über das Krystallgefüge des Eisens, insbesondere des Meteoreisens" vor.

Derselbe überreicht ferner eine Abhandlung: „Über die Trümmerstructur der Meteoriten von Orvinio u. von Chantonnay."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academy of Natural Sciences of Philadelphia: Journal. New Series. Vol. VIII, Part I. Philadelphia, 1874; 4°. — Proceedings. 1873. Parts I—III. Philadelphia, 1873—74; 8°. — Observations on the Genus Unio. By Isaac Lea. Vol. XIII. Philadelphia; 4°.

— The American, of Arts and Sciences: Proceedings. Vol. VIII. Sign. 64—85. Boston & Cambridge, 1873; 8°. — The Complete Works of Count Rumford. Vols. II—III. Boston, 1873 & 1874; 8°.

Annalen (Justus Liebig's) der Chemie. Band 174, Heft 2. Leipzig & Heidelberg, 1874; 8°.

Athen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften für das Jahr 1873/4. 4°, 8° & 12°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome LI°, Nr. 202. Genève, Lausanne, Paris, 1874; 8°.

Bonn, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1873. 4° & 8°.

Boston Society of Natural History: Memoirs. Vol. II. Part II, Nr. 4; Vol. II. Part III, Nrs. 1—2. Boston, 1873 & 1874; 4°.

— Proceedings. Vol. XV. Parts 3—4. (1873); Vol. XVI, Parts 1—2. (1874.) Boston; 8⁰.

Buffalo Society of Natural Sciences: Bulletin. Vol. I, Nr. 4. Buffalo, 1874; 8⁰.

California Academy of Natural Sciences: Proceedings. Vol. I. (1854—1857); Vol. V, Part. 2. (1873.) San Francisco, 1873 & 1874; 8⁰.

Chantre, Ernest, Projet d'une légende internationale pour les cartes archéologiques préhistoriques. Lyon, 1874; 4⁰. — Les faunes mammalogiques tertiaire et quaternaire du bassin du Rhône. Lyon, 1874; 8⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 18. Paris, 1874; 4⁰.

Gesellschaft, k. k., geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XVII (neuer Folge VII), Nr. 10. Wien, 1874; 8⁰.

— Deutsche, geologische: Zeitschrift. XXVI. Band, 3. Heft. Berlin, 1873; 8⁰.

Landbote, Der steierische. 7. Jahrgang, Nr. 23. Graz, 1874; 4⁰.

Lyceum of Natural History of New York: Annals. Vol. X, Nrs. 8—11. New York, 1872 & 1873; 8⁰. — Proceedings. Vol. I. Sig. 16—19. Second Series. January to March, 1873. New York; 8⁰.

Nature. Nr. 263, Vol. XI. London, 1874; 4⁰.

Report, Fifty-fourth Annual —, of the Boord of Public Education of the First School District of Pennslyvania. For the Year 1872. Philadelphia, 1873; 8⁰.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger. IVᵉ Année, 2ᵉ Série, Nr. 20. Paris, 1874; 4⁰.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. 1874. Disp. 9ᵃ. Palermo; 4⁰.

Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève: Mémoires. Tome XXIII, 2ᵈᵉ partie. Genève, Paris, Bâle 1873—1874; 4⁰.

— Malacologique de Belgique: Annales. Tome VIII; Année 1873. Bruxelles; 8⁰. — Procès-verbaux des séances. Tome III. Année 1874. (Pages I—CXXX.) Bruxelles; 8⁰.

Society, The Wisconsin State Agricultural: Transactions. Vol. X. 1871; Vol. XI. 1872—3. Madison, 1872 & 1873; 8°.

— The American Philosophical, of Philadelphia: Transactions. Vol. XV. New Series. Part I. Philadelphia & London, 1873; 4°. — Proceedings. Vol. XIII, Nrs. 90—91. 1873; 8°.

Verein, naturwissenschaftlicher, in Hamburg: Abhandlungen. V. Band. 4. Abth. Hamburg, 1873; 4°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 46. Wien, 1874; 4°.

Zeitschrift des Ferdinandeum für Tirol und Vorarlberg. Dritte Folge. XVIII. Heft. Innsbruck, 1874; 8°.

— für die gesammten Naturwissenschaften. Von C. G. Giebel. N. F. 1874. Band IX. Berlin, 1874; 8°.

— des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang, 15. Heft. Wien 1874; 4°.

Über die Schallgeschwindigkeit des Wassers in Röhren.

Vorläufige Mittheilung.

Von Dr. **V. Dvořák.**

Aus Anlass der im neuesten Hefte von Pogg. Annalen erschienenen Arbeit von A. Kundt und O. Lehmann „Über longitudinale Schwingungen und Klangfiguren in cylindrischen Flüssigkeitssäulen" bin ich genöthigt, die Resultate meiner denselben Gegenstand betreffenden Untersuchung vorläufig mitzutheilen. Ich versuchte, schon vor längerer Zeit Staubfiguren im Wasser zu erzeugen, was mir auch theilweise gelang, wie aus der am Schlusse meiner Arbeit „Über die Entstehungsweise der Kundt'schen Staubfiguren" (Sitzber. 1873) erhellt: „Auch erhielt ich in einer mit Wasser gefüllten Glasröhre, die durch Reiben mit einem nassen Tuche zum Tönen gebracht wurde, Rippen, zuweilen von einer solchen Feinheit, dass sie kaum mit freiem Auge zu unterscheiden waren. Zur Erzeugung der Schichten wurde aufgeweichtes Schiesspulver verwendet, welches jede Art von Schichten, selbst die feinsten, besonders gut zu zeigen vermag."

Das Streichen der Röhren mit nassem Tuch führt jedoch zu keinem befriedigenden Resultate, wenn es sich nicht bloss um die Erzeugung von Schichten, sondern um Messungen der Wellenlänge des betreffenden Tones im Wasser handelt. Ich versuchte daher auf eine ähnliche Art, wie es Kundt gethan hat, das Wasser zum Tönen zu bringen, da aber der erste Versuch nicht nach Wunsch ausfiel, so verfiel ich auf eine andere Art der Untersuchung. Ich nahm eine etwa 2 Mtr. lange Glasröhre, schmolz sie an einem Ende zu, und bog sie etwa eine Handbreit vom anderen Ende rechtwinklig um. Dann goss ich soviel Wasser in dieselbe, dass nur ein kleiner Theil des rechtwinklig

ückes mit Wasser gefüllt war. Die in dem auf-
le enthaltene Luftsäule wurde durch kräftiges
nit dem Munde zum Tönen gebracht; die Ton-
ch Hinwegnehmen oder Zugiessen des Wassers
ler Ton gut getroffen, so zeigte das Schiess-
urde durch Filtriren zuvor vom Salpeter befreit)
is 5maligem Anblasen sehr schöne Rippen. In
itte man eine Anordnung, die einer gedeckten
itsprach. Es zeigte sich jedoch, dass die einzel-
gelmässig einen sehr ungleichen, gegenseitigen
, so dass z. B. bei einer Glasröhre ein bestimmter
beinahe nur halb so gross war, wie ein zweiter.
die Staubfiguren in gedeckten Röhren
nung der Fortpflanzungsgeschwindig-
u verwenden.

schwingende Wassersäule zu erhalten, die an
frei war, bog ich die Röhre auch am zugeschmol-
m, jedoch nur ein sehr kurzes Stück, etwa einen
nd liess eine grosse Luftblase hinein. Die Wasser-
etzt als offene Pfeife an und gab scharfe Staub-
auch die Knoten gleichweit entfernt waren. Um
er Dicke der Röhrenwand und des Röhrendurch-
stellen, machte ich einige Versuchsreihen. Die
le mit einem Monochord bestimmt. In der folgen-
deutet D den inneren Röhrendurchmesser, δ die
die Saitenlänge des betreffenden Tones am Mono-
gemessene Wellenlänge, n die Schwingungszahl,
us berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Die
r war im Mittel 19°C.

	τ	λ	D	δ	n	c
	in Millimetern					Meter
Röhre Nr. 1	188	947	17·9	0·82		
	187	942				
	186	944				
	186	947				
	186	946				
	185·5	942				
Mittel..	186·4	944			1021·7	998
Röhre Nr. 2	179·5	962	11·7	0·63		
	179·5	962				
	177	942				
	180	948				
	179	945				
	177·5	942				
Mittel..	178·7	950			1102	1046
Röhre Nr. 3	161·5	956	8·46	0·52		
	161	937				
	162	957				
	161·5	955				
	162·5	962				
	161	963				
Mittel..	161·6	955			1219	1164
Röhre Nr. 4	193·5	1187	15	2		
	193	1195				
	193·5	1190				
	192·5	1188				
	193	1184				
	192	1184				
Mittel..	192·9	1188			1021·7	1213

	τ	λ	D	δ	n	c
	in Millimetern					Meter
Röhre Nr. 5	190	1228	11	2		
	187·5	1245				
	185·5	1217				
	186	1212				
	186	1227				
	190	1227				
Mittel..	187·5	1219			1046	1281

Die Röhre Nr. 1, die eine so geringe Fortpflanzungsgeschwindigkeit zeigte, wurde unter Wasser gesetzt; es zeigte sich aber kein sehr merklicher Unterschied gegen früher, wo die Röhre nicht von Wasser umgeben war. Die Versuchsreihe ist in der folgenden Tabelle dargestellt.

	τ	λ	n	c
	in Millimetern			
Röhre Nr. 1	186	950		
	186	956		
	185·5	955		
	184	947		
	184	952		
	184	942		
Mittel..	184·9	950	1065	1011

Es scheint sich also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um etwas, wenn auch nicht um viel zu vermehren. Auch die Doppelbrechung des Wassers im Knoten wurde auf Wunsch des Hrn. Prof. Mach (Vergl. dessen „optisch-akustische Versuche" Prag 1872, S. 25) untersucht, das Resultat jedoch war ein negatives.

Hr. Prof. Mach mass auch mit einem Mikroskope die Grösse der Gesammtexcursion im Bauch der Röhre Nr. 4: sie betrug 0·016 Mm.

Was die Bemerkung Kundt's betrifft, dass das Wasser nur dann schwingt, wenn es vollkommen frei von Luftblasen ist, so war dieses bei meinen Versuchen nicht der Fall. Die vorhandenen kleinen Luftblasen bewegen sich beim Tönen sehr rapid gegen den Knoten hin, wo sie sich zu einer grösseren Luftblase verbinden. Schon Cagniard Latour hatte beobachtet, dass bei einer gestrichenen, mit Wasser gefüllten Glasröhre die Luftblasen zum Boden der Röhre fahren, was jedoch nur theilweise richtig ist. Auch hat er schon die Bemerkung gemacht, dass durch das Schwingen des Wassers die absorbirte Luft freigegeben wird. Das Nähere darüber will ich sammt einigen neuen Beobachtungen in einer ausführlicheren Mittheilung angeben.

Prag, am 16. November 1874.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

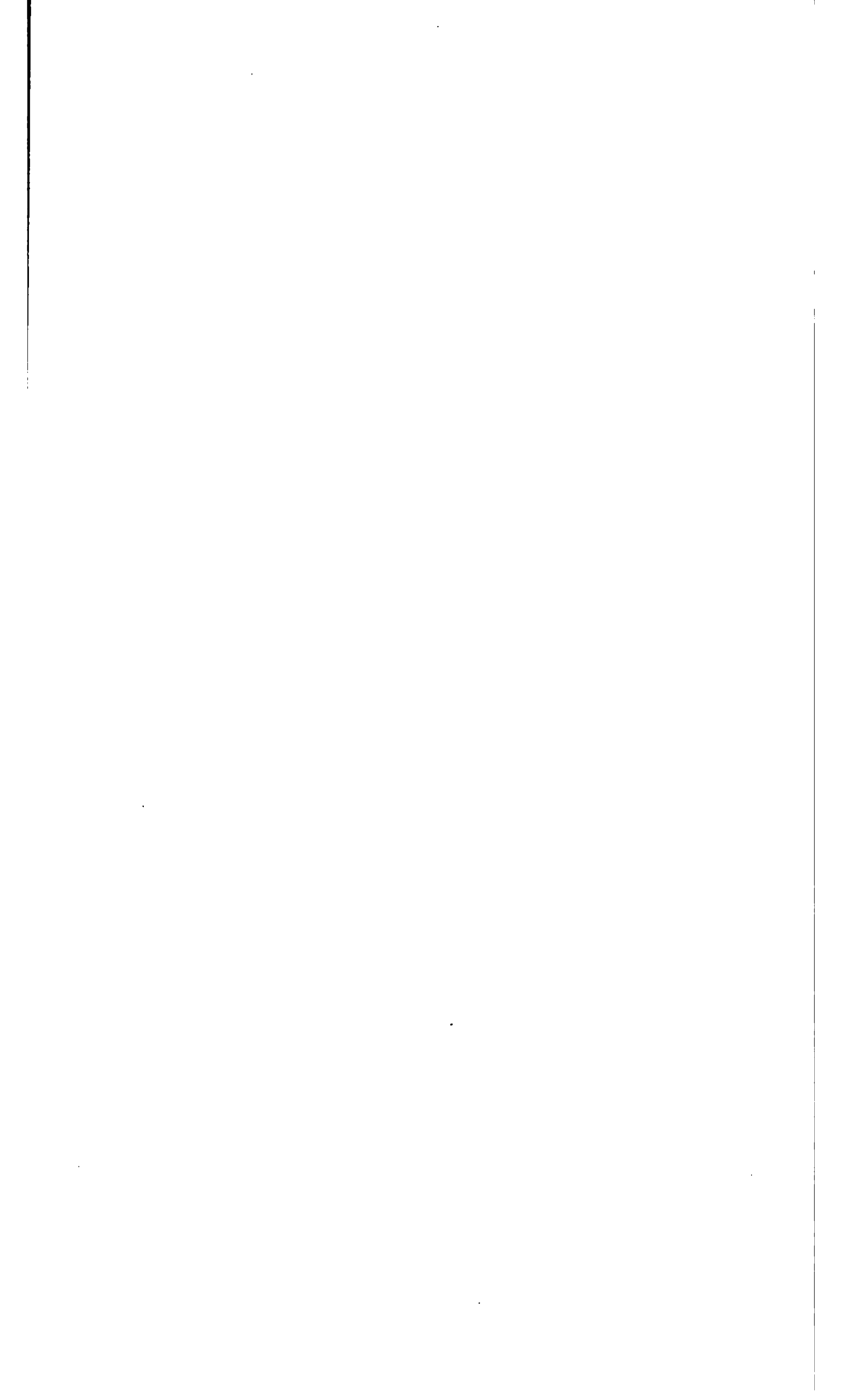
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. Band.

ZWEITE ABTHEILUNG.

10.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.



XXVII. SITZUNG VOM 3. DECEMBER 1874.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Hofrath Freiherr von Burg den Vorsitz.

Der Secretär liest eine Zuschrift des k. & k. Ministeriums des Äussern vom 26. November, womit das von der Akademie am 25. November an dasselbe gestellte Ansuchen, den zur Beobachtung des Venus-Durchganges nach Jassy reisenden Professoren Dr. Edm. Weiss und Dr. Th. v. Oppolzer die möglichste Unterstützung seitens der rumänischen Behörden, und namentlich den anstandlosen und zollfreien Aus- und Eingang der von denselben mitgeführten Instrumente erwirken zu wollen, dahin beantwortet wird, dass das genannte Ministerium sofort das General-Consulat in Bukarest, sowie das Consulat in Jassy von der Reise der beiden Gelehrten verständigt und das erstgenannte Amt zugleich angewiesen habe, sich in der gewünschten Richtung bei der rumänischen Regierung mit aller Beschleunigung zu verwenden.

Die physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg ladet die Akademie mit Circular-Schreiben vom November 1874 zu ihrem am 8. December zu begehenden 25jährigen Stiftungsfeste ein.

Die Classe beschliesst, der Gesellschaft aus diesem Anlasse ein Beglückwünschungs-Telegramm zugehen zu lassen.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Jährliche Periode der Insecten-Fauna von Österreich-Ungarn. I. Die Fliegen *(Diptera)*“, vom Herrn Vice-Director K. Fritsch in Salzburg. Diese Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

„Das Wasser des k. k. Artillerie-Arsenals in Wien. Als Beitrag zur Kenntniss der Beschaffenheit des Wassers von Wien“, von dem k. k. Artillerie-Hauptmann Ottomar Volkmer.

„Über Strömungen eigener Art und die merkwürdigen Eigenschaften des Pendels in menschlicher Hand“, von Herrn Dr. Ferd. Daubrawa in Mährisch-Neustadt.

Der Assistent der k. k. Gradmessung, Herr Ludwig Gruber, überreicht eine Abhandlung: „Über einen Apparat zu Coïncidenzbeobachtungen bei Schwerebestimmungen mit Hilfe des Reversionspendels“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Pontificia de' nuovi Lincei: Atti. Anno XXVII, Sess. 6ª. Roma, 1874; 4°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 2010—2016 (Bd. 84. 18—24). Kiel, 1874; 4°.

Basel, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1873/4. 4° & 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX. Nrs. 19—20. Paris, 1874; 4°.

Czyrniański, Emil, Chemija nieorganiczna. Widanie trzecie. Kraków, 1874; 8°.

Gesellschaft, k. k., der Ärzte: Medizinische Jahrbücher. Redigirt von S. Stricker. Jahrgang 1874. II., III. & IV. Heft. Wien; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 22. Wien, 1874; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 43—48. Wien, 1874; 4°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band VIII, 10. Heft.; Band X, 7. & 8. Heft. Leipzig, 1874; 8°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 24. Graz, 1874; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1874, Nr. 16—17. Wien; 4°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 20. Band, 1874. XI. Heft. Gotha; 4°.

Nature. Nr. 261, Vol. X. Nrs. 264 & 265, Vol. XI. London, 1874; 4°.

Observatorio de Marina de la ciudad de San Fernando Almanaque náutico para 1875. Barcelona, 1874; 4°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino meteorologico. Vol. VII, Nr. 6 (1872); Vol. VIII, Nr. 12 (1873); Vol. IX, Nr. 1 (1874). Torino; 4°.

Packard, A. S., Third Annual Report on the Injurious and Beneficial Insects of Massachusetts. Salem, 1873; 8°. — Catalogue of the Phalaenidae of California. Nr. II. Boston, 1874; 8°. — Catalogue of the Pyralidae of California, with descriptions of new Californian Pterophoridae. Salem, 1873; 8°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". IVe Année, 2e Série, Nrs. 21—22. Paris, 1874; 4°.

Smithsonian Institution: Annual Report. For the Year 1872. Washington, 1873; 8°.

Societät, physikal.-medicin., zu Erlangen: Sitzungsberichte 6. Heft. Nov. 1873 bis Aug. 1874. Erlangen, 1874; 8°.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou: Nouveaux Mémoires. Tome XIII, Livraison IV. Moscou, 1874; 4°.

— Botanique de France: Bulletin. Tome XXe. 1873. Session extraordinaire, Juillet 1873; Tome XXIe 1874. Revue bibliographique B – C. Paris; 8°.

— Géologique de France: Bulletin. 3e Série. Tome IIe. 1874. Nr. 5. Paris; 8°.

Strassburg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1873/4. 8°.

Verein, naturwissenschaftl., von Neu-Pommern und Rügen: Mittheilungen. V. & VI. Jahrgang. Berlin, 1873 u. 74; 8°.

— siebenbürgischer, für Naturwissenschaften: Verhandlungen und Mittheilungen. XXIII. & XXIV. Jahrgang. Hermannstadt, 1873 & 1874; 8°.

Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg: Württembergische naturwissenschaftliche Jahreshefte. XXX. Jahrgang. 1., 2. & 3. Heft. Stuttgart, 1874; 8°.

— für Erdkunde zu Dresden: XI. Jahresbericht. Dresden, 1874; 8°.

Vierteljahresschrift, österr., für wissenschaftliche Veterinärkunde. XLII. Band, 1.—2. Heft. Wien, 1874; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 47—48. Wien, 1874; 4°.

Das Wasser des k. k. Artillerie-Arsenals zu Wien.

Als Beitrag zur Kenntniss der Beschaffenheit des Wassers von Wien.

(Mit 1 Tafel.)

Von Hauptmann **Ottomar Volkmer,**
des k. k. Feld-Artillerie-Regiments Nr. 1.

(Ausgeführt im chemischen Laboratorium der k. k. Artillerie-Kadetenschule im k. k. Arsenale.)

Als im Laufe des Monates October 1872 die Artillerie-Kadetenschule die Dislocation der Kaserne Nr. 9 des k. k. Artillerie-Arsenales bezog, wurde schon kurze Zeit darauf sowohl von den Frequentanten, insbesondere aber von den angestellten Köchen wegen der schlechten Beschaffenheit des disponiblen Trink- und Kochwassers der beiden Kasernenbrunnen, hauptsächlich aber des westlich gelegenen, Klage geführt. Der letztgenannte Brunnen wurde auch im Monate Februar 1873 auf Befehl des Kaserncommando gesperrt. Das Wasser der genannten zwei Brunnen wurde in den Monaten März und April 1873 auf seine Beschaffenheit im chemischen Laboratorium der k. k. Artillerie-Kadetenschule genau untersucht, und auf Grund der erhaltenen analytischen Resultate die Sperrung des westlichen Brunnens in Folge Befehlsschreibens des k. k. Arsenal-Directors Nr. 2003, vom 9. Mai 1873 aufrecht erhalten.

Im Laufe des Sommers 1873 gestalteten sich auch weiters die sanitären Verhältnisse des k. k. Artillerie-Arsenals bedenklich ungünstig, indem besonders durch den Genuss des Brunnenwassers der Kaserne Nr. 3 im Monate Juli und August des genannten Jahres Brechdurchfälle mit tödtlichem Ausgange, in den anderen Kasernen aber häufige Diarrhöen auftraten. Diese Thatsachen sowohl, als der kurz darauf vom Arsenal-Director an das k. k. Reichs-Kriegsministerium gestellte Antrag für die Zuleitung des Hochquellenwassers behufs Versorgung des

k. k. Artillerie-Arsenals mit gutem Trinkwasser, liessen mich die Mühe nicht scheuen, eine genaue Untersuchung aller in Benützung stehenden Brunnen auszuführen, um damit durch die Vorlage der erhaltenen analytischen Resultate höheren Orts die vom k. k. Arsenal-Director gestellten Anträge auch einigermassen vom wissenschaftlichen Standpunkte aus zu begründen.

Die Zahl der untersuchten Brunnenwässer beträgt 32. Nach der Verwendung, welche das Wasser findet, lassen sich selbe in drei Gruppen theilen, und zwar:

1. Kasernenbrunnen für den Trink-, Koch- und Waschgebrauch;

2. Brunnen für die Werksanlagen der k. k. Artillerie-Zeugsfabrik, zur Speisung der Dampfkessel, und

3. Brunnen der Depots für Zwecke der Reinigung, des Feuerlöschens und hie und da Tränkens der Pferde.

Die Untersuchung dieser Wässer wurde wissenschaftlich gründlich nicht nur auf die in hygienischer Beziehung schädlichen Stoffe, sondern auf alle jene Materien gepflogen, welche überhaupt darin enthalten sind, um an der Hand der erhaltenen analytischen Resultate über die Verwendung des Wassers zum Koch- und Waschgebrauche, sowie die Kesselsteinbildung und seine Beschaffenheit in den Werksanlagen einigen Aufschluss zu erhalten.

Eine solche Arbeit ist aber nicht nur mühevoll, sondern beansprucht hauptsächlich viel Zeit, was auch die Ursache ist, dass, trotzdem ich alle mir disponible dienstfreie Zeit für diese Arbeit durch $1^1/_2$ Jahre verwendete, die Zusammenstellung der analytischen Resultate und ihre wissenschaftliche Gruppirung erst jetzt vorgenommen und die Arbeit beendet werden konnte.

Frisch geschöpft, ist das Wasser der Werksanlagen und Kasernenbrunnen theils rein, theils wenig trübe und enthält feine, schwimmende Holzfasern, in einzelnen Fällen auch Hanf- und Leinenfäden; jenes der Depotbrunnen, welche meistens weniger stark geschöpft werden, sind aber sehr trübe und enthalten flockenartige Theile von Holzfasern suspendirt.

Nach kurzem Stehen in offenen und bedeckten Gefässen nimmt es meist eine mehr oder weniger opalisirende Trübung an, welche insbesondere bei den Depotbrunnen unter fortdauern-

der Farbenveränderung nach etwa 5 bis 8 Stunden den höchsten Grad der Trübung erreicht, und dabei meistens an den Wänden stellenweise Gasperlen absetzt; die feinflockigen Theile setzen sich am Boden des Gefässes ab.

Nach einigen Tagen klärt sich das Wasser bis auf wenige Ausnahmen vollkommen, und am Boden setzt sich besonders bei den Depotbrunnen ein nicht unbedeutender Schlamm ab. Die Farbe desselben ist schmutzig grauweiss bis graubraun. Die Fäden und Holzfaser, welche, wie vorhergehend erwähnt, darin herumschwimmen, werden leicht durch Schütteln des Wassers in demselben suspendirt erhalten und ballen sich im Sinken zu schmutzig gelbgefärbten, verfilzten Klümpchen zusammen. Untersucht man diese Fäden, so sind es zumeist Holzzellen, in einzelnen Fällen auch Hanf- und Leinenfaser. Sie liegen in einer amorphen, feinkörnigen Masse eingebettet. Gibt man Salzsäure hinzu, so löst sich ein Theil der gröberen Körner und der feinkörnigen Masse unter Entwicklung von Gasbläschen, und es bleibt eine schmutzig gelbe bis braune Masse zurück.

Schon mit unbewaffnetem Auge sieht man bei den meisten Brunnen der Werksanlagen *Cyclops quadricornis*, im Wasser der Depotbrunnen der West- und Nordfront des Arsenals *Cyclops quadricornis* und Würmchen in verschiedenen Grössen, und im Juli 1873 im Wasser der Kaserne Nr. 3 *Cyclops quadricornis*, Eier derselben, Wasserflöhe und kleine Würmchen, *Anguillula fluviatilis*.

Das Wasser des westlichen Brunnens der Kaserne Nr. 9 zeigt bei Regenwetter und feuchter Atmosphäre, namentlich beim Schütteln in halbgefüllter Flasche, den Geruch nach faulen Eiern.

Der Geschmack des Wassers ist vorherrschend fade, nur wenige Brunnen haben erfrischend schmeckendes Wasser.

Auf Lackmus reagirt es nicht; nach vorhergegangenem Kochen, wobei sich zumeist eine sehr bedeutende Menge unlöslich gewordener Salze ausscheidet, zeigt es bis auf zwei Brunnen keine Reaction, es enthalten daher nur die genannten zwei Wässer fixe kohlensaure Alkalien. Der durch gänzliches Abdampfen des Wassers erhaltene Rückstand ist in den meisten Fällen gelblichweiss, selten grauweiss und wird beim Glühen

durch Verkohlung der vorhandenen organischen Substanzen stark geschwärzt.

Gerb- und Gallussäure färben eine stark eingedampfte Wassermenge schwach violett. Auf Zusatz von Chlorcadmium fällt beim Wasser des westlichen Brunnens der Kaserne Nr. 9 eine unbedeutende Menge Schwefelcadmium nieder, während Nitroprussidnatrium keine Reaction gibt; das vorhandene wenige und quantitativ nicht bestimmbare Schwefelwasserstoffgas ist somit nur als im Wasser gelöst zu betrachten.

Die meisten Brunnenwässer, mit Ausnahme jener der Zeugsfabrik, zeigen, wenn man eine grössere Menge eindampft und mit Brucinlösung prüft, deutlich Salpetersäure an, der Brunnen der Kaserne Nr. 7 und der des Commandantengebäudes sogar schon frisch geschöpft, während die empfindlichsten Reactionen auf freies und gebundenes Ammon ausblieben.

Die unter Anwendung bisher bekannter Methoden ausgeführte qualitative Analyse ergab somit folgende Resultate für die im Wasser gelösten mineralischen Bestandtheile:

Chlor,	Kohlensäure,
Schwefelsäure,	Eisenoxyd und Thonerde,
Salpetersäure,	Kalk,
Kieselsäure,	Magnesia und Natron.

Die Analyse des am Boden sich ablagernden schlammigen Satzes erwies organische Substanz, Eisenoxyd und etwas Thonerde.

Bei der quantitativen Analyse wurde der übliche Gang der allgemeinen Trennungs- und Bestimmungsmethoden eingehalten und die Ermittlung der einzelnen elementaren Verbindungen theils gewichts-, theils mass- analytisch ausgeführt. Nach dem Wägen wurden die Niederschläge auf ihre Reinheit sorgfältig geprüft und für jede Einzelnbestimmung mindestens eine Parallelbestimmung zur Controle ausgeführt, um Mittelwerthe zu erhalten.

Chlor und Schwefelsäure wurden aus den erhaltenen Niederschlägen des Chlorsilbers und schwefelsauren Baryts bestimmt, die Kieselsäure als solche.

Zur Ermittlung der Menge von Salpetersäure wurden 2 bis 4 Liter Wasser unter Zusatz von reinem kohlensauren Natron eingedampft, der gebildete Niederschlag filtrirt, ausgewaschen, das Filtrat bis auf ein kleines Volum eingedampft und dann nach der Methode von Siewert behandelt. Die Destillation mit einem granulirtem Zink, Eisenfeile und Kalilauge verwandelt die vorhandene Salpetersäure durch den sich entwickelnden nascirenden Wasserstoff in Ammoniak, dieses wurde mit $^1/_{10}$ Normalsalzsäure aufgefangen, die freie Salzsäure mit $^1/_{10}$ Normal-Ammoniak zurücktitrirt und aus den erhaltenen Daten die Menge der Salpetersäure berechnet.

Die Menge der gebundenen Kohlensäure wurde dadurch erhalten, dass ein Liter Wasser bis auf einen kleinen Rest eingedampft ward, Lakmuslösung und titrirte Salzsäure dazu gesetzt, erhitzt um die freigemachte Kohlensäure zu vertreiben und dann der Überschuss zugesetzter Salzsäure mit $^1/_{10}$ Normal-Ammon zurück titrirt.

Die halbgebundene und freie Kohlensäure wurde nach der Methode Pettenkofer's ermittelt, indem zu einer gemessenen Menge titrirten reinen Kalkwassers unter Zusatz gesättigter Lösung von Chlorcalcium und Salmiak eine gemessene Menge des frisch geschöpften Brunnenwassers gebracht wurde. Nach 12 Stunden Stehen, also vollständiger Abscheidung des kohlensauren Kalkes, wurde in einem aliquoten Theile der Flüssigkeit der Kalküberschuss mit $^1/_{10}$ Normal-Oxalsäure titrirt, auf die ganze Menge des angewendeten Wassers überrechnet und daraus die Menge der halbgebundenen und freien Kohlensäure leicht berechnet.

Das Volum der Kohlensäure berechnet man, indem nach Bunsen 1 Liter Kohlensäure bei 0° C. und 0·76 Meter Druck gleich 1·96664 Gramme wiegt.

Das Eisen wurde zuerst gewichtsanalytisch und nach dem Lösen zur Controle durch Titriren mit übermangansaurem Kali bestimmt.

Der Kalk wurde behufs vollständiger Trennung von der Magnesia zweimal mit oxalsaurem Ammon gefällt und als kohlensaurer und schwefelsaurer Kalk gewogen, zur Probe auch noch durch Glühen vor dem Gebläse als Ätzkalk bestimmt.

Die Bestimmung der **Magnesia** geschah aus dem mit phosphorsaurem Ammon erhaltenen Niederschlage, als pyrophosphorsaure Magnesia.

Das **Natrium** wurde als Chlorid bestimmt. Es wurden hiezu 1250 CC. Wasser auf $^1/_6$ eingedampft, 3 CC. reine Kalkmilch zugesetzt, einige Zeit erhitzt und dann in $^1/_4$ Literkolben gespüllt und erkalten gelassen. Hierauf mit Wasser zur Marke verdünnt, geschüttelt, absitzen gelassen, filtrirt, 200 CC. davon in $^1/_4$ Literkolben gebracht, mit kohlensaurem und etwas oxalsaurem Ammon und endlich mit Wasser bis zur Marke versetzt, wie vorhergehend behandelt. Hierauf wurde Salmiak zugesetzt, verdampft, geglüht und das erhaltene Chlornatrium gewogen.

Eine Controlbestimmung hiefür findet später Erwähnung.

Zur annähernden Bestimmung der **organischen Substanzen** wurde eine abgemessene Menge des Wassers mit kohlensaurem Natron versetzt, das erhaltene Filtrat eingedampft, der Rückstand bei 180° C. getrocknet, gewogen, hierauf geglüht abermals gewogen und der sich ergebende Gewichtsunterschied als organische Substanz in Rechnung gebracht.

Eine directe Bestimmung der organischen Substanz wurde nach der Methode von Em. **Monier** durch Titriren mit übermangansaurem Kali ausgeführt und dabei in Parallelproben übereinstimmende Resultate erhalten. Nach **Wood's** eingehenden Versuchen berechnet sich dann die organische Substanz durch Multiplication der verbrauchten Milligramme festen übermangansauren Kalis mit der Zahl fünf.

Zur Ermittelung des **beim Kochen** des Wassers **gelöst bleibenden Kalkes** und der **Magnesia** wurde in einem geräumigen Kolben ein Liter Wasser unter zeitweisem Ersatz des verdampfenden Wassers durch destillirtes Wasser eine Stunde gekocht, nach dem Erkalten durch ein trockenes Filter filtrirt, und im Filtrat auf vorhergehend bezeichnete Weise Kalk und Magnesia, als gelöst geblieben, bestimmt. Bei diesem Kochen zeigte sich die Umsetzung des schwefelsauren Kalkes mit der kohlensauren Magnesia zu schwefelsaurer Magnesia, die gelöst blieb, und zu kohlensaurem Kalk, der ausgeschieden wurde.

Behufs Controle der ausgeführten Analysen wurden gewogene Wassermengen bis zur völligen Trockene abgedampft, der

dadurch erhaltene bei 180° C. getrocknete Rückstand als Summe des Gesammt-Rückstandes gewogen, hierauf in schwefelsaure Verbindungen verwandelt, und das Gewicht abermals bestimmt. Mit diesen beiden Gewichtsresultaten wurden nun jene verglichen, welche man erhält, wenn man die Summe der einzeln aus der Analyse hervorgegangenen Ergebnisse für jene Zustände berechnet, wie selbe bei 180° C. oder durch Behandlung der einzelnen Verbindungen mit Schwefelsäure statthaben müssten.

Die erhaltenen schwefelsauren Verbindungen wurden endlich nach Professor Schneider gelöst, Schwefelsäure als schwefelsaurer Baryt gefällt, getrocknet, gewogen und damit die erhaltene Menge des Natrons controlirt.

Viele der Brunnenwässer enthalten nicht blos eine beträchtliche Menge gelöster mineralischer Bestandtheile, sondern auch organische Beimengungen von solcher Feinheit, dass sie mit unbewaffnetem Auge gar nicht bemerkt werden; darunter haben sogar 9 Brunnen unter 32, d. i. 28·1% lebende Thiere.

Mikroskopisch untersucht zeigt das Wasser in dem nach dem Stehenlassen abgesetzten schlammartigen Bodensatze viele schmutzige Fäden, die theils ungetheilt, theils zerfasert, zuweilen farblos und durchscheinend, in den meisten Fällen aber, wie bei den Depotbrunnen, schmutzig braun sind. Sie entstammen den hölzernen Brunnenröhren und sind zumeist Holzzellen, in einzelnen Fällen auch Hanf und Flachsfaser.

An lebenden thierischen Organismen zeigten die meisten Brunnen der Werksanlagen *Cyclops quadricornis*, ein in Pfützen vorkommendes Crustacée, im Brunnen der Kaserne Nr. 3, im Sommer 1873, *Cyclops quadricornis*, Eier derselben, Wasserflöhe und eine grosse Zahl *anguillula fluviatilis*, ein kleines weisses Würmchen, mit sehr lebhaften, schlängelnden Bewegungen; endlich im Wasser der Depotbrunnen Nr. 4_3, 4_5, 6_5, 6_7, 2 und 17 *Cyclops quadricornis* in verschiedenen Grössen, sowie grössere und kleine Würmer.

Die Angabe der gesammten und bleibenden Härte des Wassers ist in Graden nach Fehling, wobei ein Grad die Menge an Kalk und Magnesia in Grammen im Hectoliter Wasser repräsentirt.

Die Dichte des Wassers würde mittelst eines Pienometers bestimmt, und auf seine grösste Dichte bei 4° C. überrechnet.

Die beiliegenden tabellarischen Zusammenstellungen geben die durch die analytischen Operationen aus bestimmten Wassermengen erhaltenen Resultate, und zwar schon die berechneten Mittelwerthe in übersichtlicher Weise an. Die Angaben sind für den Liter und Kilöliter in Grammen angegeben. Diese Beilagen bestehen aus:

Tabelle I. Als Beispiel die Detailresultate der Analyse des Wassers vom westlichen Brunnen der Kaserne Nr. 9, und die daraus gewonnenen Mittelwerthe der Einzelnstoffe.

Tabelle II. Die Mittelwerthe an Einzelnstoffen nach den analytischen Operationen für alle Brunnenwässer.

Tabelle III. Die Zusammensetzung der durch die quantitative Analyse der Wässer erhaltenen Elementarbestandtheile an Säuren und Basen nach ihren nächsten chemischen Verwandtschaften zu Salzen, die Angaben für alle Brunnen.

Tabelle IV. Analytische Resultate der Einzelnstoffe für das Wasser der Arsenals-Kasernenbrunnen, zum Trink- und Hausgebrauche in Verwendung.

Tabelle V. Analytische Resultate an Verbindungen, wie selbe im Wasser der Arsenals-Kasernenbrunnen enthalten sind.

Tabelle VI. Analytische Resultate der Einzelnstoffe für das Wasser der Brunnen in den Werksanlagen der k. k. Artillerie-Zeugsfabrik, zur Dampfkesselspeisung in Verwendung.

Tabelle VII. Analytische Resultate an Verbindungen für die Brunnenwässer der Werksanlagen der k. k. Artillerie-Zeugsfabrik.

Tabelle VIII. Analytische Resultate der Einzelnstoffe für das Wasser der Arsenals-Depotbrunnen, zu Reinigungs- und Feuerlöschzwecken in Verwendung.

Tabelle IX. Analytische Resultate an Verbindungen, wie selbe im Wasser der Arsenals-Depotbrunnen enthalten sind.

Tabelle X. Analytische Resultate von besonderer Wichtigkeit für die Technik und Hygiene, für das Wasser aller Brunnen, in progressiver Aufeinanderfolge nach dem Härtegrade des Wassers, die Angaben für den Hectoliter.

Tabelle XI. Analytische Resultate von besonderer Wichtigkeit für die Technik und Hygiene in drei Gruppen nach der Verwendung des Wassers und in progressiver Aufeinanderfolge nach der Härte desselben.

Tabelle XII. Graphische Darstellung der Härtegrade der untersuchten Brunnenwässer, nach der progressiven Zunahme der Gesammthärte aneinander gereiht, und zwar in Fig. I des Wassers aller Brunnen; Fig. II des Wassers der Kasernen; Fig. III jenes der Werksanlagen, und Fig. IV des Wassers der Depotbrunnen. Die obere Curve in der Figur stellt die gesammten Härtegrade, und die untere die ihnen entsprechenden bleibenden Härtegrade dar.

Tabelle XIII. Enthält die Dichte des Wassers aller Brunnen für die Temperatur von 4° C.

Aus den genannten Tabellen der gewonnenen analytischen Resultate ist deutlich zu entnehmen, dass sämmtliche Brunnen des k. k. Artillerie-Arsenals verhältnissmässig schlechtes Wasser geben, und besonders die in vielen Fällen nicht unbedeutende Menge organischer Materien, sowie das Vorkommen von Salpetersäure sehr bedenklich sind. Diese letztere Thatsache stellt gleichzeitig klar, dass theils durch das Einsikern des Urins aus den Pferdestallungen in den Erdboden, theils auch durch die allgemeine Infiltration solcher Absonderungsprodukte von Seite der Vorstadt Favoriten, welche erst in der neuesten Zeit eine Canalisirung erhielt, der Wassersumpf der Arsenalsbrunnen mit solchen Stoffen infiscirt ist und mit der Reihe von Jahren, wo das Erdreich noch besser mit solchen Stoffen durchdrungen und getränkt sein wird, das Wasser naturgemäss immer schlechter werden muss.

Auffallend gross sind diese der Gesundheit nachtheiligen Stoffe in Menge im Wasser der Kasernen Nr. 3, 5, 7, 12, und im Commandantengebäude. Von den 11 Kasernenbrunnen sind nur drei, also 27·3% frei von Salpetersäure, und fünf, d. i. 45·5% davon enthalten diesen schädlichen Körper überhaupt nicht nur quantitativ bestimmbar, sondern wie die Kaserne Nr. 7 und das Commandantengebäude sogar in sehr bedenklicher Menge.

Allerdings darf nicht vergessen werden, dass es sehr fehlerhaft sein würde, wollte man von dem Genusse eines jeden

Wassers, welches den an gutes Trinkwasser von der Hygiene gestellten Anforderungen nicht entspricht, unter allen Umständen Störungen der Gesundheit erwarten und die Forderungen der Wissenschaft übertrieben bezeichnen, falls die Gesundheit einzelner Personen oder selbst ganzer Familien sich trotz des täglichen Genusses eines nach wissenschaftlichen Grundsätzen für schlecht erklärten Wassers ungestört erhält. Der Mensch gewöhnt sich ja bekanntlich an manche Schädlichkeit derart, dass sie ihm als solche nicht mehr erscheint. Aber zur Zeit epidemisch auftretender Darmleiden, bei Durchfällen, Cholera, etc. sind sie doch entschieden schädlich und strenge zu meiden. Auch solche Personen, welche zu anderer Zeit den Einflüssen schlechten Trinkwassers widerstanden, dürfen dann nicht ohne üble Folgen sich reichlichen Wassergenuss erlauben, wie diess im Sommer 1873 das Wasser der Kaserne Nr. 3 eclatant zeigte, und nach dem Genusse so schädlich wirkte, dass durch Aufstellen eines Wachpostens gewaltsam der Gebrauch dieses Wassers hintangehalten werden musste. Jedermann bekam kurze Zeit nach dem Genusse Brechdurchfall und dabei endeten viele mit dem Tode. Die in Zersetzung begriffenen organischen Stoffe mussten also krankheitserregende Fermente entwickeln. Auch fand man gerade um diese Zeit lebende Thiere in grosser Zahl in diesem Wasser, wie *Cyclops quadricornis*, Eier derselben, Wasserflöhe und *Anguillula fluviatilis*. Das Wasser wurde durch Einwerfen von Steinsalz und mehrtägiges Ausschöpfen von diesen eckligen Bewohnern befreit.

Im Allgemeinen geht dem Wasser der meisten Kasernenbrunnen keine der von der sinnlichen Wahrnehmung geforderten Eigenschaften, Klarheit bis zu einem gewissen Grade, Farblosigkeit und andere Merkmale ab, und doch zeigt die Erfahrung und die Resultate der chemischen Analyse, dass es in vielen Fällen im hohen Grade verunreinigt ist und zu gewissen Zeiten der Gesundheit auch bedeutend nachtheilig werden kann.

Von den 11 Kasernenbrunnen ist schon, abgesehen von der Menge organischer Substanz, die Menge an Gesammtrückstand bedeutend zu nennen, da 7 dieser Wässer, d. i. 63·6% den für gutes Trinkwasser zulässigen Bestand von 55 Grammen Gesammtrückstand im Hectoliter überschreiten und beispielsweise die

Menge im Wasser des Commandantengebäudes die Höhe von 95·2 Grammen, und in jenem der Kaserne Nr. 7 96·98 Gramme erreicht.

Von allen 32 Brunnen übersteigen diesen Grenzwerth des gesammten Rückstandes 24, d. i. 75%.

Für den Hausgebrauch zum Kochen und Waschen ist das Wasser der Kasernenbrunnen durchgehends sehr hart, besonders aber jenes der Kaserne Nr. 7. Das Wasser dieses Objectes gekocht, sieht einer Kalkmilch nicht unähnlich, ist gelinde gesagt geradezu im Aussehen verblüffend, und es scheint unbegreiflich, wie darin Fleisch oder sonstige Genussartikel gesotten und zubereitet werden können.

Die Daten über die Härte sind am bequemsten aus der Tabelle Nr. 10 und 11 zu entnehmen und es folgen darin die einzelnen Brunnen nach der zunehmenden Härte auf einander. Zur leichteren Übersicht sind diese Daten auch in der Tafel Nr. XII graphisch dargestellt.

Von den 32 untersuchten Brunnen liefern nur 5, d. i. 15·6%, Wasser, dessen Gesammthärte 18 Grade und 8, d. i. 25%, deren Härte 20 Grade nicht übersteigt, welches daher nach den Forderungen der Wissenschaft noch als unbedenklich angesehen werden kann. Von den 11 Kasernenbrunnen, deren Wasser zum Trinkgebrauch Anwendung findet, sind nur 2, d. i. 18·2%, mit ihrer Gesammthärte unter 18 Graden, jenes der Kaserne Nr. 7 zeigt sogar bei 17·7 Graden bleibender Härte eine Gesammthärte von 37·1 Graden.

Aus der graphischen Darstellung der Härteverhältnisse ist weiters zu entnehmen, dass die Curve der Gesammthärte anfangs rasch steigt, vom vierten Brunnen angefangen eine sanfte Krümmung annimmt, und mit dem 27. Wasser wieder ein rasches Steigen beginnt, die Härte also bedeutend zunimmt. Während ferner die Curve der Gesammthärte fast continuirlich aufsteigt, geht jene der bleibenden Härte abwechselnd auf und ab und bildet eine Zickzacklinie; die bleibende Härte steht daher mit der Gesammthärte in keinem constanten Verhältnisse.

In dieser Beziehung nicht besonders besser ist auch das Wasser in den Werksanlagen zur Dampfkesselspeisung benützt, und da am schlechtesten jenes vom Objecte Nr. 21.

Mit diesem Wasser wird gegenwärtig nur mehr eine Dampfmaschine von 20 Pferdekraft im Objecte Nr. 23 gespeist, während die Wolf'sche Dampfmaschine von 32 Pferdekraft im Objecte Nr. 21 zum Speisen der Dampfkessel ihr eigenes Condensationswasser mit grossem Vortheil benützt, welches im freien Gusshaus-Canale gesammelt und dann wieder zugepumpt wird.

Die Maschine des Objectes Nr. 23 braucht per Stunde 20 Kubikfuss Wasser zur Dampfbildung, was bei 10 Arbeitsstunden des Tages 200 Kubikfuss, d. i. 6·316 Kiloliter beträgt. Ein Kochversuch des besagten Wassers gab im Liter 0·2317 Gramme ausgeschiedener kohlensaurer Salze, was für den Kiloliter Wasser 231·7 Gramme beträgt.

Diess gibt bei dem täglichen Bedarf von 6·316 Kiloliter Wasser 1·45 Kilogramme, d. i. 2·65 Wiener Pfunde ausgeschiedener kohlensaurer Salze.

In vier Wochen beträgt diess ......34·8 Kg. = 62·2 Pfd.
„ sechs „ „ „ ......52·2 Kg. = 93·2 Pfd.

Gleich schlecht stellt sich das Wasser des Reservoirs vom Objekte Nr. 20 der Schmiedewerkstätte, welches zum Betriebe von 2 Dampfmaschinen à 14 Pferdekräfte, von Dampfhämmern im Gesammtbetrage von 8 Pferdekräften und von Schweissöfen mit einem Wasserverbrauch von pro Stunde 40 Kubikfuss, gibt bei 10 Stunden Arbeitszeit für den Tag 400 Kubikfuss, d. i. 12·632 Kiloliter Wasser.

Ein Kochversuch dieses Wassers scheidet im Liter 0·1973 Gr., somit im Kiloliter 197·3 Gramme kohlensaurer Salze ab.

Dem entspricht per Tag eine Salzmenge von 2·492 Kilogrammen = 4·46 Wr. Pfd.

In vier Wochen gibt diess ..... 59·81 Kg. = 106·95 Pfd.
„ sechs „ „ „ ..... 89·71 Kg. = 160·16 Pfd.

Wenn man solche Mengen von gebildetem Kesselstein berücksichtiget, so lässt sich leicht ermessen, welche Nachtheile dieselben auf die Kesselwände, auf den Brennmaterialverbrauch und auf die Reinigung der Kessel mit sich bringen, abgesehen von der Gefahr der plötzlichen Zerstörung eines mit Kesselsteinablagerungen überladenen Kessels.

Diese Kessel müssen auch thatsächlich alle vier bis sechs Wochen ausgeblasen und gereinigt werden.

Ein Kesselstein des Objectes Nr. 20, von weissgelbem Aussehen, mürbe, lose zusammenhängend, ergab bei der Analyse folgende Zusammensetzung:

Kohlensauren Kalk	=	90·30
schwefelsaure Magnesia	=	0.89
kohlensaure Magnesia	=	4·60
Eisenoxyd und Thonerde	=	2·59
Kieselsäure	=	1·55
		99·93

Dieser Kesselstein besteht somit, trotzdem das Wasser so viel Magnesia enthält, doch nur zum grössten Theile aus kohlensaurem Kalk, was darin seine Erklärung und Begründung findet, dass Gyps und kohlensaure Magnesia sich beim Kochen in unlöslichen kohlensauren Kalk und lösliche schwefelsaure Magnesia umsetzen. Weil aber mit der Zeit das Wasser von den gelöst bleibenden Verbindungen wegen der eintretenden Concentration auch auszuscheiden beginnt, so ist dadurch das Vorhandensein von Eisenoxyd, Thonerde, Kieselsäure und schwefelsaurer Magnesia erklärt.

Nach dieser kurzen Auseinandersetzung ist also die Zusammensetzung des genannten Kesselsteines, mit den mineralischen Bestandtheilen des zugehörigen Speisewassers verglichen nichts Widersprechendes.

Nur statistisch analytische Resultate würden nähere und noch interessantere Aufschlüsse geben, in wieferne die Wässer mit den Jahreszeiten und nach Jahren überhaupt Veränderungen in ihrer Beschaffenheit und Güte aufweisen.

Doch selbst nach dem nur spärlich vorliegenden Materiale für eine so hochwichtige Frage, von der normale Gesundheitsverhältnisse vieler Menschenleben abhängen, bleibt ohne Zweifel und vieles Bedenken die Zuleitung des Hochquellenwassers, zum Mindesten für den Trinkgebrauch des k. k. Artillerie-Arsenals ein unausweichliches Bedürfniss, da sich eine Versäumniss in dieser Richtung möglicherweise in späteren Jahren, und besonders bei ungünstigen sanitären Verhältnissen, aus mannigfachen Gründen bitter rächen könnte.

Tabelle I.

Menge des Chlor.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	Chlorsilber Gramme	entsprechend Chlor Gramme	für den Liter		für den Hectoliter	
			nach den Einzeln-bestimmungen	im Mittel	nach den Einzeln-bestimmungen	im Mittel
1000	0·0684	0·01691	0·0169	0·0167	1·69	1·67
1500	0·0997	0·02470	0·0165		1·65	

Menge der Schwefelsäure.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	schwefelsaurer Baryt Gramme	entsprechend Schwefelsäure Gramme	für den Liter		für den Hectoliter	
			nach den Einzeln-bestimmungen	im Mittel	nach den Einzel-bestimmungen	im Mittel
1000	0·2440	0·0838	0·0838	0·0842	8·38	8·42
250	0·0618	0·0212	0·0847		8·47	

Gesammte Kohlensäure.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	Kohlensäure Gramme	für den Liter		entsprechend bei 0° C. und 0·76 Meter Druck, Cubikcentimeter	für den Hectoliter	
		nach den Einzeln-bestimmungen	im Mittel		nach den Einzeln-bestimmungen	im Mittel
1000	0·2785	0·2785	0·2784	141·84	27·85	27·84
1000	0·2783	0·2783			27·83	
Menge der freien und zu Bicarbonaten verbundenen Kohlensäure. Nach der Methode von Pettenkofer durch Titriren mit Oxalsäure.						
100	0·01694	0·01694	0·1694	86·35	16·94	16·9
1000	0·1694	0·1694			16·94	
Menge der an die Basen zu einfach kohlensauren Salzen gebundenen Kohlensäure.						
1000	0·1091	0·1091	0·1090	55·49	10·91	10·90
1000	0·1089	0·1089			10·89	

Kieselsäure.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	Kieselsäure Gramme	für den Liter nach den Einzelnbestimmungen	für den Liter im Mittel	für den Hektoliter nach den Einzelnbestimmungen	für den Hektoliter im Mittel
500	0·0058	0·0116	0·01165	1·16	1·165
1000	0·0117	0·0117		1·17	

Eisenoxydul.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	Eisenoxyd Gramme	entsprechend Eisenoxydul Gramme	für den Liter nach den Einzelnbestimmungen	für den Liter im Mittel	für den Hektoliter nach den Einzelnbestimmungen	für den Hektoliter im Mittel
500	0·0037	0·0017	0·0033	0·0034	0·33	0·34
1000	0·0077	0·0035	0·0035		0·35	

Kalk.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	kohlensaurer Kalk Gramme	Ätzkalk Gramme	schwefelsaurer Kalk Gramme	für den Liter nach den Einzelnbestimmungen	für den Liter im Mittel	für den Hectoliter nach den Einzelnbestimmungen	für den Hectoliter im Mittel
500	0·0892	0·0499	0·1210	0·0998	0·1000	9·98	10·00
1000	0·1787	0·1019	0·2430	0·1001		10·01	

Magnesia.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	pyrophosphorsaure Magnesia Gramme	entsprechend Magnesia Gramme	für den Liter		für den Hectoliter	
			nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel	nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel
500	0·0943	0·0340	0·0680	0·0675	6·8	6·75
1000	0·1861	0·0670	0·0670		6·7	

Natron.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	schwefelsaures Natron Gramme.	Chlornatrium Gramme	entsprechend Natron Gramme.	entsprechend Natrium Gramme	für den Liter		für den Hectoliter	
					nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel	nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel
1000	0·0324	.	0·0141	0·0104	0·0141	0·0177	1·41	1·77
250	0·0092	.	0·0040	0·0030	0·0160		1·60	
1250	.	0·0537	0·0286	0·0212	0·0229		2·29	

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	organische Substanz Gramme	für den Liter		für den Hectoliter		Anmerkung
		nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel	nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel	
1000	0·0320	0·0320	0·0283	3·2	2·83	Die zwei letzten Bestimmungen wurden durch Titriren mit Chamäleon erhalten und dabei schon die Menge des dem Eisen entsprechenden Chamäleons berücksichtiget.
250	0·0400	0·0400		4·0		
Durch Titriren mit Chamäleon						
500	0·0100	0·0200		2·0		
250	0·0055	0·0220		2·2		

Gesammter Rückstand.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	Rückstand		für den Liter			für den Hectoliter		
	bei 180° C. getrocknet Gramme	in schwefelsaure Verbindungen verwandelt	bei 180° C. getrocknet		schwefelsaure Verbindungen	bei 180° C. getrocknet		schwefelsaure Verbindungen
			nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel		nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel	
1000	0·4049	0·4910	0·4049	0·4045	0·4915	40·49	40·45	49·15
250	0·1010	0·1230	0·4040			40·40		

Nummer des Objectes	Tiefe des Brunnens in Fussen	Chlornatrium	Chlormagnesium	Salpetersaurer Kalk	…lensaures Eisenoxydul
1	82	0·0563	—	0·007	0040
2	47	0·0580	—	0·012	0390
3	44	0·0704	0·0076	0·001	0120
4_2	38	0·0297	0·0171	0·004	0091
4_5	38	0·0425	—	0·002	0208
5	41	0·0567	—	0·000	0066
6_5	54	0·0466	—	0·001	0047
6_7	39	0·0056	—	0·009	0076
7	37	0·1291	—	0·023	0080
8	68 1/2	0·0431	—	0·000	0080
9 westl.	73	0·0313	—	Spuren	0076
9 östlich	130	0·0160	—	—	0019
11	44	0·0633	—	0·001	·0107
12	42	0·0109	0·0327	0·0004	0136
13_{12}	61	0·0386	—	Spuren	·0076
13_{14}	64 1/4	0·0473	—	Spuren	·0139
14	60	0·0363	—	Spuren	·0062
15_{14}	94	0·0386	—	Spuren	·0072
15_{16}	77 1/2	0·0208	—	Spuren	·0069
16	63 1/2	0·0454	—	Spuren	·0104
17	68 1/2	0·0263	—	Spuren	·011
19_1	67	0·0249	0·0084	—	·012
19_2	67	0·0412	—	—	·005
19_3	69	0·0333	—	—	·007
19_4	70	0·0290	0·0329	—	·008
19_5	131 1/4	0·0352	—	—	·012
20	86 / 100	0·0257	—	—	·005
21	130 / 137	0·0464	—	—	0·005
24	86 / 78	0·0331	—	—	0·008
25	56	0·0524	—	—	0·005
Gusshaus-Canal	Null	0·0194	—	—	0·009
Gasanstalt	54	0·0356	0·0302	0·001	0·011

Doppelt kohlensaure Magnesia	Einfach kohlensaure Magnesia	Menge d. beim Kochen ausgeschiedenen kohlensauren Salze	Härte Gesammte	Härte Bleibende	Lebende Thiere
			Grade nach Fehling		
0·3520	0·2007	0·1672	32·6	23·2	—
0·4484	—	0·1435	23·2	15·3	—
0·3956	0·0065	0·2609	27·5	13·3	Cyclop., Würm., Wasserflöhe.
0·2508	0·0685	0·2407	26·2	12·9	Würm., Cyclop.
0·2566	0·0084	0·1806	20·4	10·3	Würm., Cyclop.
0·3217	0·0266	0·1978	24·2	13·1	—
0·3686	—	0·1618	21·6	13·5	grosse u. kleine Würm., Cyclop.
0·2106	—	0·0741	11·6	7·6	—
0·4067	0·0737	0·3502	37·1	17·7	—
0·2872	0·0609	0·2624	27·1	12·6	—
0·2160	—	0·1283	10·2	2·8	—
0·1616	—	0·1680	14·5	7·1	—
0·3287	0·0976	0·2331	27·4	14·6	—
0·1966	0·0815	0·2087	23·9	12·5	—
0·3328	—	0·1938	21·6	10·9	—
0·4672	0·1407	0·3190	40·5	22·7	—
0·2464	—	0·1703	19·8	10·3	—
0·3916	0·0185	0·2038	25 8	14·7	—
0·3238	—	0·2098	23·6	11·7	—
0·3142	—	0·2000	23·4	12·0	—
0·4943	0·0531	0·2579	33·9	19·5	Würmer
0·3197	—	0·1347	18·7	11·2	—
0·3417	0·0074	0·1728	18·1	12·7	—
0·3852	—	0·1350	21·7	14·2	—
0·3700	0·0500	0·1858	28·7	18·4	—
0·3668	0·0966	0·1749	26·6	16·8	Cyclopen
0·2089	0·0036	0·1973	17·7	8·0	Cyclopen
0·4198	—	0·2317	26·5	14·0	—
0·2845	0·0208	0·1892	20·5	10·2	Cyclopen
0·4108	—	0·1376	22·8	15·2	Cyclopen
0·1094	0·0014	0·0875	10·3	5·2	—
0·5251	0·0420	0·2592	36·3	21·7	—

Gramn

Verbindungen	Comn g Liter	Kilolite
Chlornatrium	0·056	36·3
Chlormagnesium	.	.
Salpetersaurer Kalk	0·007	.
Schwefelsaures Natron	0·046	53·1
Schwefelsaurer Kalk	0·175	163·3
Kohlensaurer Kalk	0·081	96·8
Kohlensaure Magnesia	0·431	161·7
Kohlensaures Eisenoxydul	0·002	4·5
Kieselsäure	0·019	17·2
Halbgebundene Kohlensäure	0·159	128·9
Freie Kohlensäure	.	67·3
Gesammter Rückstand	0·95	570·C
Fixer Rückstand	0·90	537·6
Organische Materie	0·04	32·4
Doppelt kohlensaurer Kalk	0·11	139·4
Doppelt kohlensaure Magnesia	0·35	246·4
Doppelt kohlensaures Eisenoxydul	0·00	6·2
Einfach kohlensaure Magnesia	0·20	.
Menge der beim Kochen ausgeschiedenen Salze	0·16	170·
Gesammte Härtegrade nach Fehling		19.8
Bleibende Härtegrade nach Fehling		10·3
Verunreinigungen und lebende Thiere	fein	Holzfaser

der analytischen

'wie selbe im Wasser der k. k. Artillerie-Arsenals-Kasernen-Brunnen, zu

Nr. 1 ...andanten-gebäude		Nr. 3		Nr. 5		Nr. 7	
	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter
3	56·3	0·0704	70·4	0·0567	56·7	0·1291	129·1
	.	0·0076	7·6	.	.	.	.
38	7·38	0·0011	1·1	0·0008	0·8	0·0235	23·5
5	46·5	.	.	0·0685	68·5	0·0162	16·
4	175·4	0·1479	147·9	0·1190	119·0	0·1939	193·
2	81·2	0·1498	149·8	0·1424	142·4	0·2178	217·
7	431·7	0·2661	266·1	0·2377	237·7	0·3406	340·
9	2·9	0·0087	8·7	0·0048	4·8	0·0058	5·
4	19·4	0·0174	17·4	0·0174	17·4	0·0180	18·
8	159·8	0·2052	205·2	0·1750	175·0	0·2386	238·
	.	.	.	.	.	.	.
20	952·0	0·7485	748·5	0·7240	724·0	0·9698	969·
41	904·1	0·6860	686·0	0·6848	684·8	0·9390	939·
79	47·9	0·0625	62·5	0·0392	39·2	0·0308	30·
69	116·9	0·2157	215·7	0·2050	205·0	0·3136	313·
20	352·0	0·3956	395·6	0·3217	321·7	0·4067	406·
40	4·0	0·0120	12·0	0.0066	6·6	0·0080	8·
07	200·7	0·0065	6·5	0·0266	26·6	0·0737	73·
72	167·2	0·2609	260·9	0·1978	197·8	0·3502	350·
32·6		27·5		24·2		37·1	
23·2		13·3		13·1		17·7	
...e Holzfaser		Holzfaser, Cyclopen, Würmer, Wasserflöhe		geringe Menge feiner Holzfaser		feine Holzfaser	

abelle V

esultate an Verbindungen,

[D]rink- und Hausgebrauche in Verwendung, enthalten sind; die Angaben in Gramm

Object							
Nr. 9 westlicher Brunnen		Nr. 9 östlicher Brunnen		Nr. 12		Nr. 14	
Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kilolite
0·0313	31·3	0·0160	16·0	0·0109	10·9	0·0363	36·3
.	.	.	.	0·0327	32·7	.	.
Spuren	.	.	.	0·0004	0·4	Spuren	.
0·0052	5·2	0·0039	3·9	.	.	0·0531	53·1
0·1382	138·2	0·0542	54·2	0·1639	163·9	0·1633	163·3
0·0770	77·0	0·1297	129·7	0·1030	103·0	0·0968	96·8
0·1418	141·8	0·1061	106·1	0·2104	210·4	0·1617	161·7
0·0055	5·5	0·0036	3·6	0·0099	9·9	0·0045	4·5
0·0116	11·6	0·0184	18·4	0·0094	9·4	0·0172	17·2
0·1090	109·0	0·1138	113·8	0·1166	116·6	0·1289	128·9
0·0608	60·8	0·0210	21·0	.	.	0·0673	67·3
0·4045	404·5	0·3412	348·2	0·6416	641·6	0·5700	570·C
0·3762	376·2	0·3352	335·2	0·6210	621·0	0·5376	537·6
0·0283	28·3	0·0060	6·0	0·0206	20·6	0·0324	32·4
0·1108	110·8	0·1866	186·6	0·1483	148·3	0·1394	139·4
0·2160	216·0	0·1616	161·6	0·1966	196·6	0·2464	246·4
0·0076	7·6	0·0049	4·9	0·0136	13·6	0·0062	6·[illegible]
.	.	.	.	0·0815	81·5	.	.
0·1283	128·3	0·1680	168·0	0·2087	208·7	0·1703	170·[illegible]
16.8		14·5		23·9		19.8	
10·2		7·1		12·5		10·3	
Sand, Holzfaser, Converven.		feine Holzfaser		feine Hanffäden, Holzfaser		feine Holzfaser	

Nr. 16		Nr. 19_1 Gewehrfabrik		Nr. 19_2 Gewehrfabrik	
Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter
0·0454	45·4	0·0249	24·9	0·0412	41·2
.	.	0·0084	8·4	.	.
Spuren	.	.	.	.	.
0·0462	46·2	.	.	0·0043	4·3
0·0712	71·2	0·1549	154·9	0·1486	148·6
0·1896	189·6	0·0376	37·6	0·0182	18·2
0·2062	206·2	0·2098	209·8	0·2314	231·4
0·0075	7·5	0·0087	8·7	0·0040	4·0
0·0148	14·8	0·0146	14·6	0·0124	12·4
0·1948	194·8	0·1278	127·8	0·1272	127·2
0·0172	17·2	0·0154	15·4	.	.
0·6416	641·6	0·4800	480·0	0·5020	502·0
0·5792	579·2	0·4589	458·9	0·4601	460·1
0·0624	62·4	0·0211	21·1	0·0419	41·9
0·2730	273.0	0·0541	54·1	0·0264	26·4
0·3142	314·2	0·3197	319·7	0·3417	341·7
0·0104	10·4	0·0120	12·0	0·0055	5·0
.	.	.	.	0·0074	7·4
0·2000	200·0	0·1347	134·7	0·1728	172·8
23·4		18·7		18·1	
12·0		11·2		12·7	
Hanfläden, Holzfaser		rein		feine Holzfaser	

die A
wie se

Verbindungen	Nr. 2		I		
	Liter	Kiloliter	Lite	lo- ter	
Chlornatrium	0·0580	58·0	0·02	0·8	0
Chlormagnesium	—	—	0·01	—	
Salpetersaurer Kalk	0·0129	12·9	0·00	—	S
Schwefelsaures Natron	0·0447	44·7	—	2·1	0
Kohlensaures Natron	—	—	—	3·1	
Schwefelsaurer Kalk	0·1016	101·6	0·12	—	0
Kohlensaurer Kalk	0·0817	81·7	0·16	1·1	0
Kohlensaure Magnesia	0·2943	294·3	0·23	2·5	0
Kohlensaur. Eisenoxydul	0·0283	28·3	0·00	5·0	0
Kieselsäure	0·0146	14·6	0·01	7·0	0
Halbgebundene Kohlensäure	0·2010	201·0	0·15	45·6	0
Freie Kohlensäure	0·0042	4·2	—	14·1	
Gesammter Rückstand	0·6880	688·0	0·62	48·0	0
Fixer Rückstand	0·6282	623·2	0·58	72·8	0
Organische Materie	0·0648	64·8	0·04	75·2	0
Doppelt kohlensaurer Kalk	0·1176	117·6	0·23	47·2	0
Doppelt kohlensaures Eisenoxydul	0·0390	39·0	0·00	6·9	C
Doppelt kohlensaure Magnesia	0·4484	448·4	0·25	2 8	C
Einfach kohlensaure Magnesia	—	—	0·06	—	(
Menge der beim Kochen ausgeschiedenen Salze	0·1435	143·5	0·24	01·8	(
Gesammte Härtegrade nach Fehling	23·2				
Bleibende Härtegrade nach Fehling	15·3				
Verunreinigungen, lebende Thiere	Holzfaser		Holzf mer,	r	H

…gaben in Grammen.

Nr. 17		Gasanstalt		Nr. 19₃ Gewehrfabrik		Nr. 19₄ Gewehrfabrik	
Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter
·0263	26·3	0·0356	35·6	0·0333	33·3	0·0290	29·0
—	—	0·0302	30·2	—	—	0·0329	32·9
puren	—	0·0018	1·8	—	—	—	—
·0380	38·0	—	—	0·0403	40·3	—	—
						schwefels. Magnesia	
—	—	—	—	—	—	0·0525	52·5
·2319	231·9	0·2645	264·5	0·2269	226·9	0·2729	272·9
·1130	113·0	0·0991	99·1	0·0057	5·7	—	—
·3776	377·6	0·3866	386·6	0·2528	252·8	0·2927	292·7
·0080	8·0	0·0088	8·8	0·0051	5·1	0·0058	5·8
·0166	16·6	0·0116	11·6	0·0136	13·6	0·0144	14·4
·2226	222·6	0·2279	227·9	0·1241	124·1	0·1272	127·2
—	—	—	—	0·0031	3·1	—	—
·9180	918·0	0·9508	950·8	0·6060	606·0	0·8080	808·0
··7972	797·2	0·8594	859·4	0·5777	577·7	0·7072	707·2
··1208	120·8	0·0914	91·4	0·0283	28·3	0·1008	100·8
)·1627	162·7	0·1427	142·7	0·0082	8·2	—	—
)·0110	11·0	0·0110	11·0	0·0070	7·0	0·0080	8·0
)·4943	494·3	0·5251	525·1	0·3852	385·2	0·3700	370·0
)·0531	53·1	0·0420	42·0	—	—	0·0500	50·0
)·2579	257·9	0·2592	259·2	0·1350	135·0	0·1858	185·8
33·9		36·3		21·7		28·7	
19·5		21·7		14·2		18·4	
.olzfaser, Würmer.		feine Holzfaser		feine Holzfaser		feine Holzfaser	

Kalk,

welcher beim Kochen des Wassers gelöst bleibt.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	kohlensaurer Kalk Gramme	entspricht Kalk für den Liter		entspricht Kalk für den Hectoliter		Anmerkung
		nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel	nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel	
1000	0·0646	0·0362	0·0371	3·62	3·71	Der Kalk wurde als oxalsaurer Kalk gefällt.
1500	0·1017	0·0380		3·80		

Magnesia,

welche beim Kochen des Wassers gelöst bleibt.

Aus einer Wassermenge in Cubikcentimetern	pyrophosphorsaure Magnesia Gramme	entspricht Magnesia für den Liter		entspricht Magnesia für den Hectoliter		Anmerkung
		nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel	nach den Einzelnbestimmungen	im Mittel	
1000	0·1828	0·0659	0·0676	6·59	6·76	Die Magnesia wurde mit phosphorsaurem Natron gefällt.
1500	0·2886	0·0693		6·93		

Tabelle VI

der analytischen Resultate an Einzelnstoffen,

wie selbe im Wasser der Brunnen für die Werksanlagen der k. k. Artillerie-Zeugsfabrik enthalten sind, und welches zur Dampfkesselspeisung Anwendung findet; die Angaben in Grammen.

Bestandtheile	Object											
	Nr. 19_5. Gewehrfabrik		Nr. 20. Wasserreservoir der Schmiede		Nr. 21. Wasserreservoir des Bohrwerks		Nr. 24. Wasserreservoir der Wagner		Nr. 25. Gusshaus-eingang		Canal mit Condensations-wasser des Objectes Nr. 21	
	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter
Chlor	0·0214	21·4	0·0156	15·6	0·0282	28·2	0·0201	20·1	0·0318	31·8	0·0118	11·8
Schwefelsäure	0·0986	98·6	0·0708	70·8	0·1528	152·8	0·0980	98·0	0·0936	93·6	0·0692	69·2
Gesammte Kohlensäure	0·3687	368·7	0·2554	255·4	0·3434	343·4	0·2972	297·2	0·3475	347·5	0·1533	153·3
Gebundene Kohlensäure	0·2096	209·6	0·1282	128·2	0·1685	168·5	0·1540	154·0	0·1726	172·6	0·0804	80·4
Halbgebundene Kohlensäure	0·1591	159·1	0·1272	127·2	0·1685	168·5	0·1432	143·2	0·1726	172·6	0·0729	72·9
Freie Kohlensäure	.	.	.	.	0·0064	6·4	.	.	0·0023	2·3	.	.
Kieselsäure	0·0142	14·2	0·0134	13·4	0·0320	32·0	0·0158	15·8	0·0148	14·8	0·0066	6·6
Eisenoxyd und Thonerde	0·0064	6·4	0·0030	3·0	0·0026	2·6	0·0040	4·0	0·0028	2·8	0·0046	4·6

Kalk	0·1050	105·0	0·1096	109·6	0·1342	134·2	0·1062	106·2	0·0996	99·6	0·0686	68·6
Magnesia	0·1606	160·6	0·0670	67·0	0·1312	131·2	0·0988	98·8	0·1284	128·4	0·0342	34·2
Natron	0·0203	20·3	0·0233	23·3	0·0265	26·5	0·0368	36·8	0·0327	32·7	0·0447	44·7
Gesammter Rückstand	0·6932	693·2	0·4600	460·0	0·7420	742·0	0·5240	524·0	0·6200	620·0	0·3368	336·8
Fixer Rückstand	0·6388	638·8	0·4252	425·2	0·6640	664·0	0·5068	506·8	0·6044	604·4	0·3164	316·4
Organische Materie	0·0544	54·4	0·0348	34·8	0·0780	78·0	0·0172	17·2	0·0156	15·6	0·0204	20·4
Schwefelsaure Verbindungen	0·8040	804·0	0·5332	533·2	0·8148	814·8	0·6040	604·0	0·7188	718·8	0·3828	382·8
Kalk beim Kochen gelöst geblieben	0·0106	10·6	0·0240	24·0	0·0120	12·0	0·0230	23·0	0·0270	27·0	0·0226	22·6
Magnesia beim Kochen gelöst geblieben	0·1576	157·6	0·0560	56·0	0·1282	128·2	0·0794	79·4	0·1246	124·6	0·0316	31·6
Kalk beim Kochen ausgeschieden	0·0944	94·4	0·0976	97·6	0·1262	126·2	0·0832	83·2	0·0726	72·6	0·0460	46·0
Magnesia beim Kochen ausgeschieden	0·0030	3·0	0·0110	11·0	0·0030	3·0	0·0194	19·4	0·0038	3·8	0·0026	2·6
Menge der beim Kochen ausgeschiedenen Salze	0·1749	174·9	0·1973	197·3	0·2317	231·7	0·1892	189·2	0·1376	137·6	0·0875	87·5
Volum der halbgebundenen Kohlensäure	80·899 CC.		64·678 CC.		85·679 CC.		72·814 CC.		87·764 CC.		37·07 CC.	
Volum der freien Kohlensäure	.		.		3·254 CC.		.		1·2 CC.		.	
Lebende Thiere	Cyclopen		Cyclopen		.		Cyclopen		Cyclopen		.	

Tabelle VII

der analytischen Resultate an Verbindungen,

wie selbe im Wasser der Brunnen für die Werksanlagen der k. k. Artillerie-Zeugsfabrik enthalten sind und welches zur Dampfkesselspeisung Anwendung findet; die Angaben in Grammen.

Verbindungen	Object											
	Nr. 19_5 Gewehrfabrik		Nr. 20. Wasserreservoir der Schmiede		Nr. 21. Wasserreservoir des Bohrwerks		Nr. 24. Wasserreservoir der Wagner		Nr. 25. Gusshaus-eingang		Canal mit Condensations-wasser des Objectes Nr. 21	
	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter	Liter	Kiloliter
Chlornatrium	0·0352	35·2	0·0256	25·6	0·0464	46·4	0·0331	33·1	0·0524	52·4	0·0194	19·4
Schwefelsaures Natron	0·0041	4·1	0·0215	21·5	0·0035	3·5	0·0442	44·2	0·0637	63·7	0·0785	78·5
Schwefelsaurer Kalk	0·1637	163·7	0·0998	99·8	0·2563	256·3	0·1242	124·2	0·0981	98·1	0·0425	42·5
Kohlensaurer Kalk	0·0671	67·1	0·1223	122·3	0·0512	51·2	0·0985	98·5	0·1057	105·7	0·0913	91·3
Kohlensaure Magnesia	0·3372	337·2	0·1407	140·7	0·2755	275·5	0·2075	207·5	0·2696	269·6	0·0718	71·8
Kohlensaures Eisenoxydul	0·0093	9·3	0·0043	4·3	0·0037	3·7	0·0058	5·8	0·0040	4·0	0·0066	6·6
Kieselsäure	0·0142	14·2	0·0134	13·4	0·0320	32·0	0·0158	15·8	0·0148	14·8	0·0066	6·6
Halbgebundene Kohlensäure	0·1591	159·1	0·1272	127·2	0·1685	168·5	0.1432	143·2	0·1726	172·6	0·0729	72·9

Freie Kohlensäure	.	.	.	.	0·0064	6·4	.	.	.	.	.	.
Gesammter Rückstand	0·6932	693·2	0·4600	460·0	0·7420	742·0	0·5240	524·0	0·6200	620·0	0·3368	336·8
Fixer Rückstand	0·6388	638·8	0·4252	425·2	0·6640	664·0	0·5068	506·8	0·6044	604·4	0·3164	316·4
Organische Materie	0·0544	54·4	0·0348	34·8	0·0780	78·0	0·0172	17·2	0·0156	15·6	0·0204	20·4
Doppelt kohlensaurer Kalk	0·0966	96·6	0·1761	176·1	0·0737	73·7	0·1415	141·5	0·1522	152·2	0·1315	131·5
Doppelt kohlensaures Eisenoxydul	0·0128	12·8	0·0059	5·9	0·0051	5·1	0·0080	8·0	0·0055	5·5	0·0091	9·1
Doppelt kohlensaure Magnesia	0·3668	366·8	0·2089	208·9	0·4198	419·8	0·2845	284·5	0·3625	362·5	0·1094	109·4
Einfach kohlensaure Magnesia	0·0966	96·6	0·0036	3·6	.	.	0·0208	20·8	0·0317	31·7	0·0014	1·4
Menge der beim Kochen ausgeschiedenen Salze	0·1749	174·9	0·1973	197·3	0·2317	231·7	0·1892	189·2	0.1376	137·6	0·0875	87·5
Gesammte Härtegrade nach Fehling	26·6		17·7		26·5		20·5		22·8		10·3	
bleibende Härtegrade nach Fehling	16·8		8·0		14·0		10·2		15·2		5·2	
lebende Thiere	Holzfaser Cyclopen.		Cyclopen		feine Faser		kleine Fäden Cyclopen		Cyclopen		trübe	

Tabelle X

analytischer Resultate von besonderer Wichtigkeit

des Wassers der k. k. Artillerie-Arsenals-Brunnen, in progressiver Aufeinanderfolge nach dem Härtegrade, die Angaben für den Hectoliter in Grammen.

Nummer des Objectes	Härte (Grade nach Fehling)		Organische Materie	Salpetersäure	Gesammter Rückstand	Menge d. beim Kochen ausgeschiedenen kohlens. Salze	Lebende Thiere
	Gesammte	Bleibende					
Zulässiger Betand	18	—	5·0	0·5	55·0	—	—
Gusshaus-Canal	10·3	5·2	2·1	—	33·7	8·75	—
6_7	11·6	7·6	7·3	0·039	21·6	7·41	—
9 östlich	14·5	7·1	0·6	—	34·1	16·80	—
9 westlich	16·8	10·2	2·8	Spuren	40·5	12·83	—
20	17·7	8·0	3·5	—	46·0	19·73	Cyclopen
19_8	18·1	12·7	4·2	—	50·2	17·28	—
19^1	18·7	11·2	2·1	—	48·0	13·47	—
14	19·8	10·3	3·2	Spuren	57·0	17·03	—
4_5	20·4	10·3	6·5	0·180	62·1	18·06	Cyclop., Würm.
24	20·5	10·2	1·7	—	52·4	18·92	Cyclopen
6^5	21·6	13·5	8·3	0·070	63·6	16·18	grosse u. kleine Würm., Cyclop.
13_{18}	21·6	10·9	9·2	Spuren	60·4	19·38	—
19_3	21·7	14·2	2·8	—	60·6	13·50	—
25	22·8	15·2	1·6	—	62·0	13·76	Cyclopen
2	23·2	15·3	6·5	0·850	68.8	14·35	—
16	23·4	12·0	6·2	Spuren	64·2	20·00	—
15_{16}	23·6	11·7	7·5	Spuren	74·8	20·98	—
12	23·9	12·5	2·1	0·028	64·2	20·87	—
5	24·2	13·1	3·9	0·052	72·4	19·78	—
15_{14}	25·8	14·7	7·3	Spuren	70·2	20·38	—
4_8	26·2	12·9	4·2	0·320	62·8	24·07	Würm., Cyclop.
21	26·5	14·0	7·8	—	74·2	23·17	—
19_5	26·6	16·8	5·4	—	69·3	17·49	Cyclopen
8	27·1	12·6	5·8	0·050	69·5	26·24	—
11	27·4	14·6	8.6	0·120	83·4	23·31	—
3	27·5	13·3	6·3	0·070	74·7	26·09	Cyclopen, Eier, Würm., Wasserflöhe.
19_4	28·7	18·4	10·1	—	80·8	18·58	—
1	32·6	23·2	4·8	0·4	95·2	16·72	—
17	33·9	19·5	12·1	Spuren	91·8	25·79	Würmer
Gasanstalt	36·3	21·7	9·2	0·120	95·1	25·92	—
7	37·1	17·7	3·1	1·550	96.98	35·02	—
13_{14}	40·5	22·7	15·1	Spuren	114·4	31·90	—

Zu Seite 557.

der Härtegrade der untersuchten Brunn**thärte**

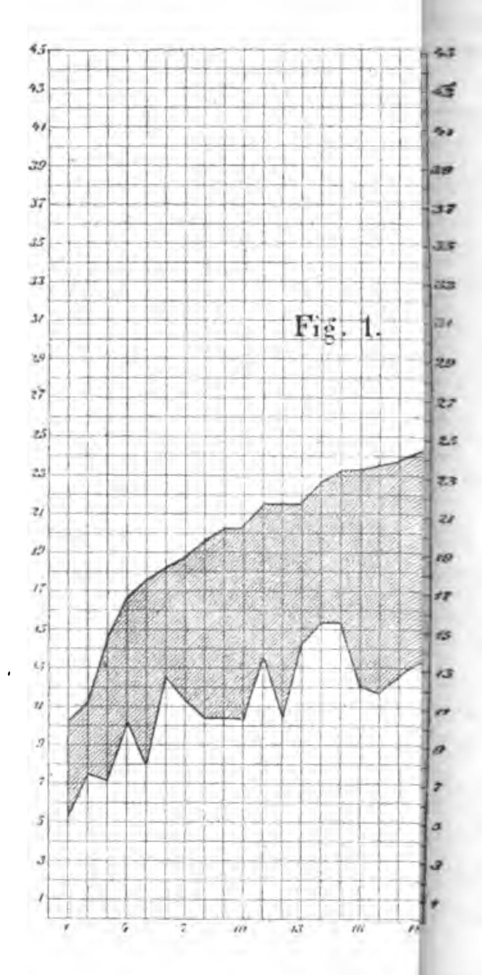


Fig. 1.

Fig. 1 gibt diese Daten für alle B **und**
Fig. 4 für jenes der Depôts **der**
Reihenfolge der Tabelle X **gen,**
wobei ein Theilstrich gleich
Die obere Curve stellt die Gesamm

Tabelle XI

analytischer Resultate von besonderer Wichtigkeit

des Wassers in den Kasernen des k. k. Artillerie-Arsenals zum Trink- und Hausgebrauche in Verwendung, in progressiver Aufeinanderfolge nach dem Härtegrade. Die Angaben für den Hectoliter in Grammen.

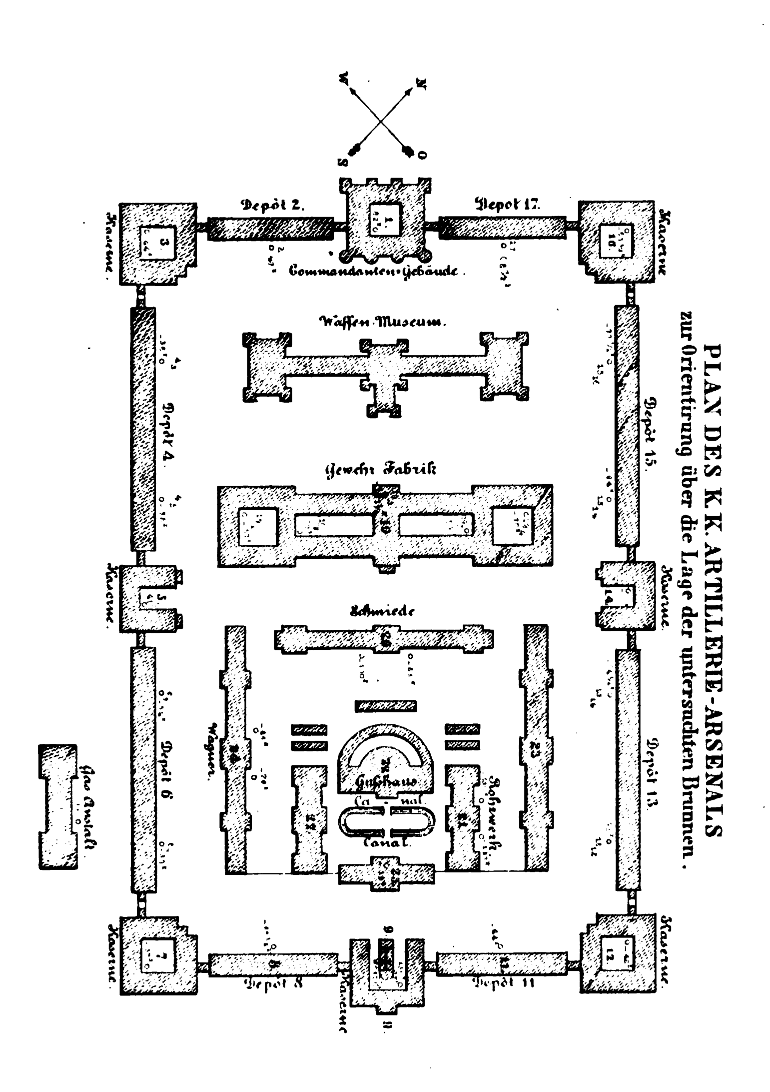
Nummer des Objectes	Härte		Organische Materie	Salpetersäure	Gesammter Rückstand	Beim Kochen ausgeschied. kohlensaure Salze	Lebende Thiere
	Gesammte	Bleibende					
	Grade nach Fehling						
Zulässiger Bestand	18	—	5·0	0·5	55·0	—	—
9 östlich	14·5	7·1	0·6	—	34·1	16·80	—
9 westlich	16·8	10·2	2·8	Spuren	40·5	12·83	—
19_2	18·1	12·7	4·2	—	50·2	17·28	—
19_1	18·7	11·2	2·1	—	48·0	13·47	—
14	19·8	10·3	3·2	Spuren	57·0	17·03	—
16	23·4	12·0	6·2	Spuren	64·2	20·00	—
12	23·9	12·5	2·1	0·028	64·2	20·87	—
5	24·2	13·1	3·9	0·052	72·4	19·78	—
3	27·5	13·3	6·3	0·070	74·7	26·09	Cyclopen, Eier, Würmer, Wasserflöhe
1	32·6	23·2	4·8	0·486	95·2	16·72	—
7	37·1	17·7	3·1	1·550	96·98	35·02	—
Dieselben Daten für das Wasser der Werksanlagen zur Dampfkesselspeisung in der k. k. Artillerie-Zeugsfabrik in Verwendung.							
Gusshaus-Canal	10·3	5·2	2·1	—	33·7	8·75	—
20	17·7	8·0	3·5	—	46·0	19·73	Cyclopen
24	20·5	10·2	1·7	—	52·4	18·92	Cyclopen
25	22·8	15·2	1·6	—	62·0	13·76	Cyclopen
21	26·5	14·0	7·8	—	74·2	23·17	—
13_5	26·6	16·8	5·4	—	69·3	17·49	Cyclopen
Dieselben Daten für das Wasser der Arsenals-Depôtbrunnen, welches zu Reinigungs- und Feuerlöschzwecken benützt wird.							
6_7	11·6	7·6	7·3	0·039	21·6	7·41	—
4_5	20·4	10·3	6·5	0·180	62·1	18·06	Würm., Cyclop.
13_{12}	21·6	10·9	9·2	Spuren	60·4	19·38	—
6_5	21·6	13·5	8·3	0·070	63·6	16·18	Würm., Cyclop.
19_3	21·7	14·2	2·8	—	60·6	13·50	—
2	23·2	15·3	6·5	0·850	68·8	14·35	—
15_{16}	23·6	11·7	7·5	Spuren	74·8	20·98	—
15_{14}	25·8	14·7	7·3	Spuren	70·2	20·38	—
4_3	26·2	12·9	4·2	0·320	62·8	24·07	Würm., Cyclop.
8	27·1	12·6	5·8	0·050	69·5	26·24	—
11	27·4	14·6	8·6	0·120	83·4	23·31	—
19_4	28·7	18·4	10·1	—	80·8	18·58	—
17	33·9	19·5	12·1	Spuren	91·8	25·79	Würmer
Gasanstalt	36·3	21·7	9·1	0·120	95·1	25·92	—
13_{14}	40·5	22·7	15·1	Spuren	114·4	31·90	—

Tabelle XIII

Dichte des Wassers

der Arsenals-Brunnen, auf die Temperatur von 4° C. überrechnet.

Nummer des Objectes	Dichte auf die Temperatur 4° C. bezogen	Nummer des Objectes	Dichte auf die Temperatur 4° C. bezogen	Nummer des Objectes	Dichte auf die Temperatur 4° C. bezogen	Nummer des Objectes	Dichte auf die Temperatur 4° C. bezogen
1	1·001881	7	1·001904	14	1·001275	19_4	1·001652
2	1·001462	8	1·001478	15_{14}	1·001484	19_5	1·001469
3	1·001552	9 westl.	1·001013	15_{16}	1·001558	20	1·001100
4_3	1·001367	9 östl.	1·000912	16	1·001388	21	1·001548
4_5	1·001358	11	1·001791	17	1·001827	24	1·001202
5	1·001519	12	1·001395	19_1	1·001132	25	1·001354
6_5	1.001377	13_{12}	1·001329	19_2	1·001167	Canal	1·000906
6_7	1·000716	13_{14}	1·002183	19_3	1·001334	Gas-anstalt	1·001852


PLAN DES K.K. ARTILLERIE-ARSENALS
zur Orientirung über die Lage der untersuchten Brunnen.
Depôt 2.
Depôt 17.
Commandanten-Gebäude.
Waffen-Museum.
Gewehr-Fabrik
Depôt 4.
Depôt 15.
Schmiede
Gusshaus
Canal
Depôt 6
Depôt 13.
Depôt 8
Depôt 11
Caserne
Gas Anstalt



XXVIII. SITZUNG VOM 10. DECEMBER 1874.

Der Secretär theilt drei Schreiben, von den Herren Dr. F. Steindachner, Prof. Dr. Camil Heller und Dr. E. v. Marenzeller, mit, worin diese ihre Bereitwilligkeit aussprechen, die von der österr.-ungar. Polarexpedition mitgebrachten Thiere zu bearbeiten, und zwar wird Steindachner die Fische, Heller die Crustaceen und Ascidien und v. Marenzeller die übrigen niederen Thiere übernehmen.

Der akademische Verein der Mathematiker und Physiker in Wien dankt, mit Zuschrift vom 3. November, für die Betheilung mit dem „Anzeiger" der Classe.

Se. Excellenz Herr Vice-Admiral B. Freiherr von Wüllerstorf-Urbair übersendet eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, betitelt: „Die meteorologischen Beobachtungen und die Analyse des Schiffcurses während der Polarexpedition unter Weyprecht und Payer 1872—1874."

Herr Dr. F. Steindachner übermittelt eine Abhandlung: „Die Süsswasserfische des südöstlichen Brasiliens."

Herr Regierungsrath Dr. K. v. Littrow berichtet über den Erfolg der österr. Expedition zur Beobachtung des Venus-Durchganges in Jassy.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia fisio-medico-statistica di Milano: Atti. Anno accademico 1874. Milano; 8°.

Annalen (Justus Liebig's) der Chemie. Band 174, Heft 3. Leipzig & Heidelberg, 1874; 8°.

— der k. k. Sternwarte in Wien. Dritte Folge. XXII. Band. Jahrgang 1872. Wien, 1874; 8°.

Antoine, Charles. Du roulis par calme. Brest, 1874; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 33—34. Wien, 1874; 8°.

Bertelli, P. D. Timoteo, Tromosismometro. Roma, 1874; 4°. — Appunti storici intorno alle ricerche sui piccoli e spontanei moti dei pendoli fatte dal secolo XVII in poi. Roma, 1873; 4°. — Sull' aurora boreale del 4 febbrajo 1872. Roma, 1873; 4°.

Bertin, L. E., Données théoriques et expérimentales sur les vagues et le roulis. Paris, 1874; 8°. — Étude sur la ventilation d'un transport-écurie, (et Rapport sur ce Mémoire). 4°. — Note sur la résistance des carènes dans le roulis des navires et sur les qualités nautiques, (et Rapport sur ce Mémoire). 4°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des sciences physiques et naturelles. N.P. Tome LI°. Nr. 203. Genève, Lausanne, Paris, 1874; 8°.

Brusina, Spiridion, Fossile Binnen-Mollusken aus Dalmatien, Kroatien und Slavonien. Agram, 1874; 8°.

Comitato, R., geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1874, Nr. 7 e 8. Roma; gr. 8°.

Commission de météorologie de Lyon: Observations météorologiques faites à l'Observatoire de Lyon du 1er Déc. 1871 au 1er Déc. 1872. gr. 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 21. Paris, 1874; 4°.

Gesellschaft, k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XVII (neuer Folge VII) Nr. 11. Wien, 1874; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 23. Wien, 1874; 4°.

— Wetterauische, für die gesammte Naturkunde: Bericht über den Zeitraum vom 1. Jänner 1868 bis 31. December 1873. Hanau, 1874; 8°.

— Deutsche, für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mittheilungen. 5. Heft. Juli 1874. Yokohama; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 49. Wien, 1874; 4°.

Hamburg, Stadtbibliothek: Gelegenheitsschriften für d. J. 1873/4. 4°.

Jahresberichte: Siehe Programme.

Kiel, Universität: Academische Gelegenheitsschriften vom Jahre 1873. Band XX. Kiel, 1874; 4°.

Lanzillo, Vincent, L'électro-vigile ou moyen d'aviser les tentatives de vol et le commencement d'incendie. Turin, 1874; 8°.

Nachrichten über Industrie, Handel und Verkehr aus dem statistischen Departement im k. k. Handels-Ministerium. IV. Band, 3. Heft. Wien, 1874; 4°.

Nature. Nr. 266, Vol. XI. London, 1874; 4°.

Programme und Jahresberichte der Gymnasien zu Arnau, Brixen, Brünn, Eger, Feldkirch, Hermannstadt, Kaschau, Kremsmünster, Kronstadt, B.-Leipa, Leoben, Marburg, Pisek, Pressburg, Radautz, Roveredo, Saaz, Schässburg, Trient, des akademischen Gymnasiums, des Gymnasiums der k. k. Theresianischen Akademie und zu den Schotten in Wien, des Gymnasiums zu Zara, der k. k. technischen Hochschule in Wien und der Landes-Unterreal- u. Gewerbe-Schule zu Waidhofen an der Ybbs. 4° & 8°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger." IV[e] Année, 2[me] Série, Nr. 23. Paris, 1874; 4°.

Schmidt, C., Hydrologische Untersuchungen. III—VI. 8° & 4°. — Essbare Erden aus Lappland und Süd-Persien. 8°.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Anno 1874, Disp. 10[a]. Palermo; 4°.

Société Linnéenne du Nord de la France: Bulletin mensuel. 3[e] Année. 1874. Nrs. 29—30. Amiens; 8°.

— de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux: Mémoires et Bulletins. 1[er] et 2[e] fascicules 1874. Paris & Bordeaux; 8°.

Toner, J. M., Contributions to the Study of Yellow Fever. Washington; 8°. — Dictionary of Elevations and Climatic Register of the United States. New-York, 1874; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 49. Wien, 1874; 4°.

XXIX. SITZUNG VOM 17. DECEMBER 1874.

Die Direction der k. k. geologischen Reichsanstalt ladet, mit Circular-Schreiben vom December l. J., zu dem am 5. Jänner 1875 zu begehenden Feste ihres 25jährigen Bestandes ein.

Die k. k. Gymnasial-Direction zu Saaz dankt, mit Zuschrift vom 19. November, für die Betheilung mit Separatabdrücken und dem Anzeiger.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Die genetische Gliederung der Flora Australiens", von Herrn Prof. Dr. Const. Freih. v. Ettingshausen in Graz. Diese Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

„Über eine neue Art von Variationstönen", von Herrn Dr. V. Dvořák, eingesendet von Herrn Regrth. E. Mach in Prag.

„Analyse des Poschitzer Sauerbrunnens" und Notiz für den Anzeiger: „Zur Kenntniss der Oxydationsproducte des Camphers", von Herrn J. Kachler in Prag, eingesendet durch Herrn Prof. Dr. A. Lieben.

„Über das Verhalten gesättigter Dämpfe", von Herrn Prof. K. Puschl in Seitenstetten.

Herr Director Dr. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die Gesetze der magnetischen und elektrischen Kräfte in magnetischen und dielektrischen Medien und ihre Beziehung zur Theorie des Lichtes."

Herr Oberlieutenant Jul. Payer hält einen Vortrag über die während seiner Schlittenreise auf Franz-Josephs-Land gesammelten Erfahrungen.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

American Chemist. Vol. V, Nrs. 2 & 3. New York. 1874; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr. Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 35. Wien, 1874; 8°.

Bericht über die Weltausstellung zu Wien im Jahre 1873. Herausgegeben durch die küstenländische Ausstellungs-Commission in Triest. Redigirt von Friedr. Bömches. Triest, 1874; 8⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 22. Paris, 1874; 4⁰.

Freiburg i. Br., Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1873/4. 4⁰ & 8⁰.

Friesach, Karl, Theorie der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe. Leipzig, 1874; 4⁰.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 50. Wien, 1874; 4⁰.

Giessen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1874. 4⁰.

Halle, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1874. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. IV. Band. Jahrgang 1872, Heft 2. Berlin, 1874; 8⁰.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie, von A. Naumann und A. Laubenheimer. Für 1872. I. & II. Heft. Giessen, 1874; 8⁰.

Landbote, Der steierische. 7. Jahrgang, Nr. 25. Graz, 1874; 4⁰.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1874, Nr. 18. Wien; 4⁰.

Lese-Verein, akademischer, an der k. k. Universität und k. k. technischen Hochschule in Graz: VII. Jahresbericht. 1874. Graz; 8⁰.

Lotos. XXIV. Jahrgang. October—November 1874. Prag; 8⁰.

Mittheilungen des k. k. techn. & administr. Militär-Comité. Jahrgang 1874, 11. Heft. Wien; 8⁰.

Museo, civico, Ferdinando Massimiliano in Trieste. Trieste, 1874; 4⁰.

Nature. Nr. 267, Vol. XI. London, 1874; 4⁰.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1874, Nr. 14. Wien; 4⁰.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXIV. Band, Jahrg. 1874, November-Heft. Wien; 8⁰.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger." IVe Année, 2me Série, Nr. 24. Paris, 1874; 4°.

Riccardi, P., Biblioteca matematica Italiana. Fasc. 2° (Vol. II). Modena, 1874; 4°.

Societas Entomologica Rossica: Horae. T. X. Nr. 1—3. Petropoli, 1873 et 1874; 8°. — Iroudy, T. VII, Nr. 4. St. Petersburg, 1874; 8°. — Beiträge zur näheren Kenntniss der in dem Baikal-See vorkommenden niederen Krebse aus der Gruppe der Gammariden. Von B. N. Dybowsky. St. Petersburg, 1874; 4°.

Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg: Jahreshefte. XXVIII. Jahrgang, 1.—3. Heft. Stuttgart, 1872; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang. Nr. 50. Wien, 1874; 4°.

Woldřich, J., Verschlackte Steinwälle und andere urgeschichtliche Bauten in der Gegend von Strakonic. — Durchforschung des Tumulus von Zegersdorf. Schreiben des Grafen H. v. Mannsfeld an J. Woldřich. — Urgeschichtliche Studien in der Wiener Weltausstellung 1873. Wien, 1874; 8°. (Aus Bd. IV der Mittheil. der anthropologischen Gesellschaft in Wien.)

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang. 16. Heft. Wien, 1874; 4°.

Über einen Apparat zu Coincidenzbeobachtungen bei Schwerebestimmungen mit Hilfe des Reversionspendels.

Von Dr. **Ludwig Gruber,**

Assistent der k. k. Gradmessung.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. December 1874.)

Die bei Bestimmung der Schwere oder der Länge des einfachen Secundenpendels, einer der wichtigsten Constanten eines Ortes, in Betracht kommende Arbeit theilt sich ausser den nothwendigen Zeitbestimmungen zur Ermittlung eines richtigen Uhrganges in Längenmessungen und in die Beobachtung der Schwingungsdauer.

Die nöthige Genauigkeit der Zeitbestimmungen, und ein genug sicherer Uhrgang wird sich bald erreichen lassen; es bleibt also nur übrig, die Grenzen der Genauigkeit in der Messung der Schneidenabstände eines Reversionspendels und jene der Beobachtung von Schwingungsdauern zu betrachten, und beide in mögliche Übereinstimmung zu bringen.

Von allen Correctionen abgesehen liefert die Pendelgleichung:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

wobei t die Schwingungsdauer, l die Pendellänge, g die Schwere bedeutet, indem man differenzirt:

$$dt = \frac{\pi}{2\sqrt{gl}}\, dl,$$

l aus obiger Gleichung substituirt:

$$dl = \frac{2gt}{\pi^2}\, dt.$$

Als Einheiten für t die Secunde, für l das Meter genommen, ist:

$$dl = 1 \cdot 9879\, dt.$$

Also ein Fehler in der Schwingungsdauer geht nahe verdoppelt auf die Pendellänge über.

Bruhns gibt als wahrscheinlichen Fehler der Längenmessungen $\pm 0 \cdot 002$ Millimeter an; das heisst, die Schwingungsdauer muss, um der Längenmessung aequivalent zu sein, bis auf $\pm 0 \cdot 000001$ genau beobachtet werden. Leitet man die Schwingungsdauer aus einem Zeitraume von 2000 Schwingungen ab, wie dies bei der k. k. österreichischen Gradmessung in diesem Jahre der Fall war, so soll demnach das Intervall bis auf $\pm 0 \cdot 002$ genau bestimmt sein.

Aus dieser Überlegung geht hervor, dass wesentlich die Beobachtung der Schwingungsdauer die Güte und Genauigkeit der Schweremessung bestimmt, also auch die Wahl der Beobachtungsmethode derselben von grösster Wichtigkeit ist.

In der Schweiz beobachtete Herr Plantamour in den Jahren 1864—1866 die Schwingungsdauer, indem er je 50 Durchgänge eines $^3/_4$ Secundenpendels durch die Ruhelage zu Anfang und zu Ende einer Reihe von 3000 Schwingungen mit Auge und Taster registrirte. Ein gleiches Verfahren wurde in Deutschland in dem Jahre 1869 eingeleitet mit dem Unterschiede, dass man sich auf 1000 Schwingungen beschränkte, was bei der verschiedenen Schwingungsdauer der halben Genauigkeit entspricht. Der wahrscheinliche Fehler einer Schwingungsdauer stellte sich dabei zu $\pm 0 \cdot 000016$ heraus.

Um der Ungenauigkeit dieses Registrirverfahrens zu begegnen, wurden von der k. k. österreichischen Gradmessung in Wien mit einem Repsold'schen Reversionspendel Selbstregistrirversuche angestellt, welche jedoch in der angewandten Art die erwünschte Genauigkeit nicht gewährten. Denn neben den Arbeitsleistungen des Pendels, die bei der gewählten Anordnung allerdings nur die Anfangs- und Endschwingungen betrafen, kamen noch Veränderlichkeit und ungleichmässige Wirkung der Federrelais ins Spiel.

Von allen diesen Fehlerquellen frei ist das schon von Borda und Bessel angewandte Verfahren der Coincidenzen, welches seit 1870 in Deutschland in Benützung steht.

Das Coincidenzverfahren ist im Allgemeinen etwa 7mal genauer, als das des Registrirens. Wenn aber einestheils der entschiedene Vorzug der Coincidenzbeobachtungen nicht abzustreiten ist anderen Methoden gegenüber, so lassen sich auch anderentheils die Schwierigkeiten nicht verhehlen, welche in der Anordnung der Apparate beim Borda'schen Coincidenzverfahren namentlich in Feldobservatorien die Anwendung desselben nahezu unmöglich machen. Hauptsächlich beschränkter Raum und nicht eigens für Pendelbeobachtungen gebauter Uhrpfeiler sind es, an welchen dieses Verfahren scheitert. Es stellt sich aber nichtsdestoweniger die Nothwendigkeit heraus, eben in beschränkten Feldobservatorien mit geringster Umständlichkeit gute Pendelbeobachtungen zu erzielen.

Die Electricität arbeitet genügend genau; ist man nun im Stande, mit Umgehung der Federkraft auf electrischem Wege Coincidenzen zu beobachten, so ist die Aufgabe gelöst. Dies letztere suchte ich durch ein Siemens'sches polarisirtes Relais zu erreichen; denn wenn sich auch Verbesserungen zweckmässig vornehmen lassen werden, war vor der Hand ein solches Relais der einzige vorräthige Apparat, der schnellstens adaptirt werden konnte, indem die Umgestaltung durch Mechaniker Herrn O. Schäffler in Wien innerhalb 48 Stunden ausgeführt wurde. Es wurde ein Dosenrelais gewählt, um einestheils von der Federspannung unabhängig zu sein, und anderentheils grössere Hubhöhen zu erzielen.

Der Apparat, wie er heuer in Verwendung war und wie ich ihn hier zu beschreiben unternehme, ist blos als ein provisorischer zu bezeichnen, und es dürfte baldigst für die k. k. österreichische Gradmessung ein ähnlicher mit nöthigen Verbesserungen und Zweckmässigkeitsvorrichtungen, wie sie sich im Gebrauche als wünschenswerth herausgestellt haben, ausgeführt werden.

Es wurden in einem Siemens'schen polarisirten Dosenrelais die Electromagneten mit dickerem Drathe umsponnen, um bei Schonung der Localbatterien grössere Elongationen der Contactzunge, die hier einer anderen Bestimmung zugeführt wird, wie

auch sichreres Arbeiten der Electromagneten zu bezwecken. Der Schlitten mit Contactpunkt, wie die dazu gehörigen Klemmen sind ausser Thätigkeit gesetzt.

Am Deckel des Dosenrelais wurde ein astronomisches Fernrohr mit 30 Cm. Brennweite, 3·3 Cm. Objectivöffnung und einer 24fachen Vergrösserung derart befestigt, dass es beim Festsitzen des Dosendeckels nur noch eine Drehung um die eigene Achse zuliess, welche durch Klemmringe auch vermieden werden konnte. Das Gesichtsfeld betrug circa 1·9°, was sich übrigens für die Folge als zu gering herausstellte. Das Gesichtsfeld soll circa 3·5° im Durchmesser haben, so dass ein Gradbogen von 12 Cm. Länge bei einer Entfernung von 2 Meter noch ganz sichtbar sei.

In den Objectivdeckel, der ebenfalls festgeschraubt war, wurde ein 3 Mm. breiter Spalt geschnitten, wodurch trotz der kleinen Objectivlinse und schlechter Beleuchtung der Gradbogen mit Pendelspitze deutlich genug zu sehen war, um noch als Momentanbild aufgefasst werden zu können.

Das Fernrohr wurde in der Richtung der Contactzunge des Relais aufgesetzt. Die Contactzunge wurde durch Anlöthen eines dünnen Messingrohres bis zu einem Hebelarm von 19 Cm. verlängert, wodurch er nicht wesentlich an Gewicht zunahm und doch die nöthige Steife erhielt. Am Ende des zu 19 Cm. verlängerten Hebelarmes, dessen Spielraum durch Anschlageschrauben beschränkt war, wurde vertical eine Messingplatte mit einem 3 Mm. breiten Spalt so angelöthet, dass selbe knapp vor dem Objectivdeckel des Fernrohres spielte, indem in beiden extremen Lagen das Gesichtsfeld verdunkelt blieb, und bei richtiger Drehung des Rohres in der Mittelstellung des beweglichen Spaltes die beiden Spalte aufeinander fielen.

Nun ist das Relais auf eine Elongation von 7 Mm. zu reguliren, wobei es vermöge der dicken Drahtwindungen noch sehr kräftig arbeitet. Schaltet man jetzt eine Uhr mit electrischem Contacte ein, so wird bei jeder geraden Secunde der Spaltträger von der Ruhelage in die andere extreme Lage abgelenkt, und also für ein Moment der bewegliche Spalt vor den Blendspalt des Fernrohres zu stehen kommen. Da die Bewegung sehr rasch ist, gewiss rascher als die des Uhrpendels in der Ruhelage, so wird bloss ein Momentanbild erscheinen, das bei günstiger

Beleuchtung des Gradbogens und der unteren Pendelspitze erfasst werden kann. Beim Öffnen des electrischen Stromes durch das Uhrwerk wird zwischen zwei geraden Secunden ein zweites Bild durch Zurückfallen des Spaltträgers erscheinen, das weiter keine Berücksichtigung gewinnt. Zu unterscheiden sind beide leicht an dem verschiedenen Ton des Anschlages, welche Verschiedenheit noch künstlich gesteigert werden kann; es ist aber auch diese Kennzeichnung überflüssig, da die beiden Momentanbilder die Pendelspitze an den entgegengesetzten Seiten der Ruhelage erscheinen lassen.

Da das Zurückfallen des beweglichen Spaltes nicht genau in der Mitte zwischen zwei geraden Secunden stattfindet, kann als Coincidenz nicht das Übeinanderfallen der beiden gegen die Ruhelage sich fortschiebenden Bilder aufgefasst werden, sondern das Durchgehen der Pendelspitze durch den Nullpunkt des Gradbogens, einmal bei der Bewegung von rechts nach links, dann umgekehrt.

Um die Eintheilungen des Gradbogens, wie überhaupt alle verticalen Conturen des Bildes scharf zu sehen, musste der Apparat an einer verticalen Wand befestigt werden, wobei beide Spalten horizontal zu stehen kamen. An den Spaltträger war ein Gegengewicht unter den gegebenen Umständen schwer anzubringen, und es mussten demnach das ganze Uebergewicht die Electromagnete dirigiren.

Die Uhr wurde in der Weise eingeschaltet, dass mit der geraden Secunde, die dem Stromschlusse entspricht, das Niederfallen des beweglichen Spaltes zusammenfiel; auf diese Art begünstigte die Schwerkraft die Augenblicklichkeit des Bildes.

Der so adjustirte Apparat wurde nun auf den Gradbogen eines in Schwingungen versetzten Reversionspendels gerichtet, und das abfallende Bild beim Durchgange durch Null beobachtet, zwischen zwei Coincidenzen die grösste Elongation am Gradbogen abgelesen.

Es sind je 4 Coincidenzen zu Anfang und zu Ende einer Reihe von 2000 Schwingungen beobachtet worden. Dabei ergab sich, dass eine Coincidenz bis auf eine Secunde genau aufgefasst

werden kann. Da circa alle $2^m 45^s$ sich die Coincidenz wiederholt, ist durch eine Beobachtung der Moment auf:

$$1:165 = 0{\cdot}0061$$

genau bestimmt, also aus 4 Coincidenzen auf:

$$\pm 0{\cdot}003.$$

Hiemit erscheint das ganze Intervall von 2000 Schwingungen genau auf:

$$\pm\sqrt{2}\,.\,0{\cdot}003 = \pm 0{\cdot}004$$

eine Schwingungsdauer auf:

$$\pm 0{\cdot}000002,$$

was in der Längenbestimmung aequivalent ist mit $\pm 0{\cdot}004$ Mm.

Die Längenmessung bleibt bis auf $\pm 0{\cdot}002$ Mm. unsicher, also ist sie noch immer circa 2mal genauer als die Bestimmung der Schwingungsdauer. Durch andere unberechenbare Umstände, wie fehlerhafte Annahme des Temperaturcoefficienten etc., gestaltet sich jedoch das Verhältniss für die Schwingungsdauer noch viel ungünstiger.

Unter den gegebenen Verhältnissen scheint also eine grössere Präcision in dieser Richtung hin kaum zu erreichen zu sein, und man dürfte somit an der Grenze der Genauigkeit angelangt sein, wenn die Länge des einfachen Secundenpendels im Endresultate auf $\pm 0{\cdot}000004$ M. genau bestimmt ist.

Was nun die directen Coincidenzbeobachtungen anbelangt, wie sie in Norddeutschland angestellt wurden, so dürfte das hier beschriebene Verfahren jene Genauigkeit nicht erreichen, aber anderestheils ist hier die Bequemlichkeit in der Anordnung unvergleichlich grösser. Es wird sich zum Gebrauche an allen nicht stabilen Stationen vortheilhaft eignen.

Über das Verhalten gesättigter Dämpfe.

Von **Carl Puschl.**

Auf Grund theoretischer Vorstellungen vom Wesen der Wärme bin ich zuerst in einer vor sechs Jahren veröffentlichten Schrift zu dem Schlusse gekommen, dass die Wärmemenge w, welche das Volumen v eines vollkommenen Gases unter dem Drucke p bei der absoluten Temperatur t enthält, durch die Gleichung

$$w = ct + \frac{pv}{A} \tag{1}$$

ausgedrückt werde, worin A das mechanische Äquivalent der Wärmeeinheit und c eine von der Natur der Gasmasse abhängige Constante bedeutet, welche der Summe der Oberflächen aller ihrer vom Äther umschlossenen Atome proportional ist. Die Temperatur des Gases ist jenen Vorstellungen gemäss ausschliesslich durch die Wärmemenge ct bedingt, indem die seinem Drucke entsprechende Arbeits- oder lebendige Kraft pv, deren Wärmeäquivalent $\frac{pv}{A}$ ist, zu seinem Temperaturzustande nichts beiträgt. Ich nannte deshalb ct die Temperaturwärme und $\frac{pv}{A}$ die Bewegungswärme des Gases. Unter einem vollkommenen Gase ist ein solches verstanden, worin ausser der Wärme keine andere Kraftart mit merklicher Intensität wirksam ist. Nach der gewöhnlichen Ansicht würde der vollkommene Gaszustand auch schon die Giltigkeit des Mariotte'schen und Gay-Lussac'schen Gesetzes bedingen. Nach meiner Theorie gibt es für jedes vollkommene Gas ein absolutes Maximum der Function $\frac{pv}{t}$ und somit in dessen Nähe einen

Spielraum in Bezug auf Dichte und Temperatur, in welchem es für die Beobachtung ohne erhebliche Differenz wirklich dem Mariotte'schen und dem Gay-Lussac'schen Gesetze genügt; im Allgemeinen aber muss dasselbe durch sein Verhalten sowohl von dem einen wie von dem andern Gesetze mehr oder weniger abweichen und in einem hinreichend weiten Spielraume für Dichte und Temperatur müssen die Abweichungen beiderseits jenes Maximums eine Grösse erreichen, dass von einer auch nur angenäherten Befolgung der zwei genannten Gesetze keine Rede mehr sein kann. Auch erfordert hiernach eine bei fortgesetzter Verdichtung oder Temperaturerniedrigung schliesslich eintretende Instabilität, womit der Druck bei constanter Temperatur ein Maximum wird, keineswegs die Annahme einer von der Wärme verschiedenen Kraftart in dem bezüglichen Gase, sondern ist wesentlich in der Natur der Wärme selbst begründet.

Das Volumen v des gedachten Gases enthalte an Masse die Gewichtseinheit. Führen wir demselben, ohne ihm eine Ausdehnung zu gestatten, eine unendlich kleine Wärmemenge dw zu, welche dessen Temperatur um den unendlich kleinen Betrag dt erhöhe, so folgt aus unserer obigen Gleichung

$$\left(\frac{dw}{dt}\right) = c + \frac{v}{A}\left(\frac{dp}{dt}\right),$$

wobei die partiellen Differentialquotienten von w und p, um die entsprechende Constanz des Volumens anzudeuten, mit Klammern versehen sind. Den partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ nennt man die specifische Wärme bei constantem Volumen; bezeichnen wir dieselbe[1] kurz mit s_1, so haben wir demnach

$$s_1 = c + \frac{v}{A}\left(\frac{dp}{dt}\right) \qquad (2)$$

Dieser Ausdruck für die specifische Wärme eines vollkommenen Gases bei constantem Volumen lässt sofort erkennen,

[1] Die Bezeichnung s_1 für die specifische Wärme bei constantem Volumen behalte ich hier aus früheren Abhandlungen bei, wo mit s die specifische Wärme bei constantem Drucke benannt ist.

dass dieselbe im Allgemeinen keineswegs einen constanten Werth hat, und zwar, dass sie bei Annäherung an ein Spannungsmaximum mit dem dann allmälig wachsenden Ausdehnungscoëfficienten ebenfalls wachsen muss. Nach dem Obigen wird so von einer unendlich kleinen Wärmemenge, welche die Temperatur der Gewichtseinheit eines Gases bei constantem Volumen um dt erhöht, nur ein gewisser, dem Temperaturzuwachse dt proportionaler Theil $= c.dt$ auf Vermehrung der Temperaturwärme des Gases verwendet, während der andere, dem Temperaturzuwachse nicht proportional bleibende Theil

$$= \frac{v}{A}\left(\frac{dp}{dt}\right)dt$$

die Bewegungswärme desselben vermehrt, ohne zur Erhöhung seiner Temperatur etwas beizutragen.

Im Punkte eines Spannungsmaximums selbst wird voraussichtlich die specifische Wärme bei constantem Volumen bedeutend grösser sein müssen, als in einer merklichen Entfernung davon. Befindet sich das gedachte Gas bei gegebener Temperatur in einem Maximum seiner Spannung und ist dasselbe also ein gesättigter Dampf, so ist der partielle Differentialquotient

$$\left(\frac{dp}{dv}\right) = 0.$$

Nun ist allgemein die Spannung eine Function der Temperatur und des Volumens, und es muss daher die aus einer gleichzeitigen Änderung dieser zwei Grössen resultirende totale Druckänderung dp der Differentialgleichung

$$dp = \left(\frac{dp}{dt}\right)dt + \left(\frac{dp}{dv}\right)dv$$

entsprechen; lässt man also bei gesättigtem Dampfe die Temperatur und den Druck mit einander so wechseln, dass er immer im Zustande der Sättigung und somit

$$\left(\frac{dp}{dv}\right) = 0$$

bleibt, so muss zugleich immer nach der vorigen Differentialgleichung die totale Druckänderung

$$dp = \left(\frac{dp}{dt}\right) dt$$

sein, d. h. für Dampf im Zustande der Sättigung fällt jedesmal der partielle Differentialquotient $\left(\frac{dp}{dt}\right)$ mit dem durch Versuche bestimmbaren Verhältnisse $\frac{dp}{dt}$ zusammen. Demnach kann man in der Gleichung (2) bei ihrer Anwendung auf gesättigte Dämpfe die Klammern des Differentialquotienten von p weglassen und einfach schreiben:

$$s_1 = c + \frac{v}{A} \cdot \frac{dp}{dt}. \qquad (2_a)$$

Wenn man einen gesättigten Dampf, der ein vollkommenes Gas sei, unter Erhöhung seiner Temperatur zugleich so zusammendrückt, dass er im Zustande der Sättigung bleibt, so wird von ihm bei einem unendlich kleinen Temperaturzuwachse dt eine mechanische Arbeit gethan, welche mit Vernachlässigung einer unendlich kleinen Grösse der zweiten Ordnung $= p.dv$ ist, wenn dv die dem Temperaturintervalle dt entsprechende Volumänderung bedeutet. Als Function der Temperatur und des Volumens ändere sich gleichzeitig die Wärmemenge w des Dampfes um dw, so ist, wenn wir die ganze bei der Temperaturerhöhung dt unter der genannten Bedingung demselben zuzuführende Wärme mit $h.dt$ bezeichnen:

$$hdt = dw + \frac{pdv}{A}.$$

Aus der Gleichung (1) folgt aber allgemein bei Veränderung der Temperatur und des Volumens:

$$dw = \left[c + \frac{v}{A}\left(\frac{dp}{dt}\right)\right] dt + \frac{1}{A}\left[p + v\left(\frac{dp}{dv}\right)\right] dv$$

oder mit Rücksicht auf die Formel (2):

$$dw = s_1 dt + \frac{1}{A}\left[p + v\left(\frac{dp}{dv}\right)\right] dv.$$

Es ist demnach in unserem Falle, wo der Dampf gesättigt und somit $\left(\frac{dp}{dv}\right) = 0$ ist:

$$dw = s_1 dt + \frac{p.dv}{A}$$

und mit diesem Werthe von dw ergibt sich

$$h = s_1 + \frac{2p}{A} \cdot \frac{dv}{dt}, \tag{3}$$

welchen Ausdruck man, weil

$$p\frac{dv}{dt} = \frac{d(pv)}{dt} - v\frac{dp}{dt}$$

ist, mit Rücksicht auf die entsprechende Bedeutung von s_1 nach (2_a) auf die Form bringen kann:

$$h = c + \frac{2d(pv)}{Adt} - \frac{v}{A}\frac{dp}{dt}. \tag{4}$$

Gesättigter Wasserdampf von niedriger Temperatur ist bei seiner geringen Dichte ohne Zweifel als ein vollkommenes Gas zu betrachten. Nimmt man als der Wahrheit jedenfalls nahe kommend an, dass er bei solcher Temperatur dem vereinigten Mariotte und Gay-Lussac'schen Gesetze folge und zugleich seine theoretische Dichte habe, so ist hiebei für denselben

$$\frac{d(pv)}{Adt} = \frac{pv}{At} = 0{\cdot}109;$$

ferner ist die aus seiner Constitution berechnete specifische Temperaturwärme dieses Dampfes [1]

$$c = 0{\cdot}245.$$

Durch Einsetzung beider Werthe folgt aus (4):

$$h = 0{\cdot}463 - \frac{v}{A}\frac{dp}{dt}$$

[1] Siehe meine Abhandlung: Über eine Modification der herrschenden Gastheorie. Sitzungsb. d. k. Akad. d. Wissensch. Octoberheft 1874.

und aus dieser Formel erkennt man bereits leicht, dass der Wasserdampf, wie es ohnehin bekannt ist, reichlich Wärme abgeben muss, wenn er bei wachsender Temperatur und entsprechender Zusammendrückung im Zustande der Sättigung bleiben soll.

Clausius[1] hat für gesättigte Dämpfe einen die Grösse h involvirenden Ausdruck unter der Voraussetzung entwickelt, dass jener innere Druck oder Widerstand, den die Wärme bei der Ausdehnung und Verdampfung einer Flüssigkeit überwinden muss, von der Temperatur ganz unabhängig und jedesmal nur eine Function des augenblicklichen Volumens sei; es würde dann in einem Kreisprocesse, wo eine Flüssigkeit bei einer gewissen Temperatur in Dampf verwandelt, dieser bei einer tieferen Temperatur condensirt und zuletzt der anfängliche Zustand der Flüssigkeit wieder hergestellt wird, die innere Arbeit der Wärme bei wachsendem Volumen durch eine gleich grosse und dem Vorzeichen nach entgegengesetzte innere Arbeit bei abnehmendem Volumen gerade aufgehoben, und die schliesslich gewonnene äussere Arbeit wäre genau das Äquivalent der verbrauchten Wärme. Dieser Annahme gemäss gelangt Clausius für den Fall, dass die Temperatur der Verdampfung und jene der Condensation nur um das unendlich kleine Intervall dt verschieden sind, zu der (hier nur äussserlich veränderten) Formel:

$$\frac{dl}{dt} + C - h = \frac{v - \sigma}{A} \cdot \frac{dp}{dt},$$

worin l die latente Wärme des Dampfes, C die specifische Wärme der Flüssigkeit und σ das Volumen der Gewichtseinheit derselben ist; der Ausdruck links des Gleichheitszeichens stellt die verbrauchte Wärme und der rechts stehende Ausdruck die erzeugte äussere Arbeit, auf Wärmemass reducirt, vor. Man kann sich aber von jener Annahme auch frei halten und es voraus unentschieden lassen, ob nicht die innere Arbeit, welche bei Erwärmung und Verdampfung einer Flüssigkeit von der Wärme geleistet

[1] S. Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, von R. Clausius. I. Abth. S. 34—38.

wird, etwa selbst eine Function der Temperatur und demnach im erwähnten Kreisprocesse schliesslich nebst der äusseren auch eine gewisse innere Arbeit erzeugt ist. Es sei in demselben die positive innere Arbeit bei der Ausdehnung, in Wärmemass ausgedrückt, $= i$, also

$$\frac{di}{dt} dt$$

das thermische Äquivalent der schliesslich übrig bleibenden inneren Arbeit, so ergibt sich, weil dann die verbrauchte Wärme das Äquivalent der erzeugten äusseren und inneren Arbeit sein muss, auf demselben Wege die Formel:

$$\frac{dl}{dt} + C - h = \frac{v - \sigma}{A} \frac{dp}{dt} + \frac{di}{dt}. \tag{5}$$

Setzt man hier für h den entsprechenden Werth aus (4), so folgt:

$$\frac{di}{dt} = \frac{dl}{dt} + C - c - \frac{2d(pv)}{Adt} + \frac{\sigma}{A} \frac{dp}{dt}. \tag{6}$$

Dieser Ausdruck müsste, wenn die von Clausius gemachte Voraussetzung richtig wäre, $= 0$ sein. Nun ist für Wasser von niedriger Temperatur $C = 1$ und nach Regnault's Versuchen

$$\frac{dl}{dt} = -0 \cdot 695,$$

während bei solcher Temperatur das mit dem Factor σ behaftete Glied jenes Ausdruckes ohnehin verschwindend klein ist; mit den übrigen, schon vorhin angenommenen Zahlenwerthen ergibt sich daher

$$\frac{di}{dt} = -0 \cdot 158$$

und man sieht, dass im Wasser die innere Arbeit der Wärme keineswegs von der Temperatur unabhängig, sondern bei höherer Temperatur entschieden kleiner ist. Die Annahme, dass der aus den (nicht thermischen) inneren Kräften resultirende Druck, welchen (nebst dem äusseren Drucke) die Wärme bei der Ausdehnung überwinden muss, von der Temperatur unabhängig

und folglich die ganze innere Arbeit der Wärme in jedem vollkommenen Kreisprocesse $= 0$ sei, wird demnach **empirisch** nicht bestätigt.

Das Verhalten des Wasserdampfes legt dafür einen andern Gedanken nahe. Enthält nämlich die Gewichtseinheit einer Flüssigkeit bei der Temperatur τ die Wärme W_τ und ist q diejenige Wärmemenge, welche ihr zugeführt werden muss, um ihre Temperatur von τ auf t zu erhöhen und sie unter dem der Temperatur t entsprechenden Maximaldrucke vollständig in Dampf zu verwandeln, so ist von der ganzen Wärmemenge $W_\tau + q$ schliesslich nur noch die Wärme w vorhanden, welche der erzeugte Dampf enthält, und es ist somit der Rest $= W_\tau + q - w$ auf die bei jenem Prozesse vorgekommene innere und äussere Arbeit verbraucht worden. Bedeutet also K das thermische Äquivalent dieser Gesammtarbeit, so hat man die Gleichung:

$$W_\tau + q = K + w$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (1):

$$W_\tau + q = K + ct + \frac{pv}{A}$$

und hieraus folgt durch Differentiation:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dK}{dt} + c + \frac{d(pv)}{Adt}.$$

Für Wasser ist bei niedriger Endtemperatur nach den oben angegebenen Werthen:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dK}{dt} + 0\cdot354;$$

da nun die Beobachtungen **Regnault's** für diese Flüssigkeit nach der bekannten betreffenden Annäherungsformel den Differentialquotienten

$$\frac{dq}{dt} = 0\cdot305$$

geben, so folgt daraus mit entsprechender Annäherung:

$$\frac{dK}{dt} = 0\cdot305 - 0\cdot354 = -0\cdot049$$

und es scheint somit die Summe aus der inneren und äusseren Arbeit bei Erwärmung und Verdampfung des Wassers nahe constant zu sein. Die geringe experimentelle Abnahme derselben bei steigender Temperatur kann möglicherweise theils von nur annähernder Giltigkeit der zu Grunde gelegten Voraussetzungen, theils von der Ungenauigkeit des empirischen Werthes von $\frac{dq}{dt}$ herkommen. In der That ist die Constanz jener gesammten Ausdehnungsarbeit, wenn der erzeugte Dampf ein vollkommenes Gas ist, keine blosse Vermuthung, sondern, wie nun theoretisch gezeigt werden soll, ein wirkliches Naturgesetz, dessen Geltung an die Stelle der in dieser Hinsicht von den Physikern bisher festgehaltenen Annahme treten muss.

Ein geschlossener Raum von unveränderlicher Grösse enthalte die Gewichtsmenge m eines gesättigten Dampfes, welcher ein vollkommenes Gas sei; bedeutet, wie früher, v das Volumen der Gewichtseinheit, so ist mv das Volumen von m. Diese Dampfmasse erkalte momentan um das unendlich kleine Temperaturintervall dt, so gibt sie, insoferne dabei keine Volumveränderung stattfindet, eine Wärmemenge

$$= ms_1 dt \qquad (a)$$

ab. In Folge der unendlich kleinen Temperaturerniedrigung des Dampfes condensirt sich ein unendlich kleiner Theil dm unter Abgabe seiner latenten Wärme als Flüssigkeit, welche die Temperatur $t—dt$ des sie umgebenden Dampfes besitzen wird. Ginge diese Condensation unter den gewöhnlichen Umständen vor sich, d. h. wäre das Volumen des Dampftheilchens dm am Anfang der Condensation das seiner Temperatur $t—dt$ entsprechende Sättigungsvolumen, so würde dabei die Wärmemenge

$$\left(l - \frac{dl}{dt} dt\right) dm$$

entbunden, wenn l die latente Wärme der Gewichtseinheit bei der Temperatur t ist. Allein das Volumen vdm, welches das Dampftheilchen dm am Anfange seiner Condensation wirklich besitzt, entspricht der Sättigung bei der Temperatur t, wogegen

das seiner Sättigung bei der Temperatur $t-dt$ entsprechende Volumen

$$= (v - \frac{dv}{dt} dt) dm$$

ist; jenes ist also um

$$- \frac{dv}{dt} dm . dt$$

schon im Anfang der Condensation kleiner. Bei der bezüglichen hier nicht mitbegriffenen Volumverkleinerung würde durch mechanische Arbeit eine Wärmemenge

$$= - \frac{p}{A} \frac{dv}{dt} dmdt$$

erzeugt, welche daher von der unter den gewöhnlichen Umständen entbundenen Wärme abgezogen werden muss, um die durch Condensation unter den hier obwaltenden Umständen entbundene Wärme zu erhalten; d. h. bei der Condensation des um dt erkalteten Dampftheilchens dm wird eine Wärmemenge

$$= \left(l - \frac{dl}{dt} dt + \frac{p}{A} \frac{dv}{dt} dt \right) dm \qquad (b)$$

abgeben.

Es sei σ das Volumen der Gewichtseinheit der aus dem Dampfe entstehenden Flüssigkeit bei der Temperatur t, so hätte das flüssig gewordene Theilchen bei jener Temperatur das Volumen σdm; da es aber die Temperatur $t-dt$ besitzt, so ist sein Volumen

$$= \left(\sigma - \frac{d\sigma}{dt} dt \right) dm$$

und es ist somit das anfängliche Volumen des Dampftheilchens dm um

$$\left(v - \sigma + \frac{d\sigma}{dt} dt \right) dm$$

kleiner geworden. In diesen Raum dehnt sich die übrig gebliebene Dampfmasse aus und verrichtet dabei eine Arbeit, deren thermisches Äquivalent

$$= \frac{p}{A} \left(v - \sigma + \frac{d\sigma}{dt} dt \right) dm \qquad (c)$$

als auf jene verwendet und nicht nach aussen abfliessend, von obiger Wärmeabgabe noch abgezogen werden muss. Durch die angenommene Erkaltung der Dampfmasse m um dt und dem entsprechenden Niederschlag eines Dampftheilchens dm ist sonach eine Wärmemenge

$$= ms_1 dt + \left(l - \frac{dl}{dt}dt + \frac{p}{A}\frac{dv}{dt}dt\right)dm - \frac{p}{A}\left(v - \sigma + \frac{d\sigma}{dt}dt\right)dm \quad (7)$$

nach aussen abgegeben worden.

Nun lassen wir die eingeschlossene Masse m durch Wärmezufuhr wieder in ihren anfänglichen Zustand zurückkehren. Um den als Dampf vorhandenen Theil $m - dm$ auf die frühere Temperatur zu bringen, wird die Wärmemenge

$$(m - dm)s_1 dt \quad (\alpha)$$

erfordert. Zur Erwärmung der flüssigen Masse dm ist die Wärme- $Cdmdt$ nöthig; hievon aber wird jener Theil

$$= \frac{p}{A}\frac{d\sigma}{dt}dmdt,$$

welcher bei der Ausdehnung von dm auf die Fortschiebung des obwaltenden Dampfdruckes verbraucht wird, durch die entsprechende Zusammendrückung des vorhandenen Dampfes gleichzeitig wieder ersetzt und ist daher von der sonst zur Erwärmung von dm nöthigen Wärmezufuhr abzuziehen, wodurch also zur Erhöhung der Temperatur dieser Flüssigkeitsmasse eine wirkliche Wärmezufuhr

$$= \left(C - \frac{p}{A}\frac{d\sigma}{dt}\right)dmdt \quad (\beta)$$

erfordert wird. Die Verdampfung dieses flüssigen Massentheils bei der nun wieder hergestellten Temperatur t verlangt eine Wärmemenge

$$= ldm; \quad (\gamma)$$

dabei wächst dessen Volumen von σdm auf vdm, das Volumen der schon früher vorhandenen Dampfmasse wird folglich um die bezügliche Differenz kleiner und bei dieser Zusammendrückung

derselben wird also eine Wärmemenge

$$=\frac{p(v-\sigma)dm}{A} \qquad (\delta)$$

erzeugt, welche von obiger Wärmeaufnahme in Abzug zu bringen ist. Demnach ist die ganze, der Masse m zur Herstellung ihres anfänglichen Zustandes von aussen zuzuführende Wärmemenge

$$=(m-dm)s_1dt+\left(C-\frac{p}{A}\frac{d\sigma}{dt}\right)dmdt+ldm-\frac{p(v-\sigma)dm}{A}. \qquad (8)$$

In dem ganzen betrachteten Vorgange konnte, da die Wände des die Masse m einschliessenden Raumes nach der Annahme unbewegt blieben, irgend eine Wärmemenge in Form von mechanischer Arbeit weder aus- noch eintreten; woraus folgt, dass die bei der Erniedrigung der Temperatur jener Masse nach aussen abgegebene Wärmemenge (7) und die bei Herstellung ihres Anfangszustandes von aussen zugeführte Wärmemenge (8) einander genau compensiren müssen. Dieser Bedingung gemäss haben wir also die Gleichung:

$$ms_1dt+\left(l-\frac{dl}{dt}dt+\frac{p}{A}\frac{dv}{dt}dt\right)dm-\frac{p}{A}\left(v-\sigma+\frac{d\sigma}{dt}dt\right)dm$$

$$=(m-dms)_1dt+\left(C-\frac{p}{A}\frac{d\sigma}{dt}\right)dmdt+ldm-\frac{p(v-\sigma)dm}{A}$$

oder wenn man die sich gegenseitig aufhebenden Glieder weglässt und die übrig bleibenden durch $dmdt$ dividirt:

$$\frac{dl}{dt}=-C+s_1+\frac{p}{A}\cdot\frac{dv}{dt};$$

da ferner der Formel (2_a) gemäss

$$s_1=c+\frac{v}{A}\cdot\frac{dp}{dt}=c+\frac{d(pv)}{adt}-\frac{p}{A}\frac{dv}{dt}$$

ist, so folgt:

$$\frac{dl}{dt}+C=c+\frac{d(pv)}{Adt}. \qquad (9)$$

Diese Gleichung, in welcher zwar die wahre specifische Wärme c des Dampfes eine constante, aber die specifische Wärme C der Flüssigkeit ihrer Bedeutung nach eine mit der Temperatur veränderliche Grösse ist, gibt integrirt:

$$l + \int C dt = B + ct + \frac{pv}{A}, \tag{10}$$

wo B die Constante der Integration bedeutet, und der Gleichung (1) gemäss ist daher auch

$$l + \int C dt = B + w. \tag{11}$$

Um die Constante B zu bestimmen, seien l_τ und w_τ die bekannten Werthe von l und w bei der Temperatur τ; es ergibt sich dann aus der Gleichung (11):

$$l + \int_\tau^t C dt = l_\tau - w_\tau + w. \tag{12}$$

Der hier links des Gleichheitszeichens stehende Ausdruck bedeutet die vorhin mit q bezeichnete Wärmemenge, welche nöthig ist, um die Gewichtseinheit der bezüglichen Flüssigkeit von τ bis t zu erwärmen und bei letzterer Temperatur in gesättigten Dampf zu verwandeln; setzen wir demnach in der vorigen Gleichung

$$l + \int_\tau^t C dt = q, \tag{13}$$

so ist

$$q = l_\tau - w_\tau + w$$

und somit auch, wenn wir auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die in der Gewichtseinheit der Flüssigkeit bei der Temperatur τ enthaltene Wärme W_τ addiren:

$$W_\tau + q = l_\tau + W_\tau - w_\tau + w$$

oder, die constante Wärmemenge

$$l_\tau + W_\tau - w_\tau = K \tag{14}$$

gesetzt:

$$W_\tau + q = K + w. \tag{15}$$

Indem w die im erzeugten Dampfe wirklich vorhandene Wärme und folglich $W_\tau + q - w = K$ die bei der Erwärmung und

Verdampfung der Flüssigkeit auf Arbeit verbrauchte Wärme bedeutet, diese aber nach (14) bei gleichbleibender Anfangstemperatur eine constante Grösse ist, so enthält die vorstehende Formel den wichtigen Satz: Wenn eine Flüssigkeit von einem gegebenen Anfangspunkte aus bis zu irgend einer Temperatur erwärmt und bei dieser in gesättigten Dampf verwandelt wird, so ist die ganze dabei auf (innere und äussere) Arbeit verbrauchte Wärmemenge immer die nämliche, welches auch die Temperatur der Verdampfung sein mag, vorausgesetzt, dass der erzeugte gesättigte Dampf ein vollkommenes Gas ist.

Unter den Folgerungen, wozu dieser Satz Anlass bietet, hebe ich hier nur eine hervor, welche mir in theoretischer Beziehung vorzüglich beachtenswerth scheint. Der Gleichung (9) zufolge muss nämlich, indem bei allen in dieser Hinsicht untersuchten Dämpfen die latente Wärme bei steigender Temperatur abnimmt und somit $\frac{dl}{dt}$ einen negativen Werth hat, nothwendig zugleich

$$c + \frac{d(pv)}{Adt} < C$$

und daher die specifische Temperaturwärme c des Dampfes bedeutend kleiner sein als die von ihrer specifischen Temperaturwärme wenig verschiedene specifische Wärme C der Flüssigkeit. In der That ist dieses ohne Ausnahme der Fall, wie man sich durch Vergleichung der specifischen Wärme der Dämpfe mit denjenigen der bezüglichen flüssigen oder festen Körper leicht überzeugen kann, und zwar scheint jedesmal die specifische Temperaturwärme des Dampfes zu jener des verdampfenden Körpers in einem Verhältnisse einfacher ganzer Zahlen zu stehen. Nach meiner eingangs erwähnten Theorie bedeutet eine Verminderung der specifischen Temperaturwärme eines Körpers eine proportionale Verminderung der Summe der Berührungsflächen seiner Atome mit dem sie umgebenden Äther; es wäre demnach anzunehmen, dass jedesmal, wenn ein flüssiger oder fester Körper durch die gewöhnliche Art der Verdampfung die Gasform annimmt, eine Zusammenlegung seiner einfachen Atome

zu grösseren, und zwar nach einer gewissen einfachen Regelmässigkeit vor sich geht, und dass umgekehrt bei dem Übergange eines Dampfes in die flüssige oder feste Form die Atome desselben sich in die entsprechenden kleineren Atome spalten. Jeder Dampf wäre dann eine isomere Modification des in denselben übergehenden Körpers; man könnte insofern diesen Wechsel der Aggregatform mit Recht einen chemischen Prozess nennen, und ich glaube, dass er in keinem wesentlichen Punkte von einem solchen verschieden ist. Jedenfalls darf man erwarten, dass der hier zunächst für die gewöhnliche Art von Verdampfung und Niederschlag abgeleitete Satz auch auf jede andere Art der Entwicklung von Gasen aus flüssigen oder festen Körpern und ihrer Reduction zu denselben, wenn dabei die Bedingung einer continuirlichen Sättigung erfüllt ist, anwendbar sein wird.

Ich habe schon bei einer früheren Gelegenheit angegeben, dass die Gleichung (1) auch zu einer einfachen Formel für die Geschwindigkeit führt, womit sich der Schall in einem gesättigten Dampfe bei vollkommenem Gaszustande fortpflanzt.

Wird nämlich das Gasvolumen v so rasch zusammengedrückt, dass sich dessen hiedurch veränderte Temperatur mit jener der Umgebung nicht ausgleichen kann, so wächst die Wärmemenge w desselben um die bei der Zusammendrückung mechanisch erzeugte Wärme, und es ist, wenn δ das auf diesen Fall bezügliche Differentialzeichen bedeutet:

$$\delta w = -\frac{p\delta v}{A}.$$

Anderseits ist der Gleichung (1) gemäss für die entsprechende Veränderung des Volumens und der Temperatur:

$$\delta w = \left[c + \frac{v}{A}\left(\frac{dp}{dt}\right)\right]\delta t + \frac{1}{A}\left[p + v\left(\frac{dp}{dv}\right)\right]\delta v = s_1\delta t + \frac{1}{A}\left[p + v\left(\frac{dp}{dv}\right)\right]\delta v;$$

substituirt man hier für δw den vorhin angegebenen Werth, so ergibt sich die der plötzlichen Zusammendrückung entsprechende Temperaturänderung

$$\delta t = -\frac{2p + v\left(\frac{dp}{dv}\right)}{As_1}\delta v$$

und somit ist unter der Bedingung eines Spannungsmaximums, d. h. für $\left(\frac{dp}{dv}\right)=0$:

$$\delta t = -\frac{2p}{As_1}\delta v. \tag{16}$$

Ferner hat man, die Spannung p als Function der Temperatur und des Volumens betrachtend:

$$\delta p = \left(\frac{dp}{dt}\right)\delta t + \left(\frac{dp}{dv}\right)\delta v,$$

daher für ein Spannungsmaximum

$$\delta p = \left(\frac{dp}{dt}\right)\delta t = \frac{dp}{dt}\delta t$$

und somit, wenn man hier für δt den vorhin erhaltenen Werth setzt:

$$\frac{\delta p}{\delta v} = -\frac{2p}{As_1}\frac{dp}{dt}. \tag{17}$$

Hienach ist der bei Berechnung der Schallgeschwindigkeit in Betracht kommende Elasticitätscoëfficient

$$H = \frac{\delta p}{\left(-\frac{\delta v}{v}\right)} = \frac{2pv}{As_1}\frac{dp}{dt}$$

und hieraus folgt, wenn man für s_1 den der Gleichung (2_a) entsprechenden Werth setzt:

$$H = \frac{2pv\frac{dp}{dt}}{Ac+v\frac{dp}{dt}}.$$

Mit diesem Ausdrucke wird die Schallgeschwindigkeit im gesättigten Dampfe, wenn g die Beschleunigung der Schwere ist:

$$S = \sqrt{gHv} = \sqrt{\frac{2gpv^2\frac{dp}{dt}}{Ac+v\frac{dp}{dt}}}. \tag{18}$$

Nach dieser Formel findet man für gesättigten Wasserdampf von 100° C. die Geschwindigkeit des Schalles = 534 Meter, wogegen die gewöhnliche Formel für einen von der Sättigung hinreichend weit entfernten Zustand dieses Dampfes unter der Annahme, dass dann das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Drucke zu jener bei constantem Volumen = 1·31 sei, die Schallgeschwindigkeit bei der nämlichen Temperatur = 474 Meter gibt; jener Werth verhält sich zu letzterem nahe wie 9 : 8.

Schluss.

Das Volumen eines Körpers unter einem gegebenen äusseren Drucke wird im Allgemeinen durch zwei in ihm selbst wirksame Kraftarten bestimmt: eine derselben ist die in ihm vorhandene Wärme, die andere ist eine bisher ihrem Wesen nach völlig unbekannte Kraftart. Dass die Wirkung der Wärme auf das Volumen des sie enthaltenden Körpers, nämlich die ausdehnende Resultante seiner thermischen Kräfte, sowohl mit dem Volumen als auch mit der Temperatur desselben wechselt, ist eine evidente Thatsache; dagegen hat man allgemein bisher (namentlich bei der Begründung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie) angenommen, dass die Wirkung der anderen Kraftart, nämlich die das Volumen zusammenziehende Resultante derselben, lediglich vom Volumen (oder der Dichte) bedingt sei. Im Vorigen sind wir nun, ohne über die Natur dieser Kraftart irgend etwas vorauszusetzen, zu dem Schlusse geführt worden, dass die innere Arbeit, welche die Wärme bei der Ausdehnung und Verdampfung eines Körpers leisten muss, mit der dabei stattfindenden Temperatur sich ändert, und dass somit der von der Wärme zu überwindende innere Druck oder die zusammenziehende Resultante der anderen Kraftart ebenfalls mit der Temperatur veränderlich sein müsse.

In der That scheint es mir, dass dieser hier aus dem Wärmeverbrauch bei der Dampfbildung erschlossene Satz sich auch von vorn herein hätte aufstellen lassen. Jener innere Druck ist nämlich offenbar eine Resultante von Kräften, welche die Atome

des bezüglichen Körpers gegenseitig ausüben und deren Intensitäten mit den Distanzen der Atome wechseln; ihre Gesammtwirkung auf das Volumen wird daher von den Stellungen abhängen, welche die sämmtlichen Atome im entsprechenden Augenblicke wirklich einnehmen. Die unzähligen Veränderlichen aber, von welchen demnach die das Volumen afficirende Resultante abhängt, lassen sich für einen nach allen Richtungen gleichartigen Körper auf zwei zurückführen: auf die mittlere Distanz zweier Nachbaratome in ihren Gleichgewichtsorten und die mittlere Verschiebung der Atome aus ihren Gleichgewichtsorten. Erstere ändert sich blos mit dem Volumen und kann durch dieses ersetzt werden, die andere aber hängt offenbar nicht blos vom Volumen, sondern auch von der Temperatur ab, und es scheint mir demnach, dass der innere Druck als eine Function der mittleren Distanz und der mittleren Verschiebung der Atome nicht blos mit dem Volumen, sondern auch mit der Temperatur veränderlich sein muss.

Wenn übrigens, abgesehen von diesem Erklärungsversuche die betreffende Thatsache feststeht, so wird man zugeben müssen, dass die unter dem Namen des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie bekannte Formel einer anderen theoretischen Begründung bedarf, als sie bisher gefunden hat.

Über die Gesetze der magnetischen und elektrischen Kräfte in magnetischen und dielektrischen Medien und ihre Beziehung zur Theorie des Lichtes.

Von dem w. M. J. Stefan.

Das Verhalten magnetischer und elektrischer Massen, so wie auch elektrischer Ströme in einem Medium, das eine magnetische oder elektrische Polarisation oder auch beide zugleich annehmen kann, namentlich auch die Gesetze der Fortpflanzung magnetischer und elektrischer Erregungen in einem solchen Medium sind schon von Maxwell[1] und Helmholtz[2] einer ausführlichen Untersuchung unterzogen worden.

Bei der grossen Wichtigkeit, welche dieser Gegenstand für die weitere Entwicklung der Lehre von den magnetischen und elektrischen Erscheinungen besitzt, schien es mir nicht überflüssig, denselben noch in einer anderen Weise, als es von den genannten Physikern geschehen, zu behandeln. Ich stellte mir die Aufgabe, die Untersuchung an die elementaren Vorstellungen und Gesetze, wie sie allgemein in der Physik gelehrt werden, anzuknüpfen und so einfach als möglich zu gestalten.

Der Weg, welchen Maxwell in der Ausführung seiner Theorie gegangen, ist ein ganz anderer als der von mir befolgte; ich habe auch von seinen Entwicklungen nichts benützt. Was

---

[1] A dynamic theory of the electro magnetic field. Phil. Transact CLV. 495 und Treatise on Electricity and Magnetism. II. 195.

[2] Über die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper. Borchardt's Journal LXXII.

Eine präcise Darstellung dieser Untersuchungen gibt Wiedemann in seiner Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus 2. Auflage. II. Bd. II. Abtheilung p. 593 u. 638.

die Untersuchungen von Helmholtz anbetrifft, so beziehen sich dieselben nur auf einen Theil der von mir behandelten Probleme. Die Ableitung der Gleichungen für die Fortpflanzung magnetischer und elektrischer Erregungen in einem Medium habe ich im Wesentlichen der von Helmholtz gegebenen nachgebildet.

Ich lasse hier zunächst eine Übersicht über den Inhalt der Abhandlung folgen und füge an dieselbe einige Bemerkungen an über die Anschauung, dass die magnetischen und elektrischen Kräfte nicht in Fernwirkungen, sondern in Actionen eines Mediums bestehen. Obwohl ich dieser Anschaung den Vorzug vor der gewöhnlichen einräume, so habe ich doch in der Abhandlung selbst an der Voraussetzung festgehalten, dass die genannten Kräfte fernwirkende sind und die Actionen des Mediums neben ihnen bestehen.

In dem ersten Theile der Abhandlung wird das Verhalten von magnetischen Massen in einem magnetischen und von elektrischen Massen in einem dielektrischen Medium behandelt.

Eine punktförmige Masse erzeugt in einem Medium eine radiale Polarisation, deren Intensität mit dem Quadrate der Distanz abnimmt und ausserdem noch abhängig ist von einer die Natur des Mediums charakterisirenden Zahl k, welche ich Magnetisirungszahl oder Elektrisirungszahl nenne, je nachdem es sich um ein magnetisches oder um ein dielektrisches Medium handelt.

Die Masse erscheint mit einer Schicht ihr ungleichnamiger, aus dem Medium angezogener umgeben und in Folge dessen wird ihre Fernwirkung verkleinert, und zwar geschieht dies im Verhältniss von $1+4\pi k : 1$. Dieser schon von Helmholtz aufgestellte Satz lässt sich ausdehnen auf den Fall, in welchem Massen auf Flächen continuirlich vertheilt sind. Er gilt auch, wenn innerhalb dieser Flächen ein anderes Medium als ausserhalb oder auch gar keines sich befindet, sobald diese Flächen Niveauflächen sind.

Die Wechselwirkung von Massen ist in einem Medium nicht wie gewöhnlich durch das Gesammtpotential aller freien Massen bestimmt. Es steht dies im Zusammenhange damit, dass in einem Medium nicht blos fernwirkende Kräfte, sondern auch noch jene molecularen thätig sind, welche in jedem Molecül der Polarisi-

rung desselben entgegenwirken. Die Uberwindung dieser Kräfte erfordert bei der Polarisirung des Mediums einen Aufwand von Arbeit, ihr Äquivalent nenne ich speciell die magnetische oder elektrische Energie des Mediums. Die Untersuchung der Grösse dieser Energie und ihres Verhaltens bei der Bewegung der Massen bildet den Hapttheil dieses Abschnittes sowohl als auch der folgenden.

Für den Fall, dass die Polarisation von einer einzigen Masse ausgeht, ergibt sich für die Energie des Mediums ein Ausdruck, welcher der Form nach mit jenem übereinstimmt, den man für das Potential dieser Masse auf sich selbst erhält, diese auf einer Kugel von unendlich kleinem Radius gleichförmig vertheilt gedacht. Der Werth der Energie verhält sich zu diesem Potentialwerthe wie $4\pi k$ zu $(1+4\pi k)^2$.

Befinden sich zwei Massen zugleich im Medium, so zerfällt seine Energie in drei Theile, von denen zwei die Energien darstellen, welche dem Vorhandensein jeder Masse für sich entsprechen, der dritte aber die durch die Coexistenz der beiden Massen bedingte Energie bildet. Auch diese ist durch einen dem Potentiale der beiden Massen auf einander entsprechenden Ausdruck nach dem oben angegebenen Verhältnisse bestimmt, also gegeben durch die Formel

$$\frac{4\pi k}{(1+4\pi k)^2}\cdot\frac{mm'}{r}.$$

Das Verhalten dieser Energie ist der Art, dass, so oft Massen unter dem Einflusse der von ihnen ausgehenden Kräfte sich bewegen, Energie im Medium verschwindet, und umgekehrt wird solche erzeugt, wenn die Massen ihrer Wechselwirkung entgegen durch andere Kräfte bewegt werden. Die Änderungen der Energie bilden somit ein Äquivalent der durch die magnetischen oder elektrischen Kräfte geleisteten Arbeit, jedoch nur ein theilweises Äquivalent, da die Arbeit selbst nach dem oben Bemerkten durch die Änderungen des Ausdruckes

$$\frac{1}{1+4\pi k}\cdot\frac{mm'}{r}$$

gemessen wird.

Der zweite Theil der Abhandlung hat die elektro-magnetischen Kräfte in einem magnetischen Medium zum Gegenstande.

Nimmt man an, dass ein Stromelement auf jedes Molecül des Mediums nach dem Grundgesetze der elektro-magnetischen Action vertheilend wirkt, so bildet das polarisirte Medium ein System von ringförmigen Magneten.

Die Action eines Stromelementes auf einen in das Medium gesetzten Magnetpol wird durch die Anwesenheit des Mediums nicht verändert, hingegen erscheint die Fernwirkung des Magnetpols auf das Stromelement verkleinert. Sollen nun die Wechselwirkungen zwischen Magneten und elektrischen Strömen in einem magnetischen Medium ebenso wie im gewöhnlichen Raume nach dem Principe der gleichen Action und Reaction erfolgen, so muss man annehmen, dass ausser der Fernwirkung des Magnetpols noch eine vom Medium selbst ausgehende Kraft auf das Stromelement wirkt. Die Existenz einer solchen Kraft lässt sich aber auch nachweisen; sie entspringt aus den an der Oberfläche des Stromelementes und den in seinem Innern ausgeschiedenen magnetischen Massen.

Diese Kraft ist nur von dem magnetischen Zustande des Mediums an dem Orte, in welchem das Stromelement sich befindet, abhängig, und hat dieselbe Richtung, wie die unmittelbar von dem Magnetpole auf das Stromelement ausgeübte Kraft, ist auch in derselben Weise von der Neigung des Stromelementes gegen seine Verbindungslinie mit dem Magnetpole abhängig.

Die Energie des Mediums, welches durch ein Stromelement und einen Magnetpol zugleich magnetisirt ist, besitzt keinen Ausdruck, welcher von den beiden Magnetisationen zugleich abhängig wäre; es verhält sich also auch in dieser Beziehung das Medium ganz indifferent.

Durch die Bestimmung der Kraft, mit welcher ein magnetisirtes Medium auf ein in ihm befindliches Stromelement wirkt, ist auch schon der Einfluss eines magnetischen Mediums auf die elektrodynamischen Erscheinungen gegeben. Die nähere Untersuchung desselben bildet den Gegenstand des dritten Abschnittes.

Befinden sich zwei Stromelemente zugleich in einem magnetischen Medium, so erhält dieses vom ersten aus eine Polarisation und wirkt im Allgemeinen in Folge dieser auf das zweite

Element und umgekehrt. Die Action des Mediums auf die beiden Stromelemente ist nun der Art, als übten diese Fernwirkungen auf einander aus, welche durch folgende zwei Gesetze gegeben sind: Zwei parallele transversale, d. h. zu ihrer Verbindungslinie senkrechte Elemente ziehen sich an mit einer Kraft

$$\frac{4\pi k i i' ds ds'}{r^2},$$

worin ds, ds', r die Längen und die Distanz der Elemente, i, i' die Intensitäten ihrer Ströme bedeuten. Ein transversales Element wirkt auf ein longitudinales, d. h. in die Verbindungslinie fallendes mit einer Kraft, deren Grösse durch denselben Ausdruck bestimmt, deren Richtung jener des transversalen Elementes parallel ist. Zwischen Elementen anderer Lage besteht keine Action.

Durch das hier gefundene elektrodynamische Gesetz, welches mit dem nach Grassmann benannten gleichbedeutend ist, kann man, wie durch das Ampère'sche und noch andere von mir abgeleitete[1] die elektrodynamischen Erscheinungen überhaupt in vollständiger Übereinstimmung mit der Erfahrung darstellen. Nimmt man also auch für den gewöhnlichen Raum dieses Gesetz als giltig an, so erscheinen die elektrodynamischen Kräfte durch die Anwesenheit des Mediums der Art nach nicht geändert, dem Masse nach aber verstärkt, und zwar im Verhältniss von 1 zu $1 + 4\pi k$.

Für die Energie des Mediums, welche der gleichzeitig von zwei Stromelementen ds und ds' ausgehenden Magnetisirung desselben entspricht, ergibt sich der merkwürdige Ausdruck

$$\frac{4\pi k i i' ds ds'}{r} \cdot \frac{\cos \varepsilon + \cos \theta \cos \theta'}{2}$$

worin ε den Winkel zwischen ds und ds', θ und θ' die Winkel zwischen ds und r, ds' und r bedeuten.

Der Factor von $4\pi k$ in dieser Formel stellt das arithmetische Mittel jener zwei Ausdrücke dar, durch welche man bisher, entweder Neumann oder Weber folgend, das elektro-

---

[1] Die Grundformeln der Elektrodynamik. Sitzungsberichte Bd. LIX.

dynamische Potential zweier Stromelemente definirt hat. Beide Ausdrücke liefern dasselbe Resultat, wenn man aus ihnen das Potential zweier geschlossener Ströme auf einander rechnet; es erscheint dieses durch die Anwesenheit des Mediums ebenfalls im Verhältniss von $1 : 1 + 4\pi k$ vergrössert.

Das Potential zweier geschlossener Ströme auf einander hat die dem gewöhnlichen Potentialbegriffe zukommende Eigenschaft. Ändert sich nämlich die relative Lage und Gestalt der Stromleiter, so wird die dabei von den elektrodynamischen Kräften geleistete Arbeit durch die Änderung des Potentials gemessen. Diese Eigenschaft kommt dem Potentiale zweier Stromelemente nicht zu. Wenigstens insofern es sich um die Wirkung des Mediums handelt, folgt aus dem Potentiale nicht das elektrodynamische Wirkungsgesetz.

Überhaupt steht die Arbeit der elektrodynamischen Kräfte, soweit diese vom Medium ausgehen, in keiner unmittelbaren Beziehung zur Energie des Mediums. Speciell ist hervorzuheben, dass das Verhalten dieser Energie im Allgemeinen gerade das entgegengesetzte von jenem ist, welches die der Coexistenz von magnetischen Massen entsprechende Energie befolgt. Jede positive Arbeit der elektrodynamischen Kräfte ist nicht von einer Abnahme, sondern von einer Zunahme der Energie begleitet und umgekehrt.

Der vierte Abschnitt der Abhandlung ist den Erscheinungen der elektrodynamischen Induction gewidmet. Die Gesetze dieser Erscheinungen lassen sich aus dem Principe der Erhaltung der Arbeit ableiten, und zwar muss man annehmen, dass nicht nur die von den elektrodynamischen Kräften geleistete Arbeit auf Kosten der Wärmeentwicklung in den Stromleitern geliefert wird, sondern dass noch ausserdem das elektrodynamische Potential für sich eine Energie darstellt, welche ebenfalls auf Kosten der Wärmeentwicklung erzeugt werden muss, umgekehrt aber auch in Wärme sich verwandeln kann. Dies habe ich für geschlossene Ströme in elementarer Weise nachgewiesen[1].

---

[1] Über die Gesetze der elektrodynamischen Induction. Sitzungsberichte Bd. LXIV.

Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die Inductionserscheinungen in geschlossenen Leitungen durch die Anwesenheit eines magnetischen Mediums der Art nach nicht geändert, dem Masse nach aber in dem Verhältniss von $1 : 1+4\pi k$ verstärkt werden, denn in diesem Verhältnisse erscheinen durch das Medium die Kräfte und das Potential vergrössert. Zugleich ist aber auch die Rolle, welche das Potential in der Theorie der Induction spielt, soweit es sich um den Einfluss des Mediums handelt, vollständig aufgeklärt. Das Potential stellt nämlich die zur Magnetisirung des Mediums nöthige Arbeit dar.

Der Einfluss des Mediums auf die Induction ist aber nicht nur für geschlossene Leitungen, er ist auch für Stromelemente durch das für Elemente giltige Wirkungsgesetz und durch die für zwei Elemente gefundene Potentialformel gegeben. Da die gewöhnliche Theorie für die inductorischen Wirkungen von Elementen kein bestimmtes Gesetz liefert, so ist es wohl am einfachsten, die Gesetze, welche für den Antheil des Mediums an den Erscheinungen der Induction gefunden worden sind, als überhaupt giltig anzunehmen.

Dadurch wird es nun möglich, die Inductionserscheinungen in einem dielektrischen Medium zu untersuchen, was in dem letzten Abschnitte der Abhandlung geschieht. Nachdem der Einfluss, den ein magnetisches Medium auf die Induction übt, schon ermittelt ist, kann man, ohne dass die Formeln complicirter werden, die Untersuchung auch für ein dielektrisches und zugleich magnetisches Medium führen.

Für die elektrischen und magnetischen Momente im Medium ergeben sich Gleichungen, welche von derselben Form sind wie die Gleichungen für die Lichtbewegung. Diese Momente pflanzen sich im Medium wie die Verschiebungen des Lichtäthers in Wellen fort, die Richtungen der Momente stehen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung, so dass auch die elektrischen und magnetischen Wellen Transversalwellen sind, wie jene des Lichtes. Zu demselben Resultate ist auch Maxwell gelangt.

Die von Helmholtz abgeleiteten Gleichungen sind insofern allgemeiner, als sie auch noch Glieder enthalten, welche für longitudinale, jedoch nur elektrische Wellen eine Fortpflanzung mit endlicher Geschwindigkeit liefern. Um diese grössere All-

gemeinheit zu erzielen, muss angenommen werden, dass in dem elektrodynamischen Potentiale die beiden Glieder $\cos \varepsilon$ und $\cos \theta \cos \theta'$ nicht mit gleichen Coefficienten erscheinen, sondern das erste etwa mit dem Factor $1+n$, das zweite mit dem Factor $1-n$, während in der vorliegenden Untersuchung für das Potentialgesetz auch für den gewöhnlichen Raum dieselbe Form gewählt wurde, welche sich aus der Untersuchung des Einflusses, den das magnetische Medium auf die Induction übt, ergeben hat.

Endlich ist noch hinzuzufügen, dass man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen elektrischen sowie auch magnetischen Wellen in einem Medium denselben Werth erhält, wie für die Geschwindigkeit des Lichtes, und hat diese Beziehung zwischen den elektrischen und optischen Eigenschaften der Körper bisher schon in einigen Fällen ihre experimentelle Bestätigung gefunden.

Es ist demnach im hohen Grade wahrscheinlich, dass der Lichtäther selbst ein dielektrisches und magnetisches Medium darstellt und Träger von elektrischen und magetischen Erscheinungen sein kann, dass eine Analogie zwischen der elektrischen und magnetischen Polarisation und dem, was wir Lichtschwingungen nennen, besteht. Eine bestimmtere und zugleich begründete Angabe scheint jedoch nach dem gegenwärtigen Stande der Theorie noch nicht möglich.

Es entsteht nun die Frage, ob man nicht überhaupt die magnetischen und elektrischen Erscheinungen als Zustände eines Mediums, etwa des Lichtäthers, aufzufassen und speciell anzunehmen habe, dass die magnetischen und elektrischen Kräfte nur scheinbare Fernwirkungen, in der That aber unmittelbare Actionen des Mediums, abhängig von seinen jeweiligen Zuständen sind, also auch so wie diese mit endlicher Geschwindigkeit sich fortpflanzen.

Die über die Fortpflanzung elektrischer und magnetischer Wellen gefundenen Resultate geben jedoch zu einer Bejahung dieser Frage keinen sicheren Anhalt, denn sie sind ja unter der Annahme abgeleitet, dass die elektrischen und magnetischen Kräfte Fernwirkungen sind, speciell unter der Annahme, dass auch die Inductionswirkungen derselben Natur sind und im ganzen Raume gleichzeitig auftreten. Daraus, dass sich

gewisse elektrische und magnetische Zustände in einem Medium mit einer bestimmten endlichen Geschwindigkeit fortpflanzen, kann man so wenig dasselbe Verhalten auch für die Kräfte folgern, als man etwa aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wasserwellen einen Schluss über die Art der Ausbreitung der Schwere ziehen kann.

Wohl aber ergibt sich aus dem, was über den Einfluss eines polarisirbaren Mediums auf die magnetischen und elektrischen Kräfte gefunden wurde, dass man, ohne den durch die Erfahrung festgestellten Gesetzen dieser Kräfte zu widersprechen, sie auf die Action des Mediums allein beschränken könne, wenn auch vorderhand die Art und Weise, wie diese Action zu Stande kommt, unbestimmt bleibt. Ich will hier diejenigen Punkte noch besonders hervorheben, welche mir zur Verdeutlichung des eben Gesagten dienlich erscheinen.

In der Theorie der Kräfte, welche nach dem Gesetze der Unveränderlichkeit der Massen und des verkehrten Quadrates der Distanz wirken, wird bewiesen, dass die von solchen Kräften erzeugte lebendige Kraft ein Äquivalent in der entsprechenden Abnahme des Potentials der wirkenden Massen besitze und dass umgekehrt eine Zunahme des Potentials nur durch Aufwand einer Arbeit erzielt werden könne. Das Potential ist eine wesentlich nur die relative Lage der Massen bestimmende Grösse, so dass in letzter Linie eine Lagenänderung und eine lebendige Kraft als äquivalente Grössen angenommen werden.

Will man die Wechselwirkungen magnetischer und elektrischer Massen nicht aus fernwirkenden Kräften, sondern aus der unmittelbaren Action des Mediums, welches diese Massen umgibt, ableiten, so muss man auch das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft in anderer Weise zur Anwendung bringen. Es kann nicht mehr die Lagenänderung der Massen als solche, es kann nur eine mit der Lagenänderung in Verbindung stehende Veränderung des Mediums als Äquivalent einer erzeugten lebendigen Kraft betrachtet werden.

Die Untersuchung über das Verhalten von magnetischen Massen in einem magnetischen Medium hat nun ergeben, dass

der Coexistenz zweier Massen eine bestimmte Energie im Medium entspricht, und dass die Änderungen dieser Energie ein theilweises Äquivalent der durch die magnetischen Kräfte gethanen Arbeiten bilden. Dieses Verhalten der Energie des Mediums, dass sie sich nämlich in lebendige Kraft bewegter Massen verwandeln und auch aus lebendiger Kraft entstehen kann, kann man nun zum Ausgangspunkte der neuen Anschauungsweise über die magnetischen Wirkungen benützen und den Satz aufstellen: Jede durch magnetische Kräfte erzeugte lebendige Kraft ist auf Kosten der Energie des Mediums erzeugt und hat in der gleichzeitigen Verminderung dieser Energie ihr volles Äquivalent. Jede zur Überwindung magnetischer Kräfte aufgewandte Arbeit hat ihr volles Äquivalent in der gleichzeitigen Vermehrung der magnetischen Energie des Mediums.

Durch diese Feststellung wird das Grundgesetz der magnetischen Kräfte nicht verändert, weil der für die Energie des Mediums gefundene Ausdruck in derselben Weise von den beiden Massen und von ihrer Distanz abhängig ist, wie das Potential dieser Massen auf einander. Nur die Definition der magnetischen Masseneinheit wird eine andere, und zwar von der Natur des Mediums, in welchem ihre Bestimmung ausgeführt wird, abhängige. Diese Abhängigkeit der Masseneinheit von der Natur des Mediums besteht übrigens auch schon unter der Annahme fern wirkender Kräfte, nur in etwas anderer Weise. Die Wechselwirkung zweier Massen m und m' in der Distanz r ist in einem magnetischen Medium, dessen Magnetisirungszahl k ist, unter der Annahme fernwirkender Kräfte

$$\frac{1}{1+4\pi k}\cdot\frac{mm'}{r^2},$$

nach dem hier aufgestellten Äquivalenzgesetze aber, wenn für die Energie des Mediums der früher gefundene Ausdruck angenommen wird

$$\frac{4\pi k}{(1+4\pi k)^2}\cdot\frac{mm'}{r^2}.$$

Wenn die Kraft, mit welcher die Masse m auf die andere m' wirkt, als eine Wirkung des Mediums allein angenommen wird,

so muss weiter noch festgestellt werden, dass und wie diese Wirkung nur von dem Zustande des Mediums in jenem Orte, in welchem die Masse m' sich befindet, abhängig ist. Dieser Zustand ist durch die Richtung und Intensität der Magnetisirung, welche in diesem Orte von m aus erzeugt worden ist, gegeben. Die Richtung der Magnetisirung fällt in die Verbindungslinie der Massen m und m', für die Intensität μ aber wurde der Ausdruck

$$\mu = \frac{km}{1+4\pi k} \cdot \frac{1}{r^2}$$

gefunden. Die von m auf m' ausgeübte Kraft kann also dargestellt werden durch

$$4\pi\mu \cdot \frac{m'}{1+4\pi k}$$

Es ist zu bemerken, dass sowohl in dem Ausdrucke für μ als auch in jenem für die Kraft jede der Massen m und m' mit dem Divisor $1+4\pi k$ behaftet erscheint. Es geben diese Quotienten jene Massen an, welche als freie Massen in den Orten von m und m' vorhanden sind, wenn man die aus dem Medium rings um m und m' ausgeschiedenen mit in Rechnung zieht.

Was hier speciell über magnetische Massen und Kräfte und das die letzteren vermittelnde magnetische Medium gesagt wurde, gilt genau in derselben Weise auch für elektrische Massen und Kräfte und ein dielektrisches Medium.

Gegenüber den in der Potentialtheorie behandelten Fernwirkungen sind die elektromagnetischen und elektrodynamischen Kräfte ganz anderer Art. Das Gesetz des verkehrten Quadrates der Distanz besteht auch für diese. Hingegen fällt die Richtung der Kraft im allgemeinen nicht mehr in die Verbindungslinie der wirkenden Grössen und, was wesentlich, das Gesetz der Unveränderlichkeit dieser Grössen trifft nicht mehr zu. Ein elektrischer Strom kann einen Magnet nicht bewegen, ohne gleichzeitig abgeschwächt zu werden. Die Theorie der elektromagnetischen und elektrodynamischen Erscheinungen hat zwar, wenigstens insoweit es sich um Wirkungen geschlossener Ströme auf magnetische Massen oder geschlossener Ströme auf einander handelt, zu Ausdrücken geführt, welche von der relativen Lage der wirkenden

Grössen abhängig die Eigenschaft des Potentials zu besitzen, so dass durch ihre Änderungen die in's Spiel tretenden lebendigen Kräfte bestimmt sind. Die Entdeckung der Inductionserscheinungen hat aber gelehrt, dass diese Potentialänderungen oder die ihnen entsprechenden Lagenänderungen nicht als die Äquivalente der lebendigen Kräfte gelten können, sondern dass diese Äquivalente in den Veränderungen der wirkenden Ströme selbst geboten sind.

Wenn man nun die elektromagnetischen und elektrodynamischen Kräfte ebenfalls als unmittelbare Wirkungen eines Mediums annimmt, so hat man nicht nur nicht nöthig, für ihre Arbeitsleistungen ein Äquivalent in der Veränderung des Mediums nachzuweisen, sondern im Gegentheile die Abwesenheit eines solchen darzuthun, um mit den Thatsachen in Übereinstimmung zu bleiben.

Die Untersuchung über das Verhalten eines magnetischen Mediums, in welchem ein Stromelement und eine magnetische Masse sich befinden, hat nun ergeben, dass es in demselben keinen durch die Coexistenz dieser beiden Grössen bedingten Antheil der Energie gibt. Diese kann sich demnach bei allen durch die Wechselwirkung von elektrischen Strömen und magnetischen Massen erzeugten Bewegungen nicht ändern, kann also auch kein Äquivalent für geleistete Arbeiten liefern. Die Gesetze der elektromagnetischen Induction bleiben daher dieselben, wenn man die neue Anschauung über die elektromagnetischen Kräfte adoptirt; diese Anschauung macht gerade die Nothwendigkeit dieser Erscheinungen klar.

Was nun die Grösse der elektromagnetischen Kräfte, welche sich aus der Wirkung des Mediums ergeben, anbetrifft, so ist gefunden worden, dass das von einer magnetischen Masse m magnetisirte Medium ein Element ds eines Stromes von der Intensität i mit einer Kraft senkrecht zur Ebene beider treibt, die durch den Ausdruck

$$4\pi\mu \, . \, i ds \sin \eta$$

bestimmt ist. μ misst wieder die Intensität der von m erzeugten Magnetisirung in dem Orte, in dem sich ds befindet, η gibt den Winkel zwischen der Richtung dieser Magnetisirung und ds, μ selbst ist bestimmt durch

$$\mu = \frac{km}{1 + 4\pi k} \cdot \frac{1}{r^2}$$

In dem Orte, in welchem m liegt, erzeugt das Stromelement eine Polarisation, deren Richtung senkrecht steht zur Ebene von ds und m, deren Intensität gegeben ist durch

$$\mu' = \frac{kids \sin \eta}{r^2}$$

Nach der oben für die Wirkung eines magnetisirten Mediums auf eine magnetische Masse aufgestellten Formel ist demnach die Kraft, welche auf m ausgeübt wird,

$$4\pi\mu' . \frac{m}{1 + 4\pi k}$$

und die Einführung der Werthe von μ und μ' in die Formeln für die beiden Kräfte ergibt für diese denselben Werth. Ihre Richtungen sind entgegengesetzt. Es bleibt also auch nach dieser Auffassung der elektromagnetischen Kräfte das Princip der gleichen Action und Reaction aufrecht, wie es die Erfahrung fordert.

Während es für die Erklärung der bisher betrachteten Erscheinungen in formeller Beziehung gleichgiltig ist, ob man dieselbe auf Fernwirkungen oder auf Actionen des Mediums gründet, ist diess für die Erklärung der elektrodynamischen Erscheinungen nicht der Fall. Auf diesem Gebiete gebührt der neuen Anschauung entschieden der Vorzug.

Wie schon aus dem oben über den Einfluss eines magnetischen Mediums auf die elektrodynamischen Erscheinungen Mitgetheilten hervorgeht, reicht das soeben besprochene Gesetz der Wirkung eines magnetisirten Mediums auf ein Stromelement hin, um die Wechselwirkung von elektrischen Strömen in einer der Erfahrung ganz entsprechenden Weise zu erklären. Die Elektrodynamik gestaltet sich zu einer einfachen, keine neuen Annahmen erfordernden Fortsetzung der Lehre vom Elektromagnetismus. Es ergibt sich auch für die Wirkungen von Stromelementen auf einander ein einfaches, bestimmtes Gesetz, während die Theorie der elektrodynamischen Fernwirkungen eine Auswahl zwischen vielen gleichberechtigten Gesetzen frei lässt.

Von noch grösserem Werthe scheint mir aber die Klarheit zu sein, in welche die Theorie der elektrodynamischen Induction durch die neue Anschauung gesetzt wird. Während die Erscheinungen der elektromagnetischen Induction aus dem Principe, dass die Arbeiten der elektromagnetischen Kräfte ihr Äquivalent in den gleichzeitigen Veränderungen der Stromleiter besitzen, abgeleitet werden können, ist diess für die Erscheinungen der elektrodynamischen Induction nicht der Fall. Schon die Extraströme, welche die Schliessung und Öffnung eines Stromes begleiten, fordern eine andere Erklärung. Man muss annehmen, dass ausser den Arbeiten der elektrodynamischen Kräfte noch die Erzeugung einer andern, übrigens auch durch das Potential bestimmten Energie durch die Veränderungen der Ströme äquivalirt werde, eine Energie, deren Grösse wohl ermittelt, deren Bedeutung aber aus der gewöhnlichen Theorie nicht entwickelt werden kann. Aber auch die Ermittlung ihrer Grösse gelingt nur für den Fall, dass es sich um geschlossene Ströme handelt; für Stromelemente bleibt sie und mit ihr auch das Inductionsgesetz unbestimmt.

Alle diese Unbestimmtheiten fallen aus, sobald man die elektrodynamischen Erscheinungen auf die Wirkungen eines Mediums zurückführt. Die Untersuchung über die Energie des Mediums liefert zunächst das Resultat, dass der Coexistenz zweier Stromelemente ein bestimmter Antheil der gesammten Energie entspreche. Die für diesen Antheil gefundene Formel stimmt mit einer jener Formeln überein, durch welche man bisher schon das Potential zweier Stromelemente definirt hat. Diese Energie zeigt das merkwürdige Verhalten, dass sie kein Äquivalent für die Arbeiten der elektrodynamischen Kräfte bilden kann, indem sie bei positiven Arbeiten ebenfalls einen positiven Zuwachs erhält und umgekehrt.

Daraus folgt nun wieder die Nothwendigkeit der Induction, aber es folgt auch noch, dass nicht nur die Arbeiten der elektrodynamischen Kräfte, ähnlich wie die der elektromagnetischen, sondern ausserdem noch die im Medium erzeugte, durch das Potential gemessene Energie in den Veränderungen der Stromleiter ihr Äquivalent haben müsse. Damit aber ist das elektro-

dynamische Inductionsgesetz nicht nur für geschlossene Ströme, sondern auch für Stromelemente in bestimmter Weise gegeben.

A. Ueber das Verhalten magnetischer und elektrischer Massen in einem polarisirbaren Medium.

I.

Befindet sich in einem unendlich ausgedehnten, homogenen magnetisirbaren Medium ein positiver Magnetpol, so hat das Medium eine radiale, magnetische Polarisation. In jedem Punkte fällt die Richtung der magnetischen Vertheilung in den dahin vom Pole gezogenen Radius, die Intensität der magnetischen Vertheilung daselbst hängt nur ab von der Distanz dieses Punktes vom Pole.

Unter Richtung und Intensität der magnetischen Vertheilung in einem Punkte ist Folgendes zu verstehen. Construirt man um diesen Punkt ein Volumenelement, so hat der von diesem begränzte Theil des Mediums eine bestimmte Richtung als magnetische Axe. Diese ist die Richtung der magnetischen Vertheilung in dem gegebenen Punkte. Dieses Element des Mediums hat ferner ein bestimmtes magnetisches Moment, wird dieses durch das Volumen des Elementes dividirt, so misst dieser Quotient, d. i. das auf die Einheit des Volumens reducirte magnetische Moment, die Intensität der magnetischen Vertheilung in dem gegebenen Punkte.

Das Gesetz, nach welchem die Intensität der magnetischen Vertheilung mit der Distanz vom Pole sich ändert, kann nach der von Poisson begründeten Theorie der magnetischen Induction abgeleitet werden aus der Bedingung, dass die durch die Magnetisirung des Mediums geweckten Kräfte im Inneren jedes Molecüles Gleichgewicht halten der magnetisirenden Kraft des Poles.

Die im Medium geweckten Kräfte sind zweierlei:

Erstens eine von der Natur des Mediums abhängige moleculare Kraft. Ihre Richtung ist in jedem Punkte bestimmt durch

die Richtung der magnetischen Vertheilung, und zwar ist sie dieser entgegengesetzt. Ihre Grösse ist bestimmt durch die Intensität der magnetischen Vertheilung und soll dieser proportional gesetzt werden. Bedeutet μ die Intensität der magnetischen Vertheilung, also das auf die Einheit des Volumens reducirte magnetische Moment in einem Orte, so kann die daselbst thätige magnetische Molecularkraft ausgedrückt werden durch $-\frac{\mu}{k}$.

k ist eine von der Natur des Mediums abhängige reine Zahl und heisst die Magnetisirungszahl des Mediums. Sie soll als eine Constante betrachtet werden der Voraussetzung gemäss, dass das Medium im ganzem Raume überall dasselbe ist und es soll auch angenommen werden, dass sie von μ selbst unabhängig ist.

Zweitens wirkt das Medium in Folge der durch seine Magnetisirung frei gewordenen magnetischen Massen in jedem Punkte mit einer Kraft, welche durch das Potential dieser Massen bestimmt ist.

In dem vorliegenden Falle lässt sich die von den freien Massen ausgehende Kraft leicht auf folgende Weise bestimmen. Denkt man sich um den Magnetpol Kugelschalen gelegt, welche die magnetisirten Molecüle enthalten, und die magnetischen Massen auf den Oberflächen dieser Schalen vertheilt, so wirkt auf einen Punkt einer solchen Schale nur die innere negative magnetische Belegung mit einer Kraft, als wäre ihre gesammte Masse im Mittelpunkte vereinigt. Alle anderen ausserhalb dieser Belegung liegenden wirken auf den Punkt nicht, alle anderen innerhalb derselben liegenden heben sich in ihren Wirkungen gegenseitig auf, da zu jeder positiven Belegung auf der Aussenseite einer Schale eine negative von gleicher Masse auf der Innenseite derselben Schale gehört.

Ist σ die Dichte der magnetischen Belegung auf der Innenseite jener Schale, in welcher der Punkt liegt, r die Distanz vom Pole, so ist die von dieser Belegung ausgehende Kraft

$$-\frac{4\pi r^2\sigma}{r^2} = -4\pi\sigma = -4\pi\mu.$$

σ und μ haben nämlich gleiche Zahlenwerthe und gleiche Dimen-

sionen. Denn hebt man aus einer Schale, deren Dicke Δ sein mag, ein Element von der Basis ω, also von dem Volumen $\omega\Delta$ heraus, so kann das magnetische Moment dieses Elementes ausgedrückt werden durch $\omega\Delta\mu$ oder durch $\omega\sigma\Delta$, woraus

$$\mu = \sigma$$

sich ergibt.

Die vom Magnetpole ausgehende Kraft endlich ist

$$+\frac{m}{r^2},$$

wenn m seine Masse bedeutet.

Die Bedingung des Gleichgewichtes ist demnach

$$-\frac{\mu}{k} - 4\pi\mu + \frac{m}{r^2} = 0 \tag{1}$$

und daraus folgt

$$\mu = \frac{k}{1+4\pi k} \cdot \frac{m}{r^2} \tag{2}$$

Durch diese Formel ist also auch die Dichte σ der auf der Kugelschale vom Radius r ausgeschiedenen magnetischen Massen bestimmt. Da nun

$$4\,\pi r^2 \sigma = \frac{4\pi k m}{1+4\pi k}$$

eine von r unabhängige Grösse ist, so folgt, dass auf der Aussenseite jeder Schale eben so viel positive Masse ausgeschieden ist als negative Masse auf der Innenseite der folgenden Schale. Freie magnetische Masse befindet sich also nur auf der innersten das Medium gegen den Pol abgränzenden Kugelfläche, und zwar ist die Menge derselben durch

$$-\frac{4\pi k m}{1+4\pi k} \tag{3}$$

gegeben.

II.

Das magnetisirte Medium übt auf den magnetisirenden Magnetpol, wie es sich von selbst versteht, keine bewegende Kraft aus.

Bringt man in das Medium noch einen zweiten Pol von der Masse m', so wird auch dieser eine von ihm als Centrum ausgehende radiale Polarisation des Mediums erzeugen, unabhängig von der bereits bestehenden, und werden sich die beiden superponiren. Zu der Kraft, mit welcher m' von m aus bewegt wird, kommt jedoch jetzt auch noch die Wirkung des von m aus polarisirten Mediums hinzu und umgekehrt.

Was die Kräfte anbetrifft, mit welchen ein Magnet auf einen inneren Punkt wirkt, so habe ich in der Abhandlung „zur Theorie der magnetischen Kräfte" gezeigt, dass sich dieselben im Allgemeinen nicht angeben lassen, wohl aber die Arbeit, welche sie auf einer endlichen Strecke leisten. Besteht der Magnetismus eines Körpers in einer Ladung seiner Molecüle mit magnetischen Massen, so ist die Arbeit der magnetischen Kräfte immer durch das magnetische Potential, oder was dasselbe ist, durch die Arbeit der von den freien magnetischen Massen ausgehenden Kräfte bestimmt, gleichgiltig, ob die Bahnstrecke in endlicher Krümmung den Raum durchmessend die Molecüle durchdringt, oder die letzteren in unendlich vielen Krümmungen umschreitet. Besteht aber der Magnetismus in elektrischen Strömen, welche die Molecüle umkreisen, so gilt die Äquivalenz der von den magnetischen Kräften gethanen Arbeit und des magnetischen Potentials nur für eine die Molecüle umfahrende Bahn von endlicher Länge. Geht die Bahn in endlicher Krümmung durch den Raum, also theilweise auch durch die Molecüle hindurch, dann hat man zu den durch das magnetische Potential gegebenen Kräften längs der ganzen Bahn in jedem Punkte eine in der Richtung der jeweiligen magnetischen Axe wirkende Kraft von der Stärke $4\pi\mu$ noch hinzuzufügen, unter μ das auf die Volumseinheit reducirte magnetische Moment verstanden.

Der Beobachtung sind nur die Wirkungen der Kräfte auf endlichen Bahnstrecken zugänglich, diese aber nach dem eben gesagten jederzeit angebbar. Ich will auch nur diese im folgenden in Betracht ziehen und zugleich auf den Fall mich beschränken, in welchem die Wirkung der Kräfte durch das magnetische Potential oder durch die Actionen der freien magnetischen Massen bestimmt ist.

Es erfährt m' neben der Abstossung von der Masse m auch noch eine Anziehung von der um m aus dem Medium ausgeschiedenen Masse

$$-\frac{4\pi km}{1+4\pi k}$$

und in dieser Anziehung besteht die Wirkung des von m aus polarisirten Mediums auf m'.

Die auf m' ausgeübte Kraft ist so beschaffen, als wäre in dem Pole m nicht die Masse m, sondern die Masse

$$m-\frac{4\pi km}{1+4\pi k}=\frac{m}{1+4\pi k}$$

concentrirt, sie ist

$$\frac{1}{1+4\pi K}\cdot\frac{mm'}{r^2},$$

erscheint also durch die Anwesenheit des Mediums im Verhältnisse von $1+4\pi k$ zu 1 verkleinert. Und ebenso verhält es sich mit der Kraft, welche auf m ausgeübt wird.

Die auf m' ausgeübte Kraft ist durch das Potential der Massen m und

$$-\frac{4\pi km}{1+4\pi k}$$

auf die Masse m' bestimmt. Es ist aber zu bemerken, dass bei der Bewegung der Massen m und m' nicht nur dieses Potential sich ändert, sondern auch noch das Potential der Massen m und

$$-\frac{4\pi km}{1+4\pi k}$$

auf die um m' ausgeschiedene Masse

$$-\frac{4\pi km'}{1+4\pi k}.$$

Es ist das Gesammtpotential der freien magnetischen Massen aufeinander

$$\frac{1}{(1+4\pi k)^2}\cdot\frac{mm'}{r} \tag{4}$$

und dieses ist kleiner, als das Potential

$$\frac{1}{1+4\pi k} \cdot \frac{mm'}{r} \tag{5}$$

durch welches die von den zwischen den beiden Magnetpolen thätigen Kräfte gethane Arbeit bestimmt ist.

Ausser der Veränderung des vorhandenen Potentials muss es also noch ein anderes Äquivalent der bei der Bewegung der Massen m und m' auftretenden Arbeit geben und dieses Äquivalent liegt in der theilweisen Entmagnetisirung des Mediums, welche eintritt, wenn sich die beiden Massen m und m' von einander entfernen.

III.

Was im Vorhergehenden über magnetische Massen und ein magnetisirbares Medium gesagt wurde, gilt in derselben Weise auch für elektrische Massen und ein dielektrisches Medium.

Befindet sich in einem solchen Medium eine elektrische Masse m, so ist die elektrische Polarisation des Mediums ebenfalls durch die Gleichung (1) bestimmt. Es bedeutet dann in derselben μ das elektrische Moment der Volumseinheit und k eine von der Natur des Mediums abhängige Zahl, welche ich Elektrisirungszahl nenne; für die Zahl $1+4\pi k$ ist der Name Dielektricitätsconstante gebräuchlich.

Die Wechselwirkung zweier elektrischer Massen m und m' erscheint durch die Anwesenheit des Mediums im Verhältniss von $1+4\pi k$ zu 1 verkleinert. Dieser Satz ist auch von Helmholtz in seiner Abhandlung „über die Bewegungsgleichungen der Elektricität in ruhenden Leitern" wie hier für punktförmige Massen abgeleitet worden. Er gilt auch für Massen, welche auf einer Fläche ausgebreitet sind, wenn auf beiden Seiten dieser Fläche dielektrisches Medium, und zwar dasselbe Medium sich befindet, mag nun die Fläche geschlossen sein oder nicht. Er gilt auch noch, wenn elektrische Massen auf einer Fläche sich befinden, welche einen guten Leiter begrenzt, wenn die Vertheilung der Massen den durch die vorhandenen Kräfte bedingten Zustand des Gleichgewichtes der Elektricität auf dem Leiter darstellt. In diesem Falle befindet sich zwar das Medium nur auf der einen Seite der belegten Fläche, man kann jedoch dasselbe auch auf der anderen

Seite als vorhanden annehmen, ohne dass dadurch in den bestehenden Verhältnissen etwas geändert wird. Da im Inneren der angenommenen Fläche das Potential constant ist, so tritt darin, auch wenn es von einem dielektrischen Medium statt von leitender Masse erfüllt ist, doch keine elektrische Polarisation ein, also wird auch keine elektrische Masse ausgeschieden.

Hingegen gilt der in Rede stehende Satz nicht mehr, wenn die Elektricität auf einem Leiter in einer dem Zustande des Gleichgewichtes nicht entsprechenden Weise vertheilt ist.

Befindet sich z. B. in einem polarisirbaren Medium eine Kugel symmetrisch um einen Durchmesser als Axe mit Masse belegt der Art, dass die Dichte dieser Masse in einem Punkte proportional ist dem Cosinus des Winkels, welchen der zu diesem Punkte gezogene Radius mit der Axe bildet, so wird das Medium so polarisirt, dass an der Oberfläche der Kugel entgegengesetzte, aber nach demselben Gesetze vertheilte Masse frei auftritt. Die Dichte dieser ausgeschiedenen Masse in jedem Punkte der Oberfläche ist, vom Vorzeichen abgesehen, im Verhältniss von

$$1 : \frac{\frac{8\pi k}{3}}{1+4\pi k}$$

kleiner, als die Dichte der in dem entsprechenden Punkte der Kugel fixirten Masse. Die Wirkung der Kugel nach aussen erscheint also durch die Anwesenheit des Mediums im Verhältniss von

$$1 : 1 - \frac{\frac{8\pi k}{3}}{1+4\pi k}$$

oder im Verhältniss von

$$1 : \frac{\frac{4\pi k}{3}}{1+4\pi k}$$

verkleinert.

Diese Ausnahme von dem oben gefundenen Satze hört jedoch sogleich auf, wenn man auch das Innere der Kugel vom Medium sich erfüllt denkt, oder wenn man eine äussere Kraft von constanter Richtung und Grösse noch vorhanden denkt, welche die an-

genommene Massenvertheilung auf der Kugel als Gleichgewichtszustand zur Folge hat.

So lange es sich nur um elektrostatische Probleme handelt, haben solche Fälle von fixer Vertheilung elektrischer Massen nach einem andern als dem Gleichgewichtsgesetze keine Bedeutung. Hingegen entspricht die Kugel mit der angenommenen fixen Massenvertheilung genau der Vorstellung, welche man sich nach Poisson von einem permanent magnetischen Molecül zu bilden hat.

IV.

Die Existenz eines Magnetpols in einem magnetischen Medium bedingt die gleichzeitige Existenz einer Energie in demselben, welche durch die bei der Magnetisirung des Mediums zur Überwindung der magnetischen Molecularkraft $\frac{\mu}{k}$ aufgewendete Arbeit bestimmt ist.

$\frac{\mu}{k}$ stellt die auf die Einheit der magnetischen Masse wirkende Molecularkraft dar. Die auf eine Masse m entfallende Kraft ist $m$mal so gross und wird diese Masse um dn in der Richtung der magnetischen Axe verschoben, so entspricht dieser Verschiebung die Arbeit

$$\frac{\mu m dn}{k}$$

Um die auf die Einheit des Volumens, diese homogen magnetisirt gedacht, entfallende Arbeit zu finden, hat man die auf alle Massen in dieser Raumeinheit auszudehnende Summe (mdn) zu bilden. Diese bedeutet aber den durch die eingeleiteten Verschiebungen geschaffenen Zuwachs des magnetischen Momentes μ und ist $= d\mu$ zu setzen. Diesem Zuwachse $d\mu$ entspricht also in der Volumseinheit die Arbeit

$$\frac{\mu d\mu}{k}$$

und dem Wachsthum des μ von Null an bis zu seinem Endwerthe μ die Arbeit

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{k} \tag{6}$$

oder wenn man den Werth von μ aus (2) einsetzt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{k}{(1+4\pi k)^2} \cdot \frac{m^2}{r^4}.$$

Um die auf den ganzen unendlichen Raum entfallende Energie zu erhalten, hat man diesen Ausdruck mit $4\pi r^2 dr$ zu multipliciren und über die ganze Ausdehnung des Mediums zu integriren.

Das Integral erhält einen unendlichen grossen Werth, wenn man von $r = 0$ bis $r = \infty$ integrirt. Stellt man sich aber den Magnetpol m als eine Kugel vom Radius a vor, so erhält man für das von $r = a$ bis $r = \infty$ ausgedehnte Integral den Ausdruck

$$\frac{4\pi k}{(1+4\pi k)^2} \cdot \frac{m^2}{2a}. \tag{7}$$

Die hier gebrauchte Vorstellung von einem Magnetpol ist zwar nicht geläufig, hingegen ist sie für eine elektrische Masse die gewöhnliche und lässt sich auch die Bedeutung des soeben abgeleiteten Ausdruckes für die Energie des Mediums leichter für den Fall, dass es sich um eine elektrische Masse und ein dielektrisches Medium handelt, erklären.

Ist auf einer Kugel vom Radius a die elektrische Masse m gleichförmig vertheilt, so bedeutet $\frac{m^2}{2a}$ das Potential dieser Ladung auf sich selbst. Durch dieses Potential ist der mechanische Werth dieser Ladung bestimmt. Es gibt z. B. die Wärmemenge an, welche bei der Entladung der Kugel durch einen sehr dünnen zur Erde führenden Draht in diesem entwickelt wird.

Durch die Anwesenheit des dielektrischen Mediums muss der mechanische Werth der Ladung m verändert, und zwar wie die Wechselwirkung zweier elektrischer Massen im Verhältniss von $1+4\pi k$ zu 1 verkleinert werden, er muss also

$$\frac{1}{1+4\pi k} \cdot \frac{m^2}{2a} \tag{8}$$

sein.

Dieser Ladungswerth ist jedoch nicht durch das Gesammtpotential der elektrischen Massen auf der Kugel und im Medium gegeben. Dieses ist nämlich, wie leicht zu übersehen,

$$\frac{1}{(1+4\pi k)^2}\cdot\frac{m^2}{2a}$$

also kleiner als der Werth (8). Es wird aber zu diesem Werthe ergänzt durch Hinzufügung der durch (7) bestimmten Energie des dielektrischen Mediums, welche bei der Entladung der Kugel ebenfalls frei wird und mit dem Potentiale der freien Massen zusammen das vollständige Äquivalent der bei der Entladung sich entwickelnden Wärme bildet.

V.

Befinden sich zwei magnetische Massen m und m' zugleich in dem Medium, so hat man, um die durch die Arbeit der magnetischen Molecularkraft repräsentirte Energie desselben zu erhalten, in (5) für μ das Quadrat des aus beiden Inductionen resultirenden magnetischen Momentes zu setzen. Sind μ und μ' die Momente, welche den von m und m' ausgehenden Inductionen entsprechen, θ der Winkel zwischen ihren Axen, so ist das Quadrat des resultirenden Momentes

$$\mu^2+\mu'^2+2\mu\mu'\cos\theta$$

und die auf die Volumseinheit entfallende Energie

$$\frac{1}{2k}(\mu^2+\mu'^2+2\mu\mu'\cos\theta).$$

Sie besteht aus drei Theilen. Die zwei ersten stellen die Energien dar, welche der Anwesenheit jeder einzelnen der zwei Massen m und m' für sich entsprechen. Die Berechnung dieser Theile ist schon in (IV.) enthalten. Der dritte Theil ist derjenige, welcher durch die Coexistenz der beiden Massen m und m' bedingt ist.

Es seien ρ und ρ' die Distanzen der Massen m und m' von dem Orte, in welchem sie die Momente μ und μ' inducirt haben. Dann sind μ und μ' bestimmt durch die Formeln

$$\mu = \frac{k}{1+4\pi k} \cdot \frac{m}{\rho^2}, \quad \mu' = \frac{k}{1+4\pi k} \cdot \frac{m'}{\rho'^2}$$

und es ist

$$\frac{1}{k} \mu\mu' \cos\theta = \frac{k}{(1+4\pi k)^2} \cdot \frac{mm' \cos\theta}{\rho^2 \rho'^2}.$$

Dieser Ausdruck ist über den ganzen unendlichen Raum zu summiren. Die Verbindungslinie der Massen m und m' werde als Axe eines polaren Coordinatensystemes gewählt, mit α der Winkel zwischen ρ und dieser Axe bezeichnet. Ein Volumelement kann dann durch $2\pi\rho^2 \sin\alpha\, d\alpha\, d\rho$ dargestellt werden und ist der Ausdruck

$$\frac{k}{(1+4\pi k)^2} \cdot \frac{mm' \cos\theta}{\rho^2 \rho'^2} \cdot 2\pi\rho^2 \sin\alpha\, d\alpha\, d\rho$$

zu integriren nach ρ von 0 bis ∞, nach α von 0 bis π. Da ρ^2 ausfällt und

$$d\rho \cos\theta = d\rho'$$

ist, so ist es einfacher, die erste Integration zu ersetzen durch eine nach ρ', welche sich von $\rho' = r$ bis $\rho' = \infty$ zu erstrecken hat, wenn r die Distanz der beiden Massen m und m' bedeutet.

Das Resultat

$$\frac{4\pi k}{(1+4\pi k)^2} \cdot \frac{mm'}{r} \tag{9}$$

bedeutet die durch die Coexistenz der beiden Massen m und m' im Medium bedingte Energie, welche, zu dem durch die Formel (4) bestimmten Potentiale der freien magnetischen Massen hinzugefügt den Ausdruck (5), das vollständige Äquivalent der durch die Wechselwirkung von m und m' erzeugten lebendigen Kraft liefert.

B. Über die elektromagnetischen Kräfte in einem magnetischen Medium.

VI.

Ein magnetisches Medium erhält auch durch einen elektrischen Strom eine Polarisation und lässt sich die Art derselben aus dem Grundgesetze der elektromagnetischen Action ableiten.

Ein Element ds eines Stromes von der Intensität i wirkt auf eine magnetische Masse m in der Distanz r mit einer Kraft

$$\frac{mids \sin \eta}{r^2},$$

unter η der Winkel zwischen ds und r verstanden. Diese Kraft steht senkrecht auf der Ebene (r, ds), sie strebt die Masse m in einem Kreise um die Richtung ds von rechts nach links zu bewegen.

Demgemäss ist auch die magnetische Vertheilung im Medium der Art, dass dasselbe ein System von ringförmigen Magneten darstellt. Da die Wirkung eines solchen Magnetringes auf einen äusseren, wie auf einen inneren Punkt Null ist, so muss in diesem Falle die magnetische Molecularkraft allein der magnetisirenden des Stromelementes Gleichgewicht halten. Die Bedingung für dieses ist also

$$-\frac{\mu}{k}+\frac{ids \sin \eta}{r^2}=0$$

woraus

$$\mu=\frac{kids \sin \eta}{r^2} \tag{10}$$

folgt.

Bei dieser Art von Polarisation erscheinen keine magnetischen Massen im Medium als frei ausgeschieden, es wird also auch die Wirkung des Stromelementes auf einen Magnetpol durch die Anwesenheit des Mediums nicht verändert.

Hingegen stellt sich die Wirkung des Magnetpols auf das Stromelement in einem magnetischen Medium als eine andere heraus. Da der Pol das Medium der Art polarisirt, dass um ihn die Masse

$$-\frac{4\pi km}{1+4\pi k}$$

frei wird, so ist seine Action auf das Stromelement so beschaffen, als wäre in ihm nur die Masse

$$\frac{m}{1+4\pi k}$$

concentrirt, hat sonach den Werth

$$\frac{1}{1+4\pi k} \cdot \frac{mids \sin \eta}{r^2}.$$

Die elektromagnetischen, zwischen einem Stromelemente und einem Magnetpol thätigen Kräfte entsprechen im gewöhnlichen Raume dem Princip der gleichen Action und Reaction. Sollen die elektromagnetischen Wirkungen auch in einem magnetischen Medium nach demselben Principe erfolgen, so muss ausser der vom Pole und der um ihn ausgeschiedenen negativen Masse ausgehenden noch eine Kraft α in derselben Richtung auf das Stromelement wirken, der Art, dass

$$\alpha + \frac{1}{1+4\pi k} \cdot \frac{mids \sin \eta}{r^2} = \frac{mids \sin \eta}{r^2}$$

wird.
Aus dieser Gleichung folgt

$$\alpha = \frac{4\pi k}{1+4\pi k} \cdot \frac{mids \sin \eta}{r^2}.$$

Es ist aber

$$\frac{k}{1+4\pi k} \cdot \frac{m}{r^2} = \mu$$

das von m aus inducirte magnetische Moment in dem Orte des Mediums, in welchem ds sich befindet. Man kann also auch

$$\alpha = 4\pi\mu ids \sin \eta \qquad (11)$$

schreiben.

Wird diese Kraft α als vorhanden angenommen, so erfährt das elektromagnetische Grundgesetz durch die Anwesenheit des magnetischen Mediums keine Veränderung, es bleibt nicht nur der Form nach bestehen, sondern auch die Grössen der activen Kräfte bleiben dieselben.

Das Vorhandensein der Kraft α lässt sich auch aus dem elektromagnetischen Grundgesetze selbst ableiten, allerdings nur unter der Voraussetzung, dass das Medium den Stromleiter nicht blos umgibt, sondern auch durchdringt.

Es sei das Medium homogen magnetisirt und die Richtung der Magnetisirung die Axe der x. Der in das Medium gesetzte

Stromleiter habe die Form einer rechteckigen Platte. Die Seiten der die Platte begrenzenden Rechtecke sollen den Axen der y und z parallel gehen, die Dicke der Platte soll unendlich klein sein gegen ihre beiden andern Dimensionen. Ferner soll die Platte von einem parallel zur Axe der z gehenden Strome durchflossen sein.

An den Grenzen des Mediums, welche durch die zur Axe der x senkrechten Flächen der Platte gebildet werden, treten freie magnetische Massen auf, und zwar positive auf der dem Anfangspunkte der Coordinaten näheren, negative auf der andern Seite.

Der Strom in der Platte werde in Stromfäden zerlegt, das Längenelement eines solchen Fadens sei $d\zeta$, der Querschnitt $d\xi d\eta$. Ist i die Intensität des ganzen die Platte durchfliessenden Stromes, der Querschnitt der Platte q, so geht durch den Querschnitt $d\xi d\eta$ ein Strom von der Intensität

$$\frac{id\xi d\eta}{q}.$$

Eine magnetische Masse m auf der Vorderseite der Platte übt auf das Stromelement $d\zeta$ eine Kraft aus, deren Componenten durch

$$X = \frac{mi}{q}\, d\xi d\eta d\zeta\, \frac{(\eta - y)}{r^3}$$

$$Y = -\frac{mi}{q}\, d\xi d\eta d\zeta\, \frac{\xi - x}{r^3}$$

gegeben sind, wenn x, y, z die Coordinaten von m und ξ, η, ζ jene des Stromelementes $d\zeta$ sind.

Diese Ausdrücke sind zunächst über alle auf der Vorderfläche ausgeschiedenen Massen m zu summiren. Die Summen der Ausdrücke

$$m\frac{\eta - y}{r^3}, \quad m\frac{\xi - x}{r^3}$$

bedeuten aber nichts anderes als die zu den Axen der y und x parallelen Componenten der Kraft, mit welcher die mit Masse belegte Vorderfläche auf eine in ξ, η, ζ gelegene Masseneinheit wirkt. Da die Distanz dieser Masseneinheit von der Fläche der Voraussetzung gemäss unendlich klein ist gegen die Ausdehnung

der Fläche, so ist erstere Componente der Null gleich, letztere aber $= 2\pi\mu$, wenn μ die Dichte der Massenbelegung bedeutet, und zwar ist im vorliegenden Falle μ gleichbedeutend mit dem magnetischen Momente der Volumseinheit des Mediums.

Die von den magnetischen Massen auf der Vorderfläche der Platte auf das Stromelement $d\zeta$ ausgeübte Kraft ist demnach

$$-\frac{2\pi\mu i}{q}\,d\xi d\eta d\zeta$$

und eben so gross und von derselben Richtung ist auch die von den negativen magnetischen Massen, welche auf der Hinterfläche der Platte frei sind, so dass das Stromelement $d\zeta$ im Ganzen die Einwirkung einer Kraft

$$-\frac{4\pi\mu i}{q}\,d\xi d\eta d\zeta$$

erfährt.

Wird dieser Ausdruck über alle Stromelemente der Platte summirt, so gibt die Summe der Elemente $d\xi d\eta d\zeta$ das Volumen der Platte, und dieses durch q dividirt die Höhe der Platte. Nennt man diese Höhe ds, so folgt für das plattenförmige Stromelement die vom Medium auf dasselbe ausgeübte Kraft

$$Y = -4\pi\mu i ds.$$

Man kann jeden der Axe der z parallelen Stromleiter in unendlich dünne zur Axe der x senkrechte Platten zerschneiden. Sind auf jede dieser Platten die hier gemachten Schlüsse anwendbar, und dies ist der Fall, wenn das Medium den Stromleiter durchdringt, so ist die Kraft, mit welcher das Medium auf einen Stromleiter wirkt, unabhängig von der Gestalt des Querschnittes des Leiters und durch den obigen Ausdruck nach Richtung und Grösse bestimmt.

VII.

Es ist nun noch die Energie zu berechnen, welche der Anwesenheit eines Stromelementes und eines Magnetpols im Medium entspricht. Es genügt jenen Antheil zu bestimmen, welcher durch die Coexistenz des Elementes und des Poles bedingt ist, nachdem der von dem Pole abhängige schon durch die For-

mel (7) gegeben ist, der von dem Stromelemente allein abhängige erst im folgenden Abschnitte zur Betrachtung kommen kann.

Da die magnetischen Wirkungen von Stromelementen sich ersetzen lassen durch die ihrer Compenenten, so sollen die zwei einfachsten Fälle, auf welche sich alle andern reduciren lassen, gesondert betrachtet werden.

Erstens das Element falle in seine Verbindungslinie mit dem Magnetpol. Das in irgend einem Orte des Mediums durch das Stromelement inducirte Moment hat seine Axe senkrecht zur Ebene, welche diesen Punkt und die Verbindungslinie von Stromelement und Magnetpol enthält. Hingegen liegt die Axe des vom Pole inducirten Momentes in dieser Ebene. Die zwei Momente stehen aufeinander senkrecht, geben also in die Resultante kein von beiden zugleich abhängiges Glied. Demnach erhält man auch für das Medium keine von der Coexistenz des Stromelementes und des Magnetpols abhängige Energie.

Zweitens das Element stehe auf seiner Verbindungslinie mit dem Magnetpol senkrecht. Auch in diesem Falle enthält das Medium keine durch die Coexistenz beider bedingte Energie.

Heben wir einen einzelnen vom Stromelemente erzeugten Magnetring heraus und halbiren ihn durch eine das Stromelement und den Magnetpol enthaltende Ebene. Die magnetischen Momente im Ringe bilden mit den in die Ringebene fallenden Componenten der vom Pole inducirten Momente in der einen Hälfte des Ringes spitze, in der anderen Hälfte stumpfe Winkel. Die von beiden Momenten zugleich abhängigen Theile des resultirenden Momentes fallen daher bei der Summirung über den ganzen Ring aus.

Es gibt also keine von der Coexistenz des Stromelementes und des Magnetpols im Medium abhängige Energie.

Damit ist nun zugleich die Frage nach dem Einflusse, welchen ein magnetisches Medium auf die Gesetze der elektromagnetischen Induction nimmt, erledigt. Diese ergeben sich nämlich aus dem Principe der Erhaltung der Arbeit mittelst der Annahme, dass jeder von den elektromagnetischen Kräften geleisten Arbeit eine äquivalente Verminderung der Wärmeentwicklung in dem Stromleiter entspreche. Da die elektromagneti-

schen Kräfte durch die Anwesenheit des Mediums nicht verändert erscheinen, da im Medium selbst keine Änderung der Energie eintritt, wenn ein Strom und ein Magnetpol in demselben sich bewegen, so bleiben bei solchen Bewegungen die Arbeitsleistungen dieselben, wie im gewönlichen Raume, also bleibt auch das Inductionsgesetz unverändert bestehen.

Anders verhält es sich mit dem Falle von Induction, welche die Magnetisirung eines Körpers durch einen elektrischen Strom begleitet. Die Discussion dieses Falles lässt sich jedoch erst vollständig und dann leicht durchführen, wenn der Einfluss des Mediums auf die Gesetze der elektrodynamischen Induction erörtert ist.

C. Ueber die elektrodynamischen Kräfte in einem magnetischen Medium.

VIII.

Ein magnetisirtes Medium wirkt auf ein in ihm befindliches Stromelement mit einer Kraft $4\pi\mu i ds \sin\eta$. μ bedeutet das magnetische Moment der Volumseinheit des Mediums in dem Orte, in welchem sich ds befindet, η den Winkel zwischen der Richtung von ds und der magnetischen Axe des Momentes μ. Die Richtung dieser Kraft steht senkrecht auf der Ebene, in welcher ds und die magnetische Axe liegen. Sie geht nach der linken Hand einer in ds stehenden nach der magnetischen Axe ausblickenden Figur.

Durch diese Bestimmung ist auch schon die Frage, in welcher Weise die elektrodynamischen Wirkungen durch ein magnetisches Medium verändert werden, erledigt. Die Anwesenheit eines Stromelementes im Medium bedingt in diesem eine Polarisation, in Folge welcher das Medium auf ein zweites in ihm befindliches Stromelement nach obiger Formel wirkt, und durch die Polarisation, welche das Medium durch das zweite Element erhält, wirkt es wieder auf das erste.

Die Betrachtung wird übersichtlicher, wenn man die Actionen beliebig gegen einander gerichteter Stromelemente ersetzt durch

die Actionen ihrer Componenten, und zwar der in die Verbindungslinie fallenden, longitudinalen, und der zu dieser senkrecht stehenden, transversalen.

Es seien θ und θ' die Winkel, welche zwei Elemente ds und ds' mit der von ds zu ds' gezogenen Linie r bilden. Ferner sei ω der Winkel zwischen der Ebene (r,ds) und der Ebene (r,ds'). Die longitudinalen Componenten von ds und ds' sind $ds \cos\theta$ und $ds' \cos\theta'$. Die transversale des ersten Elementes ist $ds \sin\theta$, die des zweiten $ds' \sin\theta'$. Letztere kann man zerlegen in eine zu $ds \sin\theta$ parallele $ds' \sin\theta' \cos\omega$ und eine dazu senkrechte $ds' \sin\theta' \sin\omega$.

Die longitudinale Componente $ds \cos\theta$ erzeugt im Medium eine Polarisation, deren Axe die Verbindungslinie r ist. In Folge dieser Polarisation übt das Medium auf die in derselben Axe liegende Componente $ds' \cos\theta'$ keine Kraft aus, ebenso keine auf die Componente $ds' \sin\theta'$. Wohl wirkt es auf letztere mit einem Momente drehend um die Axe r, dieses Moment ist aber von einer Kleinheit höherer Ordnung, als solche bei den noch zu betrachtenden Actionen vorkommt.

Die transversale Componente $ds \sin\theta$ erzeugt eine Polarisation der Art, dass die magnetische Axe derselben in dem Orte von ds' senkrecht steht auf der Ebene (r,ds) und nach der linken Hand einer in ds stehenden und nach ds' blickenden Figur gerichtet ist. Die Intensität des im Orte von ds' inducirten Momentes μ ist bestimmt durch

$$\mu = \frac{kids \sin\theta}{r^2}$$

wenn i die Intensität des Stromes in ds bedeutet.

In Folge dessen wirkt das Medium auf die longitudinale Componente $ds' \cos\theta'$ mit der Kraft

$$4\pi\mu i' ds' \cos\theta'$$

senkrecht gegen $ds' \cos\theta'$, und zwar in der Richtung von $ds \sin\theta$. i' bezeichnet in dieser Formel die Intensität des Stromes in ds'.

Ferner wirkt das Medium auf die transversale Componente $ds' \sin\theta' \cos\omega$ mit der Kraft

$$4\pi\mu i' ds' \sin\theta' \cos\omega$$

in der Richtung der Verbindungslinie r von ds gegen das Element ds'.

Die transversale Componente $ds' \sin \theta' \sin \omega$ endlich erfährt keine Einwirkung, weil sie in der Axe des magnetischen Momentes des Mediums liegt.

Das Medium bedingt demnach zwischen elektrischen Strömen eine Action, welche durch zwei Elementarkräfte bestimmt ist. Die eine von ihnen stellt eine Anziehung zwischen parallelen transversalen Elementen dar, die andere eine Transversalkraft, welche von einem transversalen Elemente auf ein longitudinales ausgeübt wird. In der Abhandlung „über die Grundformeln der Elektrodynamik" habe ich dieses Wirkungsgesetz als eines der einfachsten aufgeführt, durch welche die elektrodynamischen Erscheinungen erklärt werden können.

Ich habe auch gezeigt, dass es mit dem unter dem Namen des Grassmann'schen bekannten übereinstimmt und einerlei ist mit der von Ampère für die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Element abgeleiteten Formel, wenn man von dieser Formel das Integralzeichen weglässt.

Die Kräfte, mit welchen elektrische Ströme auf einander wirken, auch schon die Action eines Stromes auf ein einzelnes Element, erleiden durch die Anwesenheit eines Mediums keine Veränderung in ihrer Art, sondern nur in ihrer Intensität und zwar so, dass letztere eine grössere wird im Verhältniss von 1 zu $1+4\pi k$. Dasselbe gilt auch für die Wirkungen der Stromelemente, wenn für diese das oben bezeichnete Elementargesetz auch im gewöhnlichen Raume besteht.

IX.

Die Anwesenheit von elektrischen Strömen in einem magnetischen Medium bedingt in diesem eine Energie, deren Grösse nun ermittelt werden soll. Zuerst soll die durch die Coexistenz zweier Stromelemente bedingte Energie ausgewerthet werden. Es ist wieder am einfachsten, statt der Elemente ihre longitudinalen und transversalen Componenten einzuführen.

Von den zwei longitudinalen Elementen $ds \cos \theta$ und $ds' \cos \theta'$ polarisirt jedes das Medium circular um ihre Verbindungslinie r. Erzeugt das eine Element irgendwo das Moment μ, das zweite

ebendort das Moment μ', so haben diese beiden einerlei Richtung, wenn die Elemente in gleichem Sinne durchströmt werden. Die Resultante der Momente ist $\mu+\mu'$ und die auf die Volumseinheit des Mediums entfallende Energie

$$\frac{1}{2k}(\mu^2+\mu'^2+2\mu\mu').$$

Die durch die Coexistenz der zwei longitudinalen Elemente bedingte Energie des Mediums ist sonach die über den ganzen Raum erstreckte Summe von

$$\frac{\mu\mu'}{k}.$$

Sind ρ und ρ' die Entfernungen der Stromelemente von einem Punkte des Mediums, η und η' die Winkel, welche ρ und ρ' mit r bilden, so ist in dem angenommenen Punkte

$$\mu=\frac{kids\cos\theta\sin\eta}{\rho^2},\quad \mu'=\frac{ki'ds'\cos\theta'\sin\eta'}{\rho'^2}$$

Ein Raumelement kann in diesem Falle durch $2\pi\rho^2 d\rho\sin\eta\, d\eta$ ausgedrückt werden und man hat

$$kii'dsds'\cos\theta\cos\theta'\frac{\sin\eta\sin\eta'}{\rho^2\rho'^2}.\quad 2\pi\rho^2 d\rho\sin\eta d\eta$$

nach ρ von 0 bis ∞, nach η von 0 bis π zu integriren.

Lässt man bei constant bleibendem η ρ um $d\rho$ wachsen, so wächst das von ρ,ρ' und der Verbindungslinie r begrenzte Dreieck um ein Stück, dessen doppelter Inhalt durch $r\sin\eta d\rho$, aber auch durch $-\rho'^2 d\eta'$ ausgedrückt werden kann. Die Integration nach ρ lässt sich daher ersetzen durch eine nach η' und hat diese von $\eta'=\pi$ bis $\eta'=\eta$ erstreckt zu werden. Führt man diese und nachher noch die nach η aus, so erhält man

$$\frac{4\pi kii'dsds'\cos\theta\cos\theta'}{r}$$

als den Werth der durch die Coexistenz der longitudinalen Componenten $ds\cos\theta$ und $ds'\cos\theta'$ im Medium bedingten Energie.

Die zwei parallelen transversalen Componenten $ds \sin\theta$ und $ds' \sin\theta' \cos\omega$ polarisiren das Medium der Art, dass die Momente μ und μ' in irgend einem Punkte des Mediums in die Richtungen der Tangenten zweier Kreise fallen. Die Centra dieser Kreise liegen in den Richtungen der Componenten $ds \sin\theta$ und $ds' \sin\theta'$ $\cos\omega$, ihre gemeinschaftliche Ebene steht senkrecht auf diesen Richtungen. Die Tangenten zu diesen Kreisen schliessen den Winkel $\alpha'-\alpha$ ein, wenn α und α' die Winkel zwischen den Projectionen von r und ρ, r und ρ' auf die Kreisebene bedeuten. Die Resultante von μ und μ' ist demnach

$$\mu^2 + \mu'^2 + 2\mu\mu' \cos(\alpha'-\alpha)$$

bezeichnet man mit η und η' die Winkel, welche ρ mit $ds \sin\theta$ und ρ' mit $ds' \sin\theta' \cos\omega$ bildet, so ist

$$\mu = \frac{kids \sin\theta \sin\eta}{\rho^2}, \quad \mu' = \frac{ki'ds' \sin\theta' \cos\omega \sin\eta'}{\rho'^2}$$

und entspricht der Coexistenz der beiden transversalen Componenten in der Volumseinheit die Energie

$$\frac{\mu\mu' \cos(\alpha'-\alpha)}{k} = \frac{kii'dsds' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega \sin\eta \sin\eta' \cos(\alpha'-\alpha)}{\rho^2\rho'^2}$$

Die Summirung dieses Ausdruckes über den unendlichen Raum lässt sich leichter durchführen, wenn man statt $\eta, \eta', \alpha, \alpha'$ die Winkel φ und φ', welche ρ und ρ' mit r bilden und den Winkel ψ einführt, welchen das von ρ, ρ' und r begrenzte Dreieck mit einer auf den transversalen Componenten senkrechten Ebene einschliesst.

Es ist dann

$$\sin\eta \cos\alpha = \cos\varphi, \quad \sin\eta \sin\alpha = \sin\varphi \cos\psi,$$
$$\sin\eta' \cos\alpha' = \cos\varphi', \sin\eta' \sin\alpha' = \sin\varphi' \cos\psi$$

und hiemit wird

$$\frac{\mu\mu' \cos(\alpha'-\alpha)}{k} =$$
$$\frac{kii' ds ds' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega}{\rho^2\rho'^2} (\cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \cos^2\psi),$$

zu welcher Formel man übrigens auch unmittelbar gelangt, wenn man das resultirende magnetische Moment nicht aus μ und μ' direct, sondern aus den nach den Coordinatenaxen entfallenden Componenten dieser Momente berechnet.

Ein Volumenelement kann man durch

$$\alpha \rho^2 d\rho \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi$$

ausdrücken, es ist also der Ausdruck

$$\frac{\cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \cos^2\psi}{\rho^2 \rho'^2} \rho^2 d\rho \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi$$

zu integriren. Bemerkt man, dass

$$r \sin\varphi \, d\rho = -\rho'^2 d\varphi',$$

so kann man die nach ρ von 0 bis ∞ auszudehnende Integration ersetzen durch eine nach φ' von π bis φ. Integrirt man dann noch nach ψ von 0 bis 2π, so erhält man das Resultat

$$\frac{2\pi}{r}.$$

Es ist demnach die durch die Coexistenz der zwei parallelen transversalen Elemente $ds \sin\theta$ und $ds' \sin\theta' \cos\omega$ bedingte Energie

$$\frac{2\pi k i i' \, ds \, ds' \sin\theta \sin\theta' \cos\omega}{r}$$

Es ist leicht zu überblicken, dass zwei Stromelemente, welche auf einander senkrecht stehen, kein von beiden zugleich abhängiges Glied in den Ausdruck für die Energie des Mediums liefern. Es entspricht also der Coexistenz zweier Elemente ds und ds' im ganzen die Energie

$$\frac{4\pi k i i' ds \, ds'}{r} (\cos\theta \cos\theta' + 1/_2 \sin\theta \sin\theta' \cos\omega).$$

Führt man statt ω den Winkel ε ein, welchen die Richtungen der beiden Stromelemente einschliessen, welcher Winkel durch

$$\cos\varepsilon = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos\omega$$

bestimmt ist, so kann man den beiden Elementen gemeinschaftlichen Antheil der Energie auch ausdrücken durch

$$\frac{4\pi k i i' ds\, ds'}{r} \cdot \frac{\cos\theta \cos\theta' + \cos\varepsilon}{2} \tag{12}$$

X.

Der Factor von $4\pi k$ in der soeben abgeleiteten Formel über zwei geschlossene Strombahnen s und s' integrirt ist das Potential zweier geschlossener Ströme auf einander. Die Intensitäten der letzteren sind in elektromagnetischem Masse ausgedrückt. Dieses Potential ist übrigens auch schon durch das bezeichnete Doppelintegral eines der beiden Ausdrücke

$$\frac{i i' ds\, ds'}{r} \cos\theta \cos\theta' \quad \text{oder} \quad \frac{i i' ds\, ds'}{r} \cos\varepsilon$$

bestimmt, weil die Integrale der Ausdrücke

$$\frac{\cos\varepsilon\, ds ds'}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\cos\theta \cos\theta' ds\, ds'}{r}$$

gleiche Werthe besitzen, sobald eine der beiden Integrationen über eine geschlossene Bahn sich erstreckt.

Die durch die Coexistenz zweier elektrischer Ströme in einem Medium bedingte Energie ist demnach bestimmt durch das Product aus $4\pi k$ in das Potential der beiden Ströme auf einander. Und weiters folgt, wenn man ds und ds' als zwei Elemente eines und desselben Stromes auffasst, dass die durch einen geschlossenen Strom in einem Medium bedingte Energie bestimmt ist durch das Product aus $4\pi k$ in das Potential des Stromes auf sich selbst.

Man kann auch den Ausdruck

$$\frac{i i' ds\, ds'}{r} \cdot \frac{\cos\theta \cos\theta' + \cos\varepsilon}{2} \tag{13}$$

Potential zweier Stromelemente auf einander nennen. Es ist aber zu bemerken, dass diesem Potentiale nicht die Eigenschaft zu-

kommt, wie anderen mit diesem Worte bezeichneten Grössen. Die Variation desselben gibt nämlich nicht die Arbeit der Kräfte an, mit welchen die beiden Stromelemente auf einander wirken, wohl aber misst sie die Veränderung, welche in der Energie des Mediums durch die entsprechende Verschiebung der Stromelemente erzeugt worden ist.

D. Ueber die Gesetze der Induction in einem magnetischen Medium.

XI.

So wie die elektrodynamischen Kräfte werden auch die Erscheinungen der Induction durch die Anwesenheit eines magnetisirbaren Mediums verändert.

In der Abhandlung „über die Gesetze der elektrodynamischen Induction" habe ich diese abgeleitet aus dem Satze, dass nicht nur die Arbeiten der elektrodynamischen Kräfte, sondern auch die Potentialwerthe selbst Energien darstellen, welche auf Kosten der Wärmeentwicklung geschaffen werden müssen, umgekehrt aber auch sich wieder in Wärme verwandeln können.

Da in einem magnetischen Medium sowohl die elektrodynamischen Kräfte als auch die Potentialwerthe im Verhältniss von 1 zu $1+4\pi k$ grösser sind, als im gewöhnlichen Raume, so müssen auch die elektromotorischen Kräfte der Induction durch die Anwesenheit des Mediums in demselben Verhältnisse vergrössert erscheinen, mögen nun diese elektromotorischen Kräfte durch Stromschwankungen oder durch Bewegungen von Leitern verursacht werden.

Wird z. B. ein Strom geschlossen, so wird während des Ansteigens der Stromintensität von Null bis zu ihrem Endwerthe nur ein Theil der gleichzeitig von den chemischen Kräften der Kette gelieferten Arbeit in Wärme verwandelt, ein Theil aber in eine andere Form übergeführt. Dieser Vorgang bildet den Extrastrom der Schliessung. Die Menge der latent gewordenen Wärme

ist bestimmt durch das Potential des Stromes auf sich selbst. Da dieses in einem magnetischen Medium $(1+4\pi k)$mal grösser ist, als im gewöhnlichen Raume, so kann man schliessen, dass in demselben Masse auch die Energie des Extrastromes im Medium grösser wird.

Aus den vorhergegangenen Entwicklungen ist aber auch unmittelbar die Bedeutung und Nothwendigkeit dieses Zuwachses an Energie klar. Er stellt die Arbeit dar, welche zur Magnetisirung des Mediums aufgewendet werden musste, es ist Arbeit der chemischen Kräfte in magnetische Energie des Mediums übergeführt worden.

Wird der Strom unterbrochen, so wird die bei der Schliessung latent gewordene Wärme wieder frei, es verwandelt sich auch die magnetische Energie des Mediums, während sich dieses entmagnetisirt, wieder in Wärme.

Während über die Gesetze der elektrodynamischen Induction vollständige Klarheit herrscht, insofern es sich um geschlossene Stromleiter handelt, ist dieses bezüglich der für Stromelemente aufzustellenden Gesetze, wie ja ebenso bezüglich der elektrodynamischen Elementarkräfte, nicht der Fall.

Der Einfluss eines magnetischen Mediums auf die inductorischen Wirkungen von Stromelementen auf einander ist jedoch vollständig bestimmt.

Für ruhende Elemente ist die durch Änderungen der Stromintensitäten verursachte Induction durch die gleichzeitigen Änderungen der Energie des Mediums gegeben, die Energie des Mediums selbst durch die oben als Potential zweier Stromelemente auf einander definirte Grösse bestimmt.

Für bewegte Elemente kommt zweierlei zu betrachten. Erstens die durch die Veränderung der relativen Lage der Elemente bewirkte Variation der Energie. Diese ist wieder durch die Änderung des Potentials der beiden Stromelemente auf einander gegeben. Zweitens die Arbeit, welche die elektrodynamischen Kräfte bei der Bewegung der Elemente leisten; diese Kräfte selbst sind aber durch das sogenannte Grassmann'sche Gesetz bestimmt.

Sollen die inductorischen Wirkungen im Medium, auch wenn man Elemente von Strömen oder Leitern in Betracht

nimmt, nur dem Massstabe, nicht aber der Art nach sich von jenen im gewöhnlichen Raume unterscheiden, so muss wieder für diesen Raum einerseits das Grassmann'sche Gesetz als giltig angenommen, andererseits der Ausdruck

$$\frac{ii'dsds'}{r} \cdot \frac{\cos\varepsilon + \cos\theta\cos\theta'}{2}$$

als Potential zweier Stromelemente auf einander definirt werden.

XII.

Ändert sich in einem Leiterelemente ds' die Stromintensität i', so können in jedem Punkte des Raumes elektromotorische Kräfte in Thätigkeit treten und sie kommen auch überall zur Wirksamkeit, wo eine Bewegung der Elektricität stattfinden kann.

Zur Ausführung allgemeiner Untersuchungen ist es nothwendig, Ausdrücke für die nach bestimmten Richtungen geschätzten Componenten der elektromotorischen Kraft in einem Punkte zu haben. Diese Ausdrücke werden auf folgende Art gewonnen. In dem Punkte, für welchen die in eine gegebene Richtung fallende elektromotorische Kraft bestimmt werden soll, denkt man sich ein dieser Richtung paralleles, der Längeneinheit gleiches und von der Einheit der Stromintensität durchflossenes Element. Die auf die Zeiteinheit reducirte Änderung des Potentials von ds' auf dieses Element drückt die gesuchte Componente der elektromotorischen Kraft aus.

Wird das Potential zweier Stromelemente auf einander definirt durch die Formel (13), so ist das Potential von ds' auf das gedachte Element

$$U' = \frac{i'ds'}{r} \cdot \frac{\cos\varepsilon + \cos\theta\cos\theta'}{2} \tag{14}$$

worin ε, θ und θ' die gewöhnlichen Bedeutungen haben.

Die gesuchte Componente der elektromotorischen Kraft ist

$$-\frac{dU'}{dt}$$

oder da in U' nur i' als von der Zeit abhängig vorausgesetzt wird

$$-\frac{di'}{dt}\cdot\frac{ds'}{r}\cdot\frac{\cos\varepsilon+\cos\theta\cos\theta'}{2}$$

Die von einem geschlossenen Strome ausgeübte elektromotorische Kraft wird durch Integration dieses Ausdruckes nach s' gewonnen. Da für eine geschlossene Bahn die beiden Integrale

$$\int\frac{\cos\varepsilon ds'}{r} \text{ und } \int\frac{\cos\theta\cos\theta' ds'}{r}$$

gleiche Werthe besitzen, so kann man das Integral der obigen Formel durch eines der eben bezeichneten allein ausdrücken. Setzt man demnach

$$U=i'\int\frac{\cos\varepsilon ds'}{r} \tag{15}$$

so gibt

$$-\frac{dU}{dt}$$

die von dem geschlossenen Strome herrührende nach der gegebenen Richtung geschätzte Componente in dem gewählten Punkte.

Um die nach den Richtungen der Coordinatenaxen geschätzten Componenten der von einem Elemente ds' ausgehenden elektromotorischen Kraft in einem Punkte x, y, z zu bestimmen, sei die Lage des Elementes ds' durch die Coordinaten x', y', z' und die Winkel α', β' γ', welche es mit den Axen bildet, gegeben. Der Formel (14) entsprechend sind drei Ausdrücke zu bilden, indem man für $\cos\varepsilon$ der Reihe nach $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ und gleichzeitig für $\cos\theta$ die Werthe

$$\frac{x'-x}{r},\quad\frac{y'-y}{r},\quad\frac{z'-z}{r}$$

einsetzt. Bezeichnet man diese Ausdrücke mit X', Y', Z', so ist

$$\begin{aligned}X'&=\frac{i'ds'}{2r}\left(\cos\alpha'+\frac{x'-x}{r}\cos\theta'\right)\\Y'&=\frac{i'ds'}{2r}\left(\cos\beta'+\frac{y'-y}{r}\cos\theta'\right)\\Z'&=\frac{i'ds'}{2r}\left(\cos\gamma'+\frac{z'-z}{r}\cos\theta'\right)\end{aligned} \tag{16}$$

und ist darin

$$\cos\theta' = \frac{x'-x}{r}\cos\alpha' + \frac{y'-y}{r}\cos\beta' + \frac{z'-z}{r}\cos\gamma'.$$

Die Componenten der elektromotorischen Kraft sind

$$-\frac{dX'}{dt},\quad -\frac{dY'}{dt},\quad -\frac{dZ'}{dt}.$$

Die einem geschlossenen Strome s' entsprechenden Componenten der elektromotorischen Kraft erhält man durch Integration der Ausdrücke (16). Es sollen diese Integrale mit X, Y, Z bezeichnet werden. Man kann auch in diesem Falle diese Grössen durch die Integrale von

$$\frac{ds'\cos\alpha'}{r},\quad \frac{ds'\cos\beta'}{r},\quad \frac{ds'\cos\gamma'}{r}$$

allein ausdrücken, also wenn man noch

$$ds'\cos\alpha' = dx',\quad ds'\cos\beta' = dy',\quad ds'\cos\gamma' = dz'$$

einführt,

$$X = i'\int\frac{dx'}{r},\quad Y = i'\int\frac{dy'}{r},\quad Z = i'\int\frac{dz'}{r} \tag{17}$$

setzen, und die gesuchten Componenten der elektromotorischen Kraft sind

$$-\frac{dX}{dt},\quad -\frac{dY}{dt},\quad -\frac{dZ}{dt}.$$

Die Grössen X', Y', Z' besitzen, wie man sich leicht überzeugen kann, die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass sie der Gleichung

$$\frac{dX'}{dx} + \frac{dY'}{dy} + \frac{dZ'}{dz} = 0 \tag{18}$$

genügen und ebenso erfüllen die Integrale (17) die Gleichung

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0. \tag{19}$$

Für jeden nicht zur Bahn s' gehörigen Punkt ist dies unmittelbar klar. Für einen Punkt aber, welcher dem Stromleiter selbst

angehört, kann die Berechnung der elektromotorischen Kräfte nicht mehr nach den vorstehenden Formeln erfolgen, es ist dann unerlässlich, den Leiter als einen nach allen drei Dimensionen ausgedehnten Körper aufzufassen.

XIII.

Geht die Induction von Strömungen aus, welche in anderen als drahtförmigen Leitern stattfinden, so müssen die Ausdrücke X', Y', Z' noch eine Umgestaltung erfahren, damit die Berechnung der elektromotorischen Kräfte ausführbar wird.

In einem durch die Coordinaten x', y', z' gegebenen Punkte hat die Strömung eine gewisse Richtung, in dieser werde ein Stück von der Länge ds' genommen. Senkrecht zu ds' construire man in x', y', z' eine unendlich kleine Fläche dq, so bildet der Cylinder $dq ds'$ ein Stromelement und zugleich ein Volumelement des Leiters. Die durch dq strömende Elektricitätsmenge ist dq proportional und sei auf die Einheit der Zeit bezogen $J' dq$, es heisst dann J' die Stromdichtigkeit im Punkte x', y', z'.

In den obigen Ausdrücken für X', Y', Z' ist nun $J' dq ds'$ an die Stelle von $i' ds'$ einzuführen, wenn man die vom Volumenelemente $dq ds'$ ausgehende elektromotorische Kraft zu berechnen hat. Setzt man in den neuen Formeln die Producte

$$J' \cos\alpha' = u', \quad J' \cos\beta' = v', \quad J' \cos\gamma' = w',$$

welche Grössen die nach den Coordinatenaxen geschätzten Componenten der Stromdichtigkeit heissen, bezeichnet man ferner des Volumenelement $dq ds'$ kurz mit dV', so erhalten diese Formeln folgende Gestalt

$$\begin{aligned}
X' &= \frac{1}{2}\left[\frac{u'}{r} + \frac{x'-x}{r^3}\Big(u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\Big)\right] dV' \\
Y' &= \frac{1}{2}\left[\frac{v'}{r} + \frac{y'-y}{r^3}\Big(u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\Big)\right] dV' \qquad (20) \\
Z' &= \frac{1}{2}\left[\frac{w'}{r} + \frac{z'-z}{r^3}\Big(u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\Big)\right] dV'
\end{aligned}$$

Werden diese Ausdrücke über den ganzen von Strömungen erfüllten Raum integrirt, so erhält man die zur Berechnung der

gesammten in x, y, z auftretenden elektromotorischen Kräfte dienenden Grössen, welche wieder mit X, Y, Z bezeichnet werden mögen. Auch diese Integrale genügen der Gleichung

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0 \tag{21}$$

Dass dieses der Fall, wenn der Punkt x, y, z ausserhalb des Raumes liegt, über welchen die Integrationen bezüglich dV' sich erstrecken, ist ohne weiteres klar. Es genügen aber die Grössen X, Y, Z dieser Gleichung auch noch dann, wenn der Punkt x, y, z im Inneren des bezeichneten Raumes liegt. Denn die Integrale X, Y, Z nicht nur, sondern auch ihre Differentialquotienten sind im Inneren dieses Raumes stetige Functionen der Coordinaten, was leicht auf dieselbe Weise, wie es in der Lehre vom Potential von diesem und seinen Ableitungen geschieht, bewiesen werden kann.

Sind die Strömungen in dem Raume, über welchen die Integration nach dV' sich erstreckt, der Art, dass die Stromlinien ein System in sich zurücklaufender und aus dem bezeichneten Raume nicht heraustretender Curven bilden, so kann man bei Berechnung der X, Y, Z die für jeden einzelnen Stromfaden giltige Gleichheit der Integrale

$$\int\frac{\cos\epsilon ds'}{r} \quad \text{und} \quad \int\frac{\cos\theta\cos\theta' ds'}{r}$$

benützen und diese Grössen etwa durch ihren doppelten ersten Theil ausdrücken, also

$$X=\iiint\frac{u'dV'}{r},\ Y=\iiint\frac{v'dV'}{r}.\ Z=\iiint\frac{w'dV'}{v} \tag{22}$$

setzen.

Die Giltigkeit dieser Reduction kann man noch auf eine andere Art nachweisen.

Hebt man aus der Formel

$$X=\frac{1}{2}\iiint\left[\frac{u'}{r}+\frac{x'-x}{r^3}\Big(u'(x'-x)+v'(y'-y)+w'(z'-z)\Big)\right]dV'$$

das Integral

$$J = \iiint \frac{x'-x}{r^3} \left(u'(x'-x) + v'(y'-y) + w'(z'-z) \right) dV'$$

heraus und setzt darin

$$\frac{x'-x}{r^3} = -\frac{d}{dx'}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{y'-y}{r} = -\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{z'-z}{r^3} = -\frac{dz'}{d}\left(\frac{1}{r}\right)$$

führt für dV' das Volumenelement $dx'dy'dz'$ ein und wendet das Verfahren der theilweisen Integration an, so erhält man

$$J = \iiint \frac{u'dV'}{r} + \iiint \frac{x'-x}{r}\left(\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'}\right) dV'$$

$$- \iint \frac{x'-x}{r} (u'dy'dz' + v'dz'dx' + w'dx'dy')$$

in welcher Formel das letzte Doppelintegral über die Oberfläche des Raumes V' sich erstreckt.

Wenn nun die elektrischen Ströme Bahnen durchfliessen, welche innerhalb des Raumes V' geschlossen sind, so gilt für den ganzen Raum V' die Gleichung

$$\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'} = 0 \tag{23}$$

und für jeden Punkt seiner Oberfläche ist

$$u'dy'dz' + v'dz'dx' + w'dx'dy' = 0.$$

Es gibt nämlich

$$\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'}$$

den negativen Zuwachs, welchen die Menge freier Elektricität in dem Elemente $dx'dy'dz'$ in der Zeiteinheit erfährt, an und

$$u'dy'dz' + v'dz'dx' + w'dx'dy'$$

die in der Zeiteinheit durch ein Element der Oberfläche tretende Elektricitätsmenge. Beide diese Grössen aber sind unter der gemachten Voraussetzung der Null gleich. Es bleibt also

$$J = \iiint \frac{u' dV}{r}$$

übrig, womit die in Rede stehende Reduction bewiesen ist.

E. Ueber die Fortpflanzung elektrischer und magnetischer Erregungen in einem polarisirbaren Medium.

XIV.

Die für die elektromotorischen Kräfte aufgestellten Formeln gestatten nun auch die Berechnung der Inductionserscheinungen, welche durch Intensitätsänderungen elektrischer Ströme in einem dielektrischen Medium hervorgerufen werden können. In jedem Punkte des Mediums wird eine Elektrisirung eintreten, deren Richtung und Intensität durch die in diesem Punkte thätige elektromotorische Kraft und durch die Wirkungen freier elektrischer Massen bestimmt ist, und zwar nach der in I. aufgestellten Bedingung des Gleichgewichtes.

Um die Rechnung allgemein zu gestalten, muss die Gleichung des Gleichgewichtes zwischen den elektrisirenden und den der Elektrisirung entgegen wirkenden Kräften aufgelöst werden in drei Gleichungen, welche die Gleichgewichtsbedingungen für die nach den Coordinatenaxen gerichteten Componenten der Kräfte darstellen.

Es seien α, β, γ die Componenten des elektrischen Momentes in einem Punkte, h die Elektrisirungszahl des Mediums, so sind

$$-\frac{\alpha}{h}, \quad -\frac{\beta}{h}, \quad -\frac{\gamma}{h}$$

die Componenten der elektrischen Molecularkraft.

Sei U das Potential der freien elektrischen Massen, so sind die Componenten der von diesen Massen ausgehenden Kraft

$$-\frac{dU}{dx}, \quad -\frac{dU}{dy}, \quad -\frac{dU}{dz}.$$

Endlich sind die aus den Variationen elektrischer Ströme herrührenden elektromotorischen Kräfte gegeben durch

$$-\frac{dX}{dt}, \quad -\frac{dY}{dt}, \quad -\frac{dZ}{dt},$$

und zwar sind X, Y, Z im allgemeinen die Integralwerthe der durch die Formeln (16) bestimmten Grössen.

Diesen Ausdrücken der elektromotorischen Kräfte liegen die elektromagnetischen Einheiten der Stromintensitäten zu Grunde. Es ist aber für die folgenden Entwicklungen zweckmässiger, die Stromstärken in elektrostatischen Einheiten auszudrücken. Ist a der zur Umwandlung einer nach elektromagnetischem Masse bestimmten in eine elektrostatisch gemessene Intensität nöthige Factor, so ist a^2 der Reductionsfactor für das elektrodynamische Potential. Werden also in X, Y, Z die Stromintensitäten in elektrostatischem Masse ausgedrückt, so sind diese Grössen durch a^2 zu dividiren.

Ferner soll noch vorausgesetzt werden, dass das Medium zugleich magnetisch ist. Dann sind die elektromotorischen Kräfte im Verhältniss von $1+4\pi k$ zu 1 grösser, als im nichtmagnetischen Medium. Für dieselben bestehen nunmehr die Werthe

$$-\frac{1+4\pi k}{a^2}\frac{dX}{dt}, \quad -\frac{1+4\pi k}{a^2}\frac{dY}{dt}, \quad -\frac{1+4\pi k}{a^2}\frac{dZ}{dt}$$

Die Gleichungen für das elektrische Gleichgewicht sind demnach folgende

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{h}+\frac{dU}{dx}+\frac{1+4\pi k}{a^2}\frac{dX}{dt}&=0\\ \frac{\beta}{h}+\frac{dU}{dy}+\frac{1+4\pi k}{a^2}\frac{dY}{dt}&=0\\ \frac{\gamma}{h}+\frac{dU}{dz}+\frac{1+4\pi k}{a^2}\frac{dZ}{dt}&=0 \end{aligned} \tag{24}$$

Differenzirt man die erste dieser Gleichungen nach x, die zweite nach y, die dritte nach z und addirt sie sodann, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (21)

$$\frac{1}{h}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)+\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=0.$$

Es ist aber das Trinom

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=-e$$

wenn e die in Folge der Elektrisirung des Mediums auftretende freie Elektricität in der Volumseinheit bedeutet.

Ferner ist

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=-4\pi e'$$

unter e' die in der Volumseinheit befindliche elektrische Masse verstanden. Ist in dem durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Orte des Mediums keine andere Elektricität als die durch die Elektrisirung des Mediums hervorgerufene, so ist

$$e'=e$$

und obige Gleichung gibt

$$\left(\frac{1}{h}+4\pi\right)e=0$$

somit, da h eine wesentlich positive Zahl ist

$$e=o$$

d. h. die Elektrisirung des Mediums ist so beschaffen, dass durch dieselbe keine freie Elektricität ausgeschieden wird.

Es ist also für den Punkt x, y, z sowohl

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0 \tag{25}$$

als auch

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=0 \tag{26}$$

Was nun die Ströme anbetrifft, deren Componenten in den Ausdrücken X, Y, Z auftreten, so sind dieselben im Allgemeinen zweifacher Art.

Erstens können Ströme gewöhnlicher Art, welche in Leitern circuliren, in das Medium gesetzt sein und inducirend wirken.

Zweitens besteht jede Änderung in der Elektrisirung des Mediums in einer Bewegung von Elektricität, stellt also ebenfalls einen Strom dar, und zwar sind die Componenten seiner Dichtigkeit

$$\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}.$$

Wächst nämlich in der Volumseinheit das Moment α in der Zeit dt um $d\alpha$, so muss durch die Einheit des Querschnittes in dieser Zeit dt die positive Elektricitätsmenge $d\alpha$ in der einen, und eine gleich grosse negative in der entgegengesetzten Richtung um die halbe Längeneinheit vorrücken. Es entspricht dies einer Strömung von der Dichtigkeit ξ, so dass $\xi dt = d\alpha$.

Was nun diese durch die wechselnde Elektrisirung bedingten Ströme anbetrifft, so sind sie wegen der Gleichung (25), welcher α, β, γ und somit auch ihre nach t genommenen Differentialquotienten genügen, innerhalb des Mediums geschlossene Ströme. Sind auch die anderen noch vorhandenen Ströme geschlossene, so kann man für X, Y, Z die einfacheren Ausdrücke

$$\begin{aligned} X &= \iiint\left(\frac{d\alpha'}{dt}+u'\right)\frac{dx'dy'dz'}{r} \\ Y &= \iiint\left(\frac{d\beta'}{dt}+v'\right)\frac{dx'dy'dz'}{r} \\ Z &= \iiint\left(\frac{d\lambda'}{dt}+w'\right)\frac{dx'dy'dz'}{r} \end{aligned} \tag{27}$$

setzen.

Wendet man an die erste der Gleichungen (24) die durch das Symbol

$$\Delta = \frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}$$

angedeuteten Operationen an, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (26)

$$\frac{\Delta\alpha}{h}+\frac{1+4\pi k}{a^2}\Delta\frac{dX}{dt}=0$$

Es hat aber X und ebenso $\frac{dX}{dt}$ die Form einer Potentialfunction und nach der bekannten Eigenschaft dieser Functionen ist

$$\Delta X = -4\pi \left(\frac{d\alpha}{dt} + u\right)$$

und

$$\Delta \frac{dX}{dt} = -4\pi \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{du}{dt}\right)$$

Ist in dem durch die Coordinaten x, y, z bestimmten Punkte keine andere Strömung vorhanden, als die durch die Variation der Momente α, β, γ bedingte, so bleibt

$$\Delta \frac{dX}{dt} = -4\pi \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

und demnach resultirt für α die erste und in derselben Weise ergeben sich für β und γ die zweite und dritte der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \frac{a^2}{4\pi h(1+4\pi k)}\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} + \frac{d^2\alpha}{dz^2}\right) \\
\frac{d^2\beta}{dt^2} &= \frac{a^2}{4\pi h(1+4\pi k)}\left(\frac{d^2\beta}{dx^2} + \frac{d^2\beta}{dy^2} + \frac{d^2\beta}{dz^2}\right) \qquad (29) \\
\frac{d^2\gamma}{dt^2} &= \frac{a^2}{4\pi h(1+4\pi k)}\left(\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \frac{d^2\gamma}{dz^2}\right)
\end{aligned}$$

XV.

Für die magnetischen Verschiebungen, welche die elektrischen im Medium begleiten, erhält man Gleichungen von derselben Form.

Die von elektrischen Strömen ausgehenden magnetisirenden Kräfte sind durch dieselben Ausdrücke X, Y, Z bestimmt wie die elektromotorischen, und zwar sind die den Coordinatenaxen parallelen Componenten gegeben durch

$$\frac{dY}{dz} - \frac{dZ}{dy}, \quad \frac{dZ}{dx} - \frac{dX}{dz}, \quad \frac{dX}{dy} - \frac{dY}{dx}.$$

Diese Ausdrücke bedeuten Kräfte, welche auf die magnetische Masseneinheit von den Strömen ausgeübt werden, sind also von der Einheit der Stromintensität nur in einfachem Verhältnisse abhängig. Werden daher in X, Y, Z die Stromdichten in elektrostatischem Masse ausgedrückt gedacht, so sind die magnetisirenden Kräfte durch

$$\frac{1}{a}\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right),\quad \frac{1}{a}\left(\frac{dZ}{dx}-\frac{dX}{dz}\right),\quad \frac{1}{a}\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)$$

bestimmt.

Es ist schon oben hervorgehoben worden, dass die Magnetisirung eines Mediums durch elektrische Ströme kein Freiwerden von magnetischen Massen zur Folge hat, also sind auch keine durch ein magnetisches Potential bestimmte Kräfte vorhanden.

Bezeichnet man die nach den Coordinaten geschätzten Componenten des inducirten magnetischen Momentes mit λ, μ, ν, also die der Magnetisirung entgegenwirkenden molecularen Kräfte mit

$$-\frac{\lambda}{k},\quad -\frac{\mu}{k},\quad -\frac{\nu}{k},$$

so hat man nachstehende Gleichungen als Bedingungen des magnetischen Gleichgewichtes:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{k}+\frac{1}{a}\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)&=0\\ \frac{\mu}{k}+\frac{1}{a}\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)&=0\\ \frac{\nu}{k}+\frac{1}{a}\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)&=0\end{aligned}\tag{30}$$

Aus diesen folgt zunächst

$$\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\mu}{dy}+\frac{d\nu}{dz}=0\tag{31}$$

welche Gleichung nichts Anderes ausdrückt, als dass keine freien Massen im Medium ausgeschieden sind.

Aus den zwei letzten der Gleichungen (30) kann man nun folgende ableiten

$$\frac{1}{k}\left(\frac{d\mu}{dz}-\frac{d\nu}{dy}\right)+\frac{1}{a}\left(\frac{d^2X}{dz^2}-\frac{d^2Z}{dxdz}-\frac{d^2Y}{dxdy}+\frac{d^2X}{dy^2}\right)=0$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (21)

$$-\frac{d^2Y}{dxdy}-\frac{d^2dZ}{dxdz}=\frac{d^2X}{dx^2}$$

einführen. Es ist dann

$$\frac{1}{k}\left(\frac{d\mu}{dz}-\frac{d\nu}{dy}\right)+\frac{1}{a}\Delta X=0.$$

Sind keine anderen Ströme als die durch die Elektrisirung des Mediums bedingten vorhanden, so folgt aus der Gleichung (28)

$$\Delta X=-4\pi\frac{d\alpha}{dt},$$

es resultirt somit die erste und in ähnlicher Weise ergeben sich die zweite und dritte der folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dz}-\frac{d\nu}{dy}&=\frac{4\pi k}{a}\cdot\frac{d\alpha}{dt}\\
\frac{d\nu}{dx}-\frac{d\lambda}{dz}&=\frac{4\pi k}{a}\cdot\frac{d\beta}{dt}\\
\frac{d\lambda}{dy}-\frac{d\mu}{dx}&=\frac{4\pi k}{a}\cdot\frac{d\gamma}{dt}
\end{aligned}\qquad(32)$$

Aus der ersten der Gleichungen (30) folgt ferner

$$\frac{1}{k}\frac{d\lambda}{dt}+\frac{1}{a}\left(\frac{d}{dy}\frac{dZ}{dt}-\frac{d}{dz}\frac{dY}{dt}\right)=0.$$

Führt man für $\frac{dY}{dt}$ und $\frac{dZ}{dt}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (24) ein, so erhält man die erste und in ähnlicher Weise auch die beiden anderen der folgenden Gleichungen

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{ak}{h(1+4\pi k)}\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)$$

$$\frac{d\mu}{dt}=\frac{ak}{h(1+4\pi k)}\left(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx}\right) \qquad (33)$$

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{ak}{h(1+4\pi k)}\left(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\right)$$

Differenzirt man diese Gleichungen nochmals nach t, führt für $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$ ihre Werthe aus den Gleichungen (32) ein, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichung (31) schliesslich folgende Gleichungen

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2}=\frac{a^2}{4\pi h(1+4\pi k)}\left(\frac{d^2\lambda}{dx^2}+\frac{d^2\lambda}{dy^2}+\frac{d^2\lambda}{dz^2}\right)$$

$$\frac{d^2\mu}{dt^2}=\frac{a^2}{4\pi h(1+4\pi k)}\left(\frac{d^2\mu}{dx^2}+\frac{d^2\mu}{dy^2}+\frac{d^2\mu}{dz^2}\right) \qquad (34)$$

$$\frac{d^2\nu}{dt^2}=\frac{a^2}{4\pi h(1+4\pi k)}\left(\frac{d^2\nu}{dx^2}+\frac{d^2\nu}{dy^2}+\frac{d^2\nu}{dz^2}\right)$$

XVI.

Die Gleichungen, welche für die elektrischen Momente α, β, γ und ebenso die, welche für die magnetischen Momente λ, μ, ν abgeleitet wurden, haben dieselbe Form, wie jene für die unendlich kleinen Verschiebungen in einem elastischen Medium. Wie diese Verschiebungen, können sich auch jene Momente, oder wenn man will, die elektrischen und magnetischen Verschiebungen im Medium in Wellen verbreiten.

Die Gleichungen

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0$$

$$\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\mu}{dy}+\frac{dz}{d\nu}=0$$

besagen ferner, dass sowohl die elektrischen als auch die magnetischen Momente senkrecht stehen auf der Richtung ihrer

Fortpflanzung, es sind also die elektrischen und magnetischen Wellen Transversalwellen, wie jene des Lichtes.

Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die elektrischen und magnetischen Wellen in einem Medium fortpflanzen, ist für die einen wie für die anderen gegeben durch

$$v = \frac{a}{\sqrt{4\pi h(1+4\pi k)}} \tag{35}$$

Die Beziehung zwischen der elektromagnetischen und elektrostatischen Einheit der Stromintensität ist experimentell bestimmt worden. Der für a sich ergebende Werth ist jedoch abhängig von der dielektrischen und magnetischen Beschaffenheit des Mediums, in welchem die Bestimmung gemacht wird. Um zu finden, in welcher Art diese Abhängigkeit ist, hat man zunächst die Gleichung

$$J_e = a \,.\, J_m$$

zu betrachten, in welcher J_e und J_m die Intensität eines und desselben Stromes in elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten bedeuten, und zwar soll diese Gleichung gelten unter der Voraussetzung, dass die Masseinheiten für elektrische und magnetische Massen in einem Raume, welcher nicht dielektrisch und nicht magnetisch ist, bestimmt worden sind.

Wird ein Strom in einem dielektrischen Medium nach beiderlei Mass gemessen, so bleibt die für seine Intensität J_m sich ergebende Zahl unverändert, hingegen ändert sich die Zahl J_e im J_e^0, demgemäss ändert sich dann auch a in a_0, so dass

$$J_e^0 = a_0 J_m$$

wird. Die Änderung von J_e rührt daher, dass in Folge der kleineren Wechselwirkung elektrischer Massen in einem dielektrischen Medium diese durch Messung kleiner gefunden werden, als sie wirklich sind. Bedeutet h_0 die Elektrisirungszahl des Mediums, so ist die Wechselwirkung zwischen zwei elektrischen Massen verkleinert im Verhältniss von $1+4\pi h_0$ zu 1. Demnach ergibt sich die Grösse jeder Masse verkleinert im Verhältniss von $\sqrt{1+4\pi h_0}$ zu 1 und in demselben Verhältniss erscheint auch die Zahl für die Stromstärke verringert; es ist also

$$J_e^0 = \frac{J_e}{\sqrt{1+4\pi h_0}}$$

und daraus folgt

$$a = a_0\sqrt{1+4\pi h_0}.$$

Wird ein Strom in einem magnetischen Medium elektrostatisch und elektromagnetisch gemessen, so bleibt die Zahl J_e unverändert, hingegen ändert sich J_m in J'_m und demzufolge a in a', so dass

$$J_e = a' . J'_m.$$

Es ist zwar die Wechselwirkung zwischen einem elektrischen Strome und einer magnetischen Masse unabhängig vom Medium gefunden worden, doch ist zu erwägen, dass die Bestimmung der Masse im magnetischen Medium einen im Verhältniss von $\sqrt{1+4\pi k_0}$ zu 1 zu kleinen Werth für dieselbe ergibt, demnach die Intensität des Stromes in dem Verhältniss 1 zu $\sqrt{1+4\pi k_0}$ zu gross angesetzt wird, wenn k_0 die Magnetisirungszahl des Mediums bedeutet. Es ist demnach

$$J'_m = \sqrt{1+4\pi k_0} . J_m$$

und daraus ergibt sich

$$a = a'\sqrt{1+4\pi k_0}.$$

Ist das Medium zugleich dielektrisch und magnetisch und bezeichnet man wieder mit a_0 den für a in diesem Medium gefundenen Werth, so ist

$$a = a_0\sqrt{1+4\pi h_0} \;.\; \sqrt{1+4\pi k_0}.$$

Führt man diesen Werth in die Formel (35) ein, so erhält man

$$v = \frac{a_0\sqrt{1+4\pi h_0} \;.\; \sqrt{1+4\pi k_0}}{\sqrt{4\pi h} \;.\; \sqrt{1+4\pi k}} \tag{36}$$

Für das Medium, in welchem die Constante a_0 bestimmt wurde, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$v_0 = a_0 \sqrt{\frac{1+4\pi h_0}{4\pi h_0}}. \tag{37}$$

Die Bestimmung von a_0 ist in der atmosphärischen Luft gemacht worden und hat sich für a_0 ein Werth ergeben, welcher gleich ist der Geschwindigkeit des Lichtes. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen und magnetischen Wellen wird daher mit jener des Lichtes übereinstimmen, sobald $4\pi h_0$ eine sehr grosse Zahl im Vergleich zur Einheit ist.

Aus den Gleichungen (36) und (37) folgt nämlich

$$\frac{v_0}{v} = \frac{\sqrt{4\pi h}}{\sqrt{4\pi h_0}} \cdot \frac{\sqrt{1+4\pi k}}{\sqrt{1+4\pi k_0}}$$

und wenn man für die verschiedenen Gase und die unmagnetischen Körper k und k_0 für sehr nahe übereinstimmend annimmt,

$$\frac{v_0}{v} = \frac{\sqrt{4\pi h}}{\sqrt{4\pi h_0}}.$$

Sind v_0 und v den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in der Luft und in einem zweiten Medium gleich, so stellt $\frac{v_0}{v}$ den Brechungsquotienten für dieses zweite Medium dar. Sind $4\pi h_0$ und $4\pi h$ gegen die Einheit grosse Zahlen, so kann man auch

$$\frac{v_0}{v} = \frac{\sqrt{1+4\pi h}}{\sqrt{1+4\pi h_0}}$$

setzen und diese Relation hat auch durch die von Boltzmann ausgeführten Bestimmungen der Dielektricitätsconstanten mehrerer Gase und fester Körper ihre Bestätigung erhalten.

Über eine neue Art von Variationstönen.

Von V. Dvořák,
Privatdocenten für Physik in Prag.

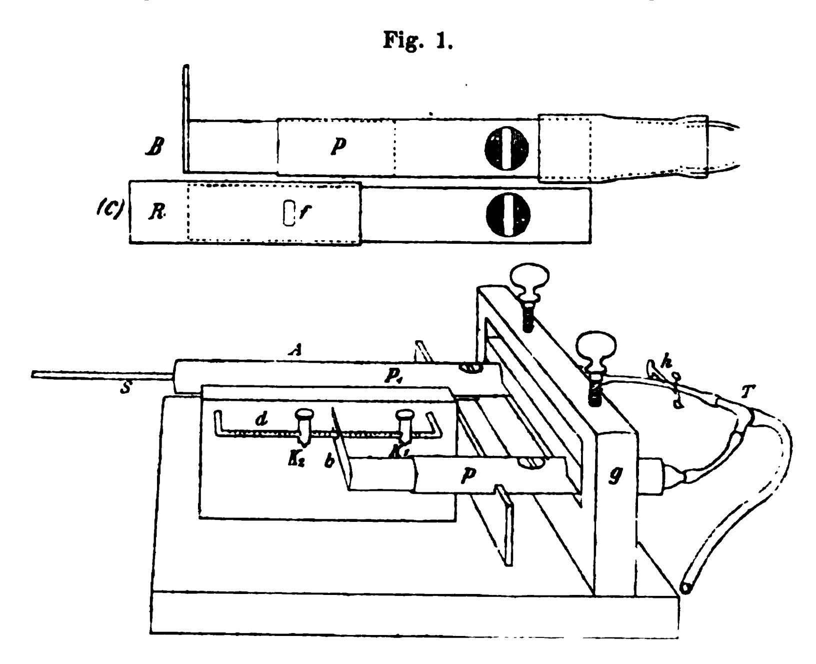
(Mit 2 Holzschnitten.)

Wenn man die Höhe eines einzelnen Tones stetig ändert, so hört man neben dem ursprünglichen Ton noch einen neuen Ton erklingen. Dieser Ton befolgt ein ganz eigenthümliches Gesetz, welches mit den Ansichten, die man bisher über das Ohr aufgestellt hat, in einem starken Widerspruche zu sein scheint.

Ich hörte diesen Ton zuerst bei dem Gesange einer im Zimmer befindlichen Drossel, die eine sehr kräftige Stimme hatte. Die Drosseln nämlich gehen von einem Tone zum anderen zumeist nicht sprungweise, sondern schleifend über. Ich beachtete diesen Ton nicht weiter, bis ich mit einer kleinen Pfeife aus zwei übereinander verschiebbaren Messingröhren denselben Ton beim Verlängern und Verkürzen der Pfeife abermals hörte. Es zeigte sich, dass die Höhe dieses Tones unter Anderem von dem Masse der Verlängerung und Verkürzung der Pfeife abhängig war. Um dieses genauer zu untersuchen, nahm ich eine gedeckte Pfeife *P*, welche in Fig. 1 (*B*) in halber natürlicher Grösse dargestellt ist. Diese Pfeife wurde in ein Gestell *G* [Fig. 1 (*A*)] eingeklemmt und durch einen Kautschukschlauch auf ihren ersten Oberton mit dem Munde angeblasen. An dem Ende der Pfeife befand sich ein Bügel *b*, der mit einem Ausschnitt auf den Draht *d* aufgesteckt wurde. Dieser Draht war in Millimeter getheilt und es waren auf demselben zwei verschiebbare Klemmschrauben K_1 und K_2. Die Bewegung des Bügels und somit auch die Verlängerung und Verkürzung der Pfeife wurde so durch die beiden Klemmschrauben begrenzt. Die Klemmschraube K_1 wurde ein für alle Mal festgestellt und die zweite Klemmschraube K_2 wurde zuerst so gestellt, dass mit Abrechnung der Dicke des Bügels

die Distanz beider Klemmschrauben, und somit auch die Verlängerung und Verkürzung der Pfeife 4 Mm. betrug. Indem der

Fig. 1.



Bügel zwischen den beiden Klemmschrauben nach dem Tacte eines Metronoms (etwa drei Schläge in einer Secunde) hin und hergeschoben wurde, hörte man neben den Tönen der Pfeife noch einen ziemlich tiefen Ton. Der Ton war derselbe, ob man nun den Bügel von K_1 bis K_2 oder umgekehrt bewegte; er wurde mit dem Monochord bestimmt.

Hierauf stellte ich die Klemme K_2 auf 8 Mm. und bestimmte abermals den Ton; derselbe war beträchtlich höher, wie zuvor; so schritt ich von 4 zu 4 Mm. fort, bis die Verlängerung oder Verkürzung der Pfeife 32 Mm. betrug. Die Fig. 2 stellt das ganze Resultat graphisch dar. Die Abscissen bedeuten die Verlängerungen der Pfeife, die Ordinaten die am Monochord gemessenen Saitenlängen der entsprechenden Schleiftöne, wie ich sie der Kürze halber nennen will. Die oben angeschriebenen Ziffern bedeuten die Länge der Ordinaten, die in der Mitte stehenden die Schwingungszahlen der zugehörigen Töne, die unteren die Länge der Abscissen.

Nach längeren Rechnungen und Versuchen stellte sich aber heraus, dass der Schleifton dieselbe Tonhöhe hat, wie

Fig. 2.

ein Combinationston[1], der aus dem höchsten und tiefsten der bei der Verschiebung des Bügels von einer Klemme zur anderen entstehenden Pfeifentöne hervorgehen würde.

Davon überzeugt man sich sehr einfach, wenn man neben der Pfeife P [Fig. 1 (A)] noch eine zweite Pfeife P_1 anbringt. Diese Pfeife ist mit einem verschiebbaren Stempel S versehen, auf das andere Ende ist ein Kautschukschlauch aufgesteckt, der mittelst eines Hahnes h gesperrt werden kann, und der durch ein gabelförmiges Rohr T mit dem von der ersten Pfeife P ausgehenden Schlauche verbunden ist.

Der Bügel b der Pfeife P wird zuerst bis zur Klemme K_1 angeschoben, und dann wird die Pfeife P_1, nachdem man den Hahn h geöffnet hat, auf die Pfeife P gestimmt, was mittelst der Schwebungen sehr leicht gelingt. Beide Pfeifen müssen ihren ersten Oberton geben und ihr Ton darf, da sie stets mit dem Munde angeblasen werden, bei stärkerem oder schwächerem Anblasen nur wenig in der Tonhöhe schwanken; letzteres ist dann der Fall, wenn der Kernspalt der Pfeifen nicht zu gross ist. Dann stellt man den Bügel b bis zur Klemme K_2. Beim gleich-

[1] Es ist stets der Differenzton gemeint.

zeitigen Anblasen beider Pfeifen hört man dann natürlich einen Combinationston[1]. Sperrt man nun den Wind von der Pfeife P_1 ab, und schiebt den Bügel hin und her, so erkennt man leicht, dass der Schleifton dieselbe Tonhöhe hat, wie der früher gehörte Combinationston.

Um die Höhe der Pfeifentöne zu bestimmen, bediente ich mich der Combinationstöne, wie dies schon König gethan hat. Das Monochord ist nicht zu verwenden, weil die Töne zu hoch sind, die Saitenlängen also zu klein ausfallen. Der Ton der Pfeife P_1 wurde niemals geändert, und er war stets dem Tone der Pfeife P, wenn der Bügel b bei K_1 stand, gleich. Die Pfeife P wurde dann soweit verlängert, bis das Intervall eine grosse Terz war; dieses ist leicht zu erkennen, weil dann der Combinationston zu den beiden Tönen harmonisch ist. Der Combinationston wurde hierauf am Monochorde bestimmt; seine Schwingungszahl war im Mittel = 616. Die Grösse der Verlängerung betrug 18·2 Mm. Die Schwingungszahl n_1 des höheren Tones findet man daraus

$$5 \times 616 = 3080,$$

die des tieferen n_2

$$= 4 \times 616 = 2464.$$

---

[1] Die Combinationstöne sind bei diesem Apparate auffallend stark; sie drängen sich sogar dem Gehöre mehr auf, als die erzeugenden Töne. Man verspürt zugleich im Ohre ein eigenthümliches Gefühl der Spannung und Anstrengung, besonders bei den tieferen Tönen; man ist auch geneigt, die tieferen Töne nicht nach aussen zu versetzen, sondern in das Ohr selbst. Dasselbe gilt von den Schleiftönen. Die Combinationstöne (sowie die Schleiftöne) sind nur im Ohr, denn sie werden durch einen Resonator nicht verstärkt. Geben die beiden Pfeifen Schwebungen, so sind dieselben scharf und klopfend; man hört, wenn die Zahl der Schwebungen wächst, so dass sie nicht mehr einzeln unterschieden werden, neben denselben und mit ihnen zugleich den tiefen Combinationston ganz deutlich.

So oft ich die Versuche über Schleiftöne und Combinationstöne längere Zeit ohne Unterbrechung fortsetzte, hörte ich hernach ein lang andauerndes Zischen und Singen in den Ohren, wie ich es selbst nach längerer Bedienung eines feuernden Geschützes nicht gehört habe.

Der hier beschriebene Apparat dürfte sich wegen der grossen Intensität der Combinationstöne gut zu Schulversuchen eignen.

Ich machte noch eine Bestimmung, wo das Intervall eine Quinte betrug. Die Schwingungszahl des Combinationstones war $= 1028$, somit die Schwingungszahl n_1 des höheren Tones

$$= 3 \times 1028 = 3080;$$

die früher gefundene Zahl für n_1 war $= 3084$, also ist im Mittel

$$n_1 = 3082.$$

Die Schwingungszahl des tieferen Tones n_3 findet man

$$= 2 \times 1028 = 2056.$$

Die Grösse der Verlängerung der Pfeife betrug 39·5 Mm.

Ich wollte anfänglich mit Hilfe von n_1 und n_2 die Schwingungszahlen der einzelnen Töne, die der Verlängerung der Pfeife um 4, 8, 12 etc. Mm. entsprechen (siehe Fig. 2), berechnen, um zu sehen, ob die in Fig. 2 bestimmten Schleiftöne wirklich mit den Combinationstönen übereinstimmen, denn damals hatte ich noch nicht zu diesem Zwecke die Pfeife P_1 mit der Pfeife P combinirt. Ich nahm nun an, dass der Zuwachs der Wellenlänge eines Tones der Verlängerung der Pfeife proportional ist. Dieses ist aber nicht der Fall, weil der Durchmesser der Pfeife gegen deren Länge zu gross ist; die Wellenlänge nimmt daher rascher zu, als die Länge der Pfeife, wie dieses schon aus der Vergleichung von n_1, n_2 und n_3 und der beiden Verlängerungen von 18·2 Mm. und 39·5 Mm. folgt. Es ist also eine Berechnung der Combinationstöne aus den Zahlen der Fig. 2 nicht ausführbar.

Der Schleifton hat noch eine andere Eigenthümlichkeit, die man erst bei aufmerksamer Untersuchung bemerkt. Fährt man nämlich ganz gleichmässig mit dem Bügel *b* von einer Klemme zur anderen, so hört man zu Anfang der Bewegung den Schleifton ganz schwach und sehr tief, er wird aber sehr rasch höher und zugleich stärker. Fährt man ziemlich rasch, so glaubt man immer bloss den Schluss des Schleiftones zu hören, weil dieser am stärksten ist, und nur so erklärt es sich, dass die Bestimmung der Tonhöhe der Schleiftöne, wie sie der Fig. 2 zu Grunde liegt, möglich wurde. Dasselbe Experiment kann man mit dem Combinationstone machen, wenn man mit der Pfeife P auch die

Pfeife P_1 ertönen lässt, und zugleich den Bügel b rasch von K_1 nach K_2 schiebt; der stark auftretende Combinationston macht, dass man den Schleifton nicht hört. Trotzdem nun eine ganze Reihe von Combinationstönen auftritt, so hört sich das Ganze so an, wie wenn bloss der höchste (letzte) Combinationston erklingen würde. Nur ist es bei den Schleiftönen, wie ich schon anfangs gesagt habe, gleichgiltig, ob man mit dem Bügel b von K_1 nach K_2 oder umgekehrt fährt, während man bei den Combinationstönen immer von K_1 nach K_2 fahren muss, um den eben zuvor geschilderten Effect zu erreichen.

Das Sonderbarste an dem Schleiftone ist aber, dass seine Tonhöhe innerhalb gewisser Grenzen gar nicht von der Geschwindigkeit abhängt, mit der man den Bügel zwischen den beiden Klemmen auf und abführt, sondern bloss von der Entfernung der beiden Klemmen. Nur wird der Ton, wenn man den Bügel langsamer bewegt, schwächer, und erst wenn man den Bügel sehr langsam führt, wird der Ton tiefer, zugleich aber so schwach, dass ich keine Bestimmung über dessen Höhe bei sehr langsamer Bewegung des Bügels ausführen konnte. Wohl lässt sich aber beiläufig die Grenze bestimmen, wo der Ton anfängt tiefer zu werden. Ich stellte zu diesem Zwecke die Klemme K_2 auf 12 Mm., und schob den Bügel b nach dem Takte eines Metronoms möglichst gleichmässig zwischen den beiden Klemmen hin und her; es zeigte sich, dass die Tonhöhe des Schleiftones noch immer dieselbe blieb, wenn die Zeit, während welcher sich der Bügel von einer Klemme zur anderen bewegte, etwas über drei Viertel Secunden betrug. Der Ton wurde erst tiefer, wenn die Bewegung noch langsamer geschah. Diese Erscheinung zwingt, wie man nicht wird bestreiten können, zu der Annahme, dass der erste Ton der durch die Bewegung des Bügels von K_1 bis K_2 zum Vorschein kommenden Reihe von Pfeifentönen eine $^3/_4$ Secunden dauernde Nachwirkung haben muss. Denn die Tonhöhe des Schleiftones ist ja durch den ersten und letzten Ton in der Reihe der Pfeifentöne gegeben und sie ändert sich sofort, wenn ich entweder vom Anfange oder vom Ende der Reihe einige Glieder weglasse. Eine so lange Nachwirkung ist aber mit den Ansichten vom Ohre im vollständigen Widerspruche,

denn man weiss, dass der Gehörmechanismus sehr rasch ausschwingt, und dass auch der Hörnerv keine Nachbilder hat. Eine längere Nachwirkuug der Töne zeigt auch folgender Versuch. Man nehme eine offene Pfeife, wie sie in Fig. 1 (*C*) in $^1/_2$ natürl. Grösse gezeichnet ist. Die beiden übereinander verschiebbaren Messingröhren, aus denen die Pfeife besteht, haben beide eine Öffnung *f*; in der Stellung wie sie in der Figur gezeichnet ist, fallen beide Öffnungen übereinander. Die Pfeife gibt in dieser Stellung gar keinen Ton, wenn man sie (mit dem Munde)[1] so stark anbläst, dass sie bei gedeckter Öffnung *f* den ersten Oberton gibt. Schiebt man nur die aufgesteckte Röhre *R* langsam hin und her, so fallen die beiden Öffnungen immer in einem Momente übereinander, und der Ton der Pfeife ist in diesem Momente unterbrochen. Gleichwohl ändert diese Unterbrechung gar nichts an der Höhe des Schleiftones, wie man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Röhre *R* so weit um ihre Axe dreht, dass die beiden Öffnungen *f* nicht mehr übereinander fallen können.

Man kann diesen Versuch noch einfacher ausführen, nur ist er nicht so überzeugend. Ich nahm eine offene Pfeife, die sehr gut ansprach, und deckte sie mit der flachen Hand. Die Pfeife wurde mit dem Munde auf den Grundton angeblasen und gab einen Ton von 320 Schwingungen. Indem man die Handfläche etwas schief stellte, wurde die Pfeife theilweise geöffnet. Ich stellte die Handfläche immer so weit schief, dass die Sexte des Grundtones der Pfeife erklang. Indem man nun die Pfeife mit der Hand in einem gewissen Tempo zudeckte und durch Schiefstellung der Hand theilweise öffnete, hörte man den Schleifton; er hatte wieder die Tonhöhe eines Combinationstones aus Grundton und Sexte. Man überzeugt sich leicht, dass bei diesem Verfahren nur ein kleiner Theil der Tonreihe zwischen Grundton und Sexte erzeugt wird, denn, wenn man die Schiefstellung der Hand zur Pfeife fort vermindert, so kommt man bald auf einen Punkt, wo die Pfeife nicht mehr anspricht. Erst, wenn die

---

[1] Die Blasbälge haben in der Regel einen viel zu kleinen Druck, um den Oberton bei einer solchen Pfeife, den man durch Anblasen mit dem Munde ohne die geringste Anstrengung erhält, zu erzeugen.

Pfeife vollständig durch die Hand gedeckt ist, kommt wieder der Ton der Pfeife zum Vorschein.

Ich glaubte Anfangs, dass der Schleifton sich vorzüglich bei solchen Tönen zeigt, auf die das Gehörorgan gestimmt ist. Man bekommt jedoch auch Schleiftöne bei tieferen Tönen, wenn auch nicht so auffallend starke, wie bei hohen Tönen. Doch sind die Schleiftöne auch bei tieferen Tönen noch deutlich, wie schon der eben angegebene Versuch, wo die Schwingungszahl des Tones 320 betrug, zeigt. Viel tiefere Töne als diesen konnte ich übrigens nicht mehr nehmen, wenn ich den Schleifton hören wollte. Der tiefste Ton, von dem ausgehend ich durch rasche Verschiebung eines Stempels in einer Pfeife noch einen Schleifton bekam, hatte etwa 340 Schwingungen. Auch zeigt sich bei tieferen Tönen noch ein eigenthümlicher Umstand; der Schleifton tritt nämlich nur dann auf, wenn sich der Ton der Pfeife vertieft, nicht aber, wenn er sich erhöht, oder er ist im letzteren Falle viel schwächer. Man bemerkt übrigens auch bei Pfeifen, die auf hohe Töne ansprechen, dass der Schleifton, der beim Verlängern der Pfeife entsteht, etwas stärker ist als der, welcher durch Verkürzung der Pfeife entsteht. Dies hängt jedoch möglicherweise damit zusammen, dass die höheren Töne bei Pfeifen immer stärker sind als die tieferen; die höheren müssten demnach eine stärkere Nachwirkung ausüben, als die tieferen.

Während die Schleiftöne der tieferen Töne immer schwach sind, kann man sehr hohe Töne, die der Hörgrenze nahe liegen, nehmen, und bekommt noch immer sehr starke Schleiftöne. Dazu kann man die Pfeife P_1 (Fig. 1) benützen, indem man den Stempel sehr weit hineinschiebt, und ihn dann hin und her bewegt.

Herr Prof. M a c h, der das Ganze einer vorläufigen theoretischen Untersuchung unterzogen hatte, machte mich darauf aufmerksam, dass wohl auch ein Schleifton entstehen müsste, wenn zwei v e r s c h i e d e n hohe Töne s p r u n g w e i s e aufeinander folgen. Dieses bestätigt sich auch in der That. Man nehme zu diesem Zwecke die in Fig. 1 (C) dargestellte Pfeife, das Loch f wird abgesperrt, und das Ende der Pfeife mit dem Finger zugedeckt. Entfernt man hierauf den Finger sehr rasch, so hört man den Schleifton stark und deutlich, u n d e r ü b e r d a u e r t d e n M o m e n t d e s Ö f f n e n s d e r P f e i f e u m e i n e n be-

trächtlichen Zeitraum. Dasselbe bemerkt man, wenn man die Pfeife sehr rasch schliesst. Auch ist es mir gelungen, auf der *E*-Saite der Violine bei einem ganz gewöhnlichen Tonsprung (auf einen Bogenstrich, jedoch ohne das geringste Portamento) den Schleifton zu hören, während mir dasselbe bei einem stetigen schleifenden Übergang von einem Tone zum andern nicht gelang. Ohne Zweifel würde man bei einer guten Violine mit starkem Ton auch in letzterem Falle den Schleifton ganz gut hören. Die hauptsächlichste Bedingung für das Entstehen der Schleiftöne ist nämlich, dass die erzeugenden Töne möglichst stark sind.

Die Versuche wurden im physikalischen Institute der Prager Universität ausgeführt.

Analyse des Poschitzer Sauerbrunnens.

Von J. Kachler.

In dem an Mineralquellen so reichen nordwestlichen Theile Böhmens, in der Nähe der berühmten Quellen von Marienbad, findet sich zwischen den Ortschaften Poschitz und Landek ein Sauerbrunnen, dessen Existenz und Brauchbarkeit als Getränk schon in frühen Zeiten bekannt war[1], und der bis heutzutage von den Einwohnern der benachbarten Gemeinden häufig benützt wird.

Die Quelle entspringt am Fusse des aus Trachyt und Amphibolschiefer bestehenden Prochomuter Berges (2200 Fuss hoch) in einer zur Gemeinde Landek gehörigen Wiese, die grösstentheils aus Moorboden, unter dem ein feiner etwas lehmiger Sand liegt, besteht. Vor einiger Zeit wurde sie mit einer neuen hölzernen Fassung versehen, und dabei gefunden, dass eigentlich mehrere Quellen in geringen Entfernungen voneinander hervorbrechen, von denen die zwei bedeutenderen für sich aufgefangen wurden. Ich will sie in der Folge mit *A* und *B* bezeichnen.

Beide Quellen geben vollkommen klares Wasser von einer etwa 6—7° C. betragenden Temperatur; bläuen schwach rothes Lakmuspapier und trüben sich bei längerem Stehen an der Luft. Dabei lässt besonders das Wasser aus der Quelle *A* einen ziemlichen Niederschlag von rostbrauner Farbe fallen, der auch den Boden des Abflusskanals der Quellen bedeckt.

Der Geschmack des Wassers *A* ist stark prickelnd, etwas tintenartig; manchmal, je nach der Witterung, riecht es schwach nach Schwefelwasserstoff. Das Wasser *B* dagegen schmeckt

---

[1] Vergl. Balbin. Miscell. I. 26; und Schaller, Topografie Bd. 9, 198.

angenehm kühlend und gibt nur einen schwach gelblich gefärbten Bodensatz.

Die qualitative Untersuchung ergab: Kieselsäure, Kohlensäure, Schwefelsäure, Chlor, Thonerde, Eisenoxydul, Kalk, Magnesia, Kali und Natron; ferner wurden geringe Mengen von Phosphorsäure, Borsäure, Schwefelwasserstoff und organischer Substanz nachgewiesen.

Nach der auf gewöhnliche Weise ausgeführten quantitativen Analyse sind in 10.000 Theilen Wasser enthalten:

	A	*B*
Kieselsäure	0·7930	0·7571
Thonerde	0·0743	0·0042
Eisenoxydul	0·4421	0·0277
Kalk	1·6080	1·6290
Magnesia	0·6429	0·8560
Kali	0·1066	0·1028
Natron	0·2220	0·2293
Phosphorsäure	Spuren	—
Schwefelsäure	0·3588	0·0645
Chlor	0·0306	0·0421
Gesammtkohlensäure	23·9760	23·6800
Gebundene Kohlensäure	2·2289	2·3990
Halbgebundene Kohlensäure	2·2289	2·3990
Freie Kohlensäure	19·5182	18·8820
Schwefelwasserstoff	Spuren	—
Organische Substanz	Spuren	Spuren
Fixe Bestandtheile	6·4201	6·1025
Dichte bei 15° C.	1·001939	1·001931

Die eben aufgeführten einzelnen Bestandtheile, nach der von Bunsen (Zeitschrift für analytische Chemie Jahrgang X) angegebenen Weise zu Salzen vereinigt, ergeben folgende Tabelle:

Bestandtheile	Quelle *A*		Quelle *B*	
	10000 Thl. enthalten	In ein Wr. Pfund = 7680 Grane	10000 Thl. enthalten	In ein Wr. Pfund = 7680 Grane
Calciumphosphat	Spuren	Spuren	—	—
Calciumsulfat.........	0·0265	0·0204 Gr.	—	—
Calciumbicarbonat	4·1056	3·1531	4·1882	[illegible]2165 Gr.
Eisenbicarbonat	0·9825	0·7546	0·0615	0·0472
Magnesiumbicarbonat..	2·0573	1·5798	2·7392	2·1037
Natriumbicarbonat	—	—	0·5486	0·4213
Kaliumsulfat	0·1971	0·1514	0·1406	[illegible]1080
Natriumsulfat.........	0·4475	0·3437	—	—
Natriumchlorid	0·0504	0·0387	0·0694	0·0533
Thonerde	0·0743	0·0571	0·0042	[illegible]0032
Kieselsäure	0·7930	0·6090	0·7571	0[illegible]814
Freie Kohlensäure	19·5182	14·9899	18·8820	14·5012
Summe..	28·2524	21·6977	27.3908	21·0358
Fixer Rückstand bei 180° getrocknet ...	6·4201	4·9306	6·1025	4.6867

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass die Quelle *A* zu den starken Eisensäuerlingen und die Quelle *B* zu den alkalischen Säuerlingen zu zählen ist.

Prag, Laboratorium des Prof. Lieben.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und von dieser eine erhöhte Auflage in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe werden daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen** erscheinen, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

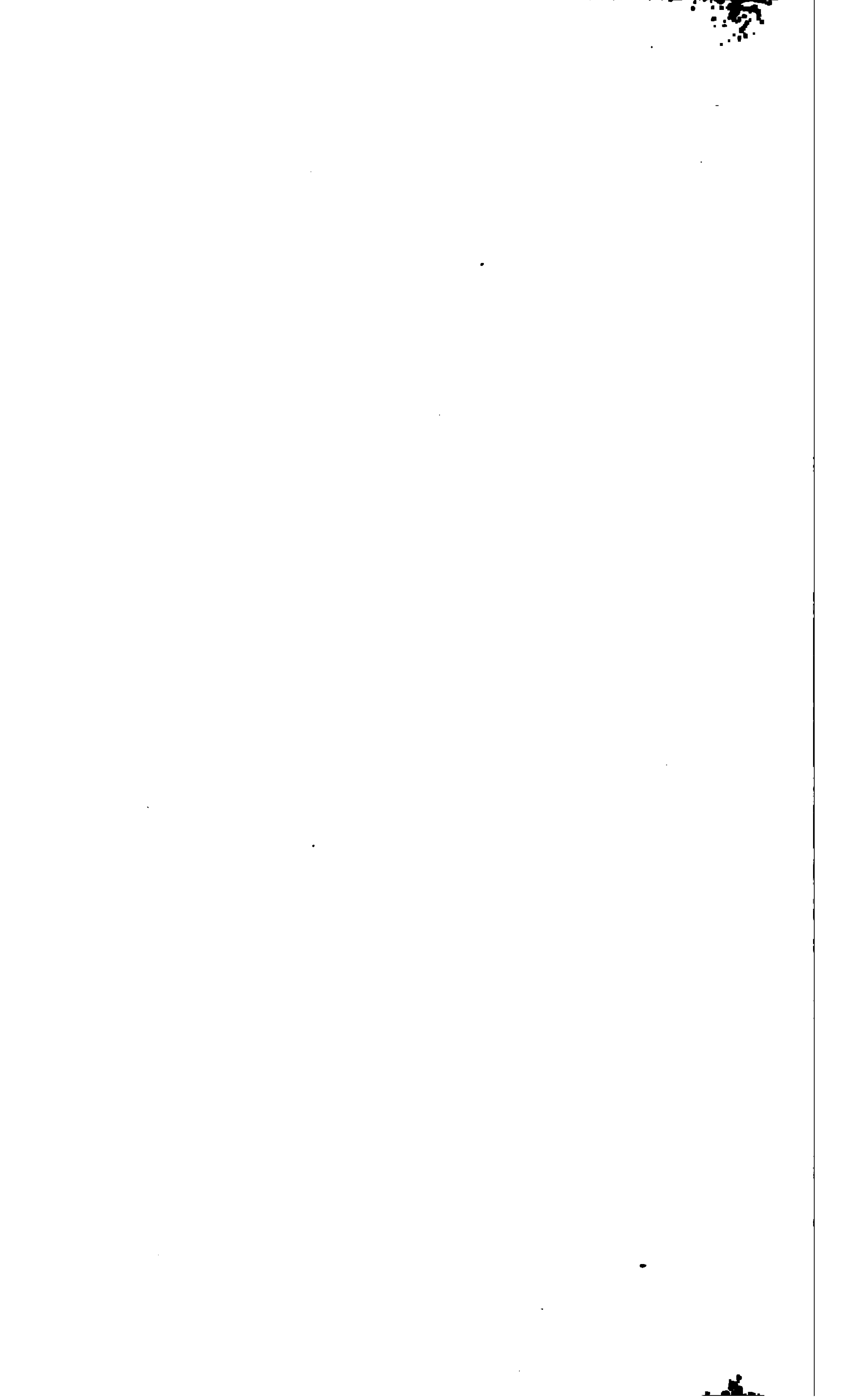
Von der I. und II. Abtheilung werden jährlich 5—7 und von der III. 3—4 Hefte erscheinen.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Der Preis des ganzen Jahrganges sämmtlicher drei Abtheilungen beträgt 24 fl.

Von allen in den Sitzungsberichten erscheinenden Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) bezogen werden.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlung enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. BAND. I. und II. HEFT.

Jahrgang 1874. — Juni u. Juli.

(Mit 8 Tafeln und 3 Holzschnitten.)

DRITTE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1874.

INHALT

des 1. und 2. Heftes (Juni und Juli 1874) des 70. Bandes, III. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. = 1 Thlr. 10 Ngr.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

SIEBZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXX. BAND. III. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1874. — HEFT I BIS V.

(Mit 13 Tafeln.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.



INHALT.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

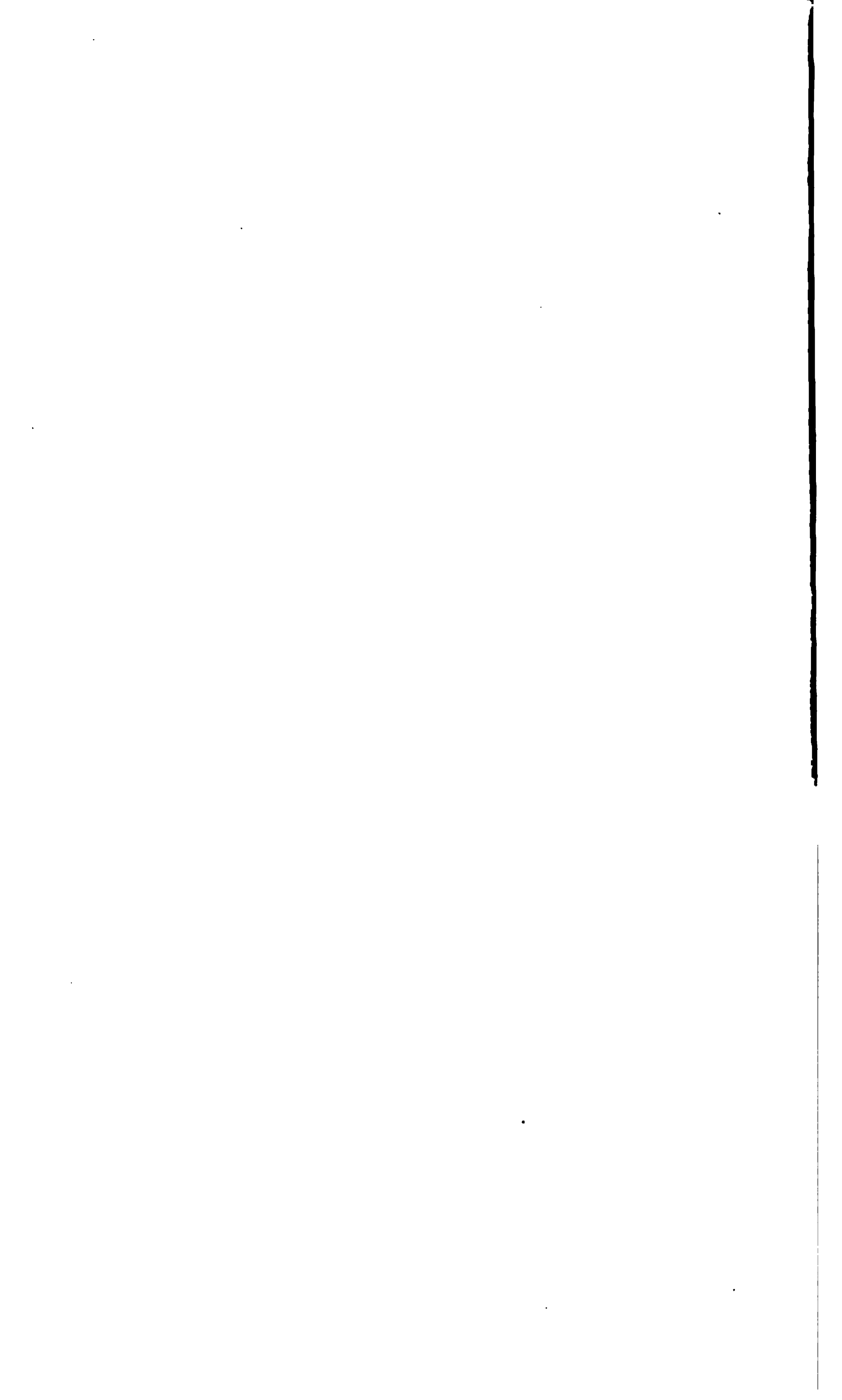
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. Band.

DRITTE ABTHEILUNG.

6.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.



XV. SITZUNG VOM 11. JUNI 1874.

Der Secretär liest einen Erlass des h. Curatoriums vom 1. Juni l. J., wodurch die Akademie in Kenntniss gesetzt wird, dass die Centralgesellschaft für Bienenzucht und Entomologie zu Paris in der Zeit vom 15. September bis 11. October 1874 eine Ausstellung von schädlichen und nützlichen Insecten veranstalten wird, mit welcher gleichzeitig die Abhaltung eines wissenschaftlichen Congresses in Aussicht genommen ist. Die k. Akademie wird ersucht, einen oder mehrere Fachmänner zu bezeichnen, welche die k. k. österr. Regierung bei diesem Congresse zu vertreten hätten.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über die verschiedene Erregbarkeit functionell verschiedener Nervmuskelapparate." I. Abtheilung, von Herrn Prof. Dr. Alex. Rollett in Graz.

„Dodekas neuer Cladoceren nebst einer kurzen Übersicht der Cladocerenfauna Böhmens", von Herrn Wilh. Kurz, Gymnasial-Professor in Deutschbrod.

„Über eine neue Kraftmaschine, Seitendruck-Maschine, getrieben von comprimirter Luft, Dampf und Wasser, überhaupt von allen ausdehnsam und tropfbar flüssigen Körpern", von Herrn Jos. Litzer, Ingenieur zu Losenstein in Ober-Österreich.

Herr C. Eugen Lehmann in Düsseldorf übersendet eine autographirte Abhandlung: „Die Gesetze der Individualität der Planeten unseres Sonnensystems."

Herr Prof. Dr. A. Winckler überreicht eine Abhandlung: „Über die unbestimmte Integration einer Gattung transcendenter Functionen."

Herr Prof. Dr. Jul. Wiesner legt eine, im pflanzenphysiologischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit des Herrn Emil Schumacher aus Luzern vor, betitelt: „Beiträge zur Morphologie und Biologie der Hefe."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Anno XXVII, Sess. 4ª. Roma, 1874; 4º.

Akademie der Wissenschaften, kgl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. März 1874. Berlin; 8º.

American Chemist. Vol. IV, Nr. 11. Philadelphia, 1874; 4º.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 15—17. Wien, 1874; 8º.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1989—1995. (Bd. 83. 21—24; Bd. 84. 1—3.). Kiel, 1874; 4º.

Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1876. Berlin, 1874; 8º.

Comitato, R., Geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1874. Nr. 1 & 2. Roma; 8º.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXVIII, Nrs. 20—21. Paris, 1874; 4º.

Gesellschaft der Wissenschaften, Oberlausitzische: Neues Lausitzisches Magazin. L. Band, 2. Heft. Görlitz, 1873; 8º.

— k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Bd. XVII (neuer Folge VII), Nr. 5. Wien, 1874; 8º.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Bd., Nr. 11. Wien, 1874; 4º.

— für Salzburger Landeskunde: Mittheilungen. XIII. Vereinsjahr 1873. Salzburg; 8º.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 21—23. Wien, 1874; 4°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 11. Graz, 1874; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrg. 1874. Nr. 8—9. Wien; 4°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. Ergänzungsheft Nr. 37. Gotha, 1874; 4°.

Moniteur scientifique du D[teur] Quesneville. 390[e] Livraison. Paris, 1874; 4°.

Nature. Nrs. 238—240, Vol. X. London, 1874; 4°.

Panstenographikon. Zeitschrift für Kunde der stenographischen Systeme aller Nationen. I. Bd., 2. Lieferung. Leipzig, 1869; 8°.

Revista de la Universidad de Madrid. 2[a] Epoca. Tomo II, Nr. 5—6; Tome III, Nr. 1. Madrid, 1873 & 1874; 4°.

Revista de Portugal e Brazil. II[o] Vol. Nr. 2—3. Lisboa, 1874; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger." III[e] Année, 2[me] Série, Nrs. 47—49. Paris, 1874; 4°.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Anno 1874, Disp. 3[a]—4[a]. Palermo; 4°.

Société Linnéenne du Nord de la France: Bulletin mensuel. 3[e] Année. 1874. Nrs. 23—24. Amiens; 8°.

— Botanique de France: Bulletin. Tome XXI[e]. 1874. Comptes rendus des séances 1. Paris; 8°.

— Géologique de France: Bulletin. 3[e] Série, Tome II[e]. 1874, Nr. 2. Paris; 8°.

— de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux: Mémoires et Bulletins. Année 1873, 3[me]—4[me] Fasc. Paris & Bordeaux; 8°.

Society, The Asiatic of Bengal: Journal. 1873. Part I, Nrs. 2—3; Part II, Nr. 3. Calcutta; 8°. — Proceedings. 1873, Nrs. 5—9. Calcutta; 8°. — *Bibliotheca Indica.* Old Series. Nr. 232; New Series. Nrs. 260, 277, 279, 280—282, 285, 286, 288. Calcutta, 1872 & 1873; 8° & 4°.

Verein, Entomologischer, in Berlin: Berliner Entomologische Zeitschrift. XVII. Jahrgang (1873), 3. & 4. Vierteljahrsheft; XVIII. Jahrgang (1874), 1. & 2. Vierteljahrsheft. Berlin, 1874; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 21—23. Wien, 1874; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang, 8. & 9. Heft. Wien, 1874; 4°.

Über die verschiedene Erregbarkeit functionell verschiedener Nervmuskel-Apparate.

Von **Alexander Rollett.**

(Mit 3 Tafeln.)

I. Abtheilung.

Bei einer Reihe von Versuchen am Hüftnerven des Frosches fiel mir vor einiger Zeit die mit der Intensität des Reizes wechselnde Form der am Unterschenkel und Fusse zu beobachtenden Bewegungen so sehr auf, dass ich nicht mehr unterlassen konnte, diesen Erscheinungen eingehendere Studien zu widmen. — Es zeigte sich dabei immer wieder die Thatsache, dass bei ansteigender Reizung des gemeinsamen Nervenstammes, so lange die Reize schwach sind, eine functionell bestimmte Muskelgruppe, — z. B. die Beuger des Fusses — das Übergewicht über die Gruppe ihrer Antagonisten — die Strecker des Fusses — besitzt; während bei starken Reizen das umgekehrte Verhältniss auftritt. Eine Gliedmasse wird also bei schwacher Erregung des gemeinsamen Nervenstammes in ganz bestimmt anderer Richtung bewegt als bei starker Erregung des Nervenstammes.

Überlegt man sich diese Thatsache genauer, so wird man sofort darauf geführt, dass das Vorhandensein einer verschiedenen Erregbarkeit der für functionell verschiedene Muskeln bestimmten Fasern des Nervenstammes einen ausreichenden Erklärungsgrund für unsere Erscheinung abgeben würde; dass aber nicht umgekehrt aus der verschiedenen Bewegungsrichtung bei schwachen und bei starken Reizen eine im Querschnitt des Nervenstammes wechselnde Erregbarkeit ohne Weiteres gefolgert werden kann.

Man würde sich in letzterem Falle dem ganz gerechtfertigten Einwurfe aussetzen, Erscheinung und Erklärung nicht gehörig auseinander gehalten zu haben.

Verfährt man streng und folgerichtig, dann müssten, ehe man auf Grund unserer Erscheinung von einer verschiedenen Erregbarkeit der beispielsweise die Beuger und der die Strecker eines bestimmten Gelenkes innervirenden Fasern eines bestimmten Nervenstammes sprechen könnte, alle anderen Möglichkeiten für die Erklärung unserer Erscheinung ausgeschlossen sein; oder aber es müsste der Nachweis des Vorhandenseins einer solchen gesetzmässig verschiedenen Erregbarkeit der im Nervenstamme nebeneinander liegenden, für die Beuger und für die Strecker bestimmten Fasern vorerst noch nach einer anderen messenden Methode erbracht worden sein, ehe man unsere Erscheinung auf eine solche verschiedene Erregbarkeit zurückführen könnte.

Möge der Leser die besondere Darlegung dieser klaren logischen Forderungen nicht sofort einer abfälligen Kritik unterziehen, denn er wird sich später davon überzeugen, dass man sich thatsächlich oft und lange dagegen versündigt hat.

Ehe ich aber in die Geschichte unseres Gegenstandes näher eingehe, möchte ich gerne noch darauf aufmerksam machen, von welcher Wichtigkeit es wäre, wenn der Nachweis erbracht würde, dass an von allen centralen Verbindungen losgelösten Nervmuskel-Apparaten einzelne funktionell bestimmte Muskeln auf geringere Intensitäten des den gemeinsamen Nervenstamm treffenden Reizes antworten, als andere von jenen funktionell verschiedene Muskeln.

Es müsste diese Thatsache mit in Rechnung gebracht werden bei einer Reihe von Erscheinungen, für welche man bis nun geneigt war, allein die Verbindung der Nerven mit den Centralorganen in Betracht zu ziehen.

Ich erinnere daran, dass beim Frosch der Brondgeest'sche Tonus nur in gewissen Beugern und in den Motoren des Fusses und der Zehen nach vor- und aufwärts vorhanden ist.

An die Verschiedenheit der Reflexbewegungen, welche sich bei gleichörtlicher peripherer Application des Reizes mit der Zunahme der Intensität des letzteren folgen und wobei für schwächere Reize am Hinterbeine des Frosches wieder die

erwähnten Muskeln, für stärkere dagegen die Strecker und die Motoren des Fusses und der Zehen nach hinten und abwärts überwiegen. An das Überwiegen der letztgenannten Muskeln bei den nach der Strychnin-Vergiftung auftretenden Reflexkrämpfen.

An einzelne pathologische Formen von Krampf, wobei ein ähnliches bleibendes oder in bestimmter Weise sich folgendes Vorherrschen bestimmter Muskelfunktionen beobachtet wird.

Sowie für die genannten Erscheinungen käme jene Thatsache auch für den Mechanismus der coordinirten Bewegungen überhaupt mit in Betracht.

Endlich eröffnet sich uns die Aussicht, dass wir durch die Studien über das berührte Verhalten der Muskeln an einem von allen centralen Verbindungen losgelösten Nervmuskel-Apparate Fingerzeige dafür bekommen werden, auf welchen und auf wie vielerlei Wegen wir eine Reihe von Erscheinungen weiter verfolgen können, auf welche wir bei den Untersuchungen über die Functionen einzelner Nerven immer wieder geführt werden. Dass nämlich bei gleichen Reizstärken die funktionell verschiedenen Nerven oder die in einem Nervenstamme enthaltenen, funktionell verschiedenen Fasern ihre Wirkung in ganz verschiedenem Masse entfalten.

I. Geschichtliches.

Ein Theil der Erscheinungen, welche den Gegenstand der später mitzutheilenden Studien bilden, wurde schon vor langer Zeit zugleich mit einer Reihe anderer physiologisch wichtiger Thatsachen beobachtet, aber Speculationen, welche diese und jene in eine sonderbare Verquickung brachten, haben in einer eigenthümlichen, man könnte sagen doppelsinnig hinderlichen Weise der Erkenntniss physiologischer Wahrheiten hier auf kürzere, dort auf längere Zeit sich entgegengestellt.

1. J. W. Ritter.

Es ist eine Arbeit Ritter's [1], welche in solcher Weise unser Interesse in Anspruch nimmt. Ich sollte vielleicht hier auf die

[1] Darstellung des Gegensatzes zwischen Flexoren und Extensoren und ihren Erregbarkeiten, wie ihn galvanische Versuche ergeben und

„geschichtliche Darstellung der Erfahrungen über das Gesetz der Zuckungen“, welche du Bois in seinem berühmten Werke[1] gegeben hat, einfach verweisen. Allein die überaus nahen Beziehungen von Ritter's Beobachtungen zu dem Gegenstande, der uns später beschäftigen soll, so wie der Umstand, dass ich eben so sehr das hervorheben muss, was ich den scharfen kritischen Blicken und anregenden Forderungen du Bois verdanke, als ich andererseits seine oft unzulässigen Einwände und Betrachtungen gegen Ritter's Funde nicht unberührt lassen kann, werden es entschuldigen, dass ich hier noch in eine besondere historische Darstellung eingehe.

Ritter suchte die verschiedenen Erfolge der Schliessung und Öffnung des aufsteigenden und des absteigenden Stromes, namentlich aber die von dem gewöhnlichen Erfolge, nämlich dem Überwiegen der Öffnungszuckung für den aufsteigenden Strom und der Schliessungszuckung für den absteigenden Strom zu beobachtenden Ausnahmen[2] aufzuklären.

Er wurde dabei zur Annahme geführt, dass beim Frosche zwei einander entgegengesetzte Zustände *A* und *E* der Erregbarkeit der Nerven existiren, welche jeder als solcher rein und für sich vorhanden sein könne, oder welche sich einander gesellen und durch das Mehr oder Weniger ihres Vorhandenseins eine Reihe gemischter Übergänge *B*, *C* und *D* von dem einen zu dem andern darstellen können[3].

Reduction desselben auf einen anderen neuen, überall verbreiteten Gegensatz. J. W. Ritter, Beiträge zur näheren Kenntniss des Galvanismus etc. 2. Bandes, 3., 4. und letztes Stück. Jena 1805, p. 65.

[1] Untersuchungen über thierische Elektricität. I. Band. Berlin 1848, p. 307.

[2] Ritter, Beweis, dass ein beständiger Galvanismus den Lebensprocess im Thierreiche begleite. Weimar 1798, p. 101 und l. c. p. 70—73.

[3] Durch ein Bild, welches aber, wie ich sogleich bemerke, Ritter selbst nirgends gebraucht, bringt man sich, glaube ich, der Weise wie Ritter, jene Erregbarkeitszustände zwar nicht consequent, aber doch an den meisten Stellen seiner Arbeit auffasst, am nächsten. Es wären darnach jene Erregbarkeitszustände gleichsam Erregbarkeitsfarben. Zwei derselben *A* und *E* sind Grundfarben zu vergleichen, die übrigen *B*, *C* und *D* aber Mischfarben. In §. 13 (l. c. p. 78) heisst es bei Ritter: „Ein bestimmter Grad der Erregbarkeit, geschätzt nach dem Producte der Erre-

Findet sich den übrigen Bedingungen entsprechend der erste Zustand der Erregbarkeit *A* vor, so ist derselbe nur zu Anfang, gleich nach Herstellung des Präparates vorhanden und geht dann durch die Zwischenstufen *B, C, D* in den anderen *E* über, in welchem die Erregbarkeit immer erlösche.

Ob in einem bestimmten Präparate der eine oder der andere, oder welche Zwischenstufe angetroffen werde, sei abhängig von

---

gung durch die Kette aus Zink — Silber, der Contraction, ihrer Grösse und Energie nach, ist nicht an einen bestimmten, gerade ihm etwa entsprechenden Zustand oder Art der Erregbarkeit gebunden. Genau genommen könnte man sagen, dass bei jedem anderen Frosche u. s. w. einem bestimmten Grade der Erregbarkeit auch ein anderer Zustand eine andere Art derselben entspräche."

In §. 24 spricht Ritter ferner (l. c. p. 92) von den verschiedenen Zuständen der Erregbarkeit und „ihren Mischungen", und ähnlich spricht er sich in §. 37 (l. c. p. 102) aus, in §. 36 (l. c. p. 98) wird ausdrücklich die Bezeichnung „Flexoren-Erregbarkeit der Nerven" und „Extensoren-Erregbarkeit" derselben gewählt. Im Übrigen gebraucht Ritter die Bezeichnungen Flexoren- und Extensoren-Erregbarkeit so, dass man an vielen Stellen nicht darüber ins Klare kommt, ob sich dieselbe auf die Muskeln oder auf die Nerven beziehen.

Sind diese Unklarheiten in seiner Schrift auch keineswegs zu vertheidigen, so muss man, um gerecht zu bleiben, bei deren Beurtheilung doch nie aus dem Auge verlieren, dass sie ein Ausfluss der damaligen sehr ungenügenden anatomischen Kenntnisse vom Baue der Muskeln und Nerven und ihres Zusammenhanges sind. Nur einmal spricht Ritter von den Nerven als Organen, „deren Bau ihre einzelnen Theile auf so mannigfache Weise miteinander verbindet, durcheinander webt u. s. w." Welche Vorstellungen Ritter des Näheren über alle jene Dinge hatte, geht aber aus seiner Abhandlung nicht hervor. Wir können nicht daraus entnehmen, ob ihm Leeuwenhoek's Schriften (1677—1722) oder jene von Muys (1714—1741) über die Muskeln, ob ihm Prohaska's (1778—1779) und Fontana's (1781) Lehren über Muskel und Nerven und des jüngeren Monro (1780—1783), Reil's (1796) und Homes (1799) Arbeiten über die Nerven genauer bekannt waren. Ausser diesen Publicationen fällt aber nichts besonders Bedeutendes in die Zeit vor 1805.

Wie gering und mangelhaft wären also Ritter's Kenntnisse vom Baue der Muskeln und Nerven gewesen, wenn er selbst des Vollbesitzes der anatomischen Wissenschaft seiner Zeit sich hätte rühmen können, geschweige denn wenn das letztere nicht der Fall war, wofür das kaum zu missdeutende u. s. w. in der oben citirten Stelle seiner Abhandlung zu sprechen scheint.

der Zeit nach der Herstellung des Präparates, von dem Alter des Individuums, von der Jahreszeit.

In dem ersten Zustande *A* soll nur Schliessungszuckung des aufsteigenden Stromes erfolgen und sollen nur die Beugemuskeln reagiren, in dem letzten *E* soll nur Schliessungszuckung des absteigenden Stromes erfolgen und sollen nur die Streckmuskeln reagiren.

Während *A* durch *B*, *C* und *D* in *E* übergeht, geben beide Muskelarten Schliessungs- und Öffnungszuckung, für beide Stromrichtungen aber nicht in allen Fällen von der gleichen Intensität.

Das Gesetz dieser Erscheinungen, welches Ritter bildlich[1] dargestellt hat, lautet, wenn wir dasselbe nach dem Vorgange du Bois[2], aber noch strenger an Ritter's Darstellung uns haltend, in Worten ausdrücken:

Erregbarkeitszustand	Strom geschlossen oder geöffnet	Erfolg des absteigenden Stromes	Erfolg des aufsteigenden Stromes
A	Schliessung	Ruhe	Beuger zucken
	Öffnung	Beuger zucken	Ruhe
B	Schliessung	Strecker zucken schw.	Beuger zucken
	Öffnung	Beuger zucken	Strecker zucken schw.
C	Schliessung	Strecker zucken	Beuger zucken
	Öffnung	Beuger zucken	Strecker zucken
D	Schliessung	Strecker zucken	Beuger zucken schw.
	Öffnung	Beuger zucken schw.	Strecker zucken
E	Schliessung	oder 1. Strecker zucken 2. Strecker zucken schwach	oder 1. Ruhe 2. Ruhe
	Öffnung	1. Ruhe 2. Ruhe	1. Strecker zucken 2. Ruhe

Die Flexoren, heisst es bei Ritter weiter, sterben früher als die Extensoren.

---

[1] L. c. II. Bd. Tab. III, Fig. 78—82.

[2] Vergl. Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. I, p. 319.

Intensive galvanische Reize haben mehr oder weniger rasch zur Folge, dass der Zustand *A* in den Zustand *E* übergeht, wesshalb nur schwache galvanische Reize für die Untersuchung von *A* angewendet werden dürfen. — Jeder galvanische Reiz wirke zuerst nur auf die Flexoren und deren Nerven, oder wenn es derselbe Nerv ist, der Flexoren und Extensoren versorgt, nur auf die, die ersteren angehenden Theile desselben.

Für jeden Grad der Erregbarkeit der Flexoren gibt es einen Reiz, der gross genug ist, um nach Erschöpfung der Erregbarkeit (Capacität) derselben in die entgegengesetzte der Extensoren übergreifen zu können.

Den ersteren Zustand der Erregbarkeit nennt Ritter die „beschränkte, bedingte, endliche". Den letzteren die „unbeschränkte, unbedingte, unendliche", weil die erstere Erregbarkeit sich rasch erschöpft, während die letztere bei fortgesetzter Steigerung der Reize immer wieder vorhanden ist bis zum völligen Absterben des Organes.

Ritter sucht dann seine Gesetze noch zu bestätigen durch die Modificationen der Erregbarkeit, welche geschlossene Ketten in thierischen Organen bewirken.

Für den absteigenden Strom, der bei der Schliessung nur die Strecker erregt (vergl. Columne 3 der früheren Tabelle), findet er diese deprimirt, dagegen die Beuger exaltirt; für den aufsteigenden Strom, der bei der Schliessung nur die Beuger erregt (vergl. Columne 4 der früheren Tabelle), findet er diese deprimirt, dagegen die Strecker exaltirt.

Ritter geht dann des Näheren ein auf den Umstand, dass nur eine Stromesrichtung die Strecker, die andere nur die Beuger erregt.

Er drückt sich also aus, „weil nur die Schliessungszuckung[1] unmittelbar während der Wirkung der Kette erfolgt, die Öffnungszuckung aber nicht." „Wie soll, was nicht ist, noch wirken?" frägt er in dieser Beziehung. Wir bleiben aber darum nicht im Unklaren über die Vorstellung welche er sich von der Öffnungszuckung macht.

---

[1] Vergleiche die voranstehende Tabelle, in welcher Schliessungszuckung der Strecker nur für den absteigenden-; Schliessungszuckung der Beuger nur für den aufsteigenden Strom verzeichnet ist.

Schliessungszuckung und Depression, Öffnungszuckung und Exaltation, fallen, wie gerade früher angeführt wurde, für Beuger und für Strecker immer für eine bestimmte, aber in beiden Muskelgruppen entgegengesetzte Stromesrichtung zusammen.

Die Zuckung sei nichts als die erste plötzliche Depression, deren weiterem raschen Umsichgreifen später das Organ durch seine Lebenseigenschaften entgegenarbeite, daher es zu keiner dauernden Contraction komme. Allmälig nimmt aber die Depression unter dem Einfluss der Kette zu. Ja der freiwillige Process im Organe selbst sei schon mit einer allmäligen Erschöpfung jener Resourcen verknüpft, welche das Organ der Depression entgegensetzt.

Die exaltirende Stromesrichtung soll aber innere Vorgänge im Organe, welche sonst eine allmälige Depression zur Folge hätten, retardiren, wenn nun die Kette geöffnet wird, so falle, was retardirte, mit einemmale weg und das Organ befinde sich plötzlich in dem nämlichen Zustande, in welchen das andere ebenso plötzlich bei der Schliessung gesetzt wurde. Daher die Öffnungszuckung.

So lange die Richtung des Stromes im Nerven genau die vom Hirn- zum Muskelende oder die umgekehrte ist, können unmöglich Fälle vorkommen, wo zweierlei Muskel (Beuger und Strecker) in einem Organe zu gleicher Zeit sich contrahiren.

Doch sei das letztere zu beobachten, und das erkläre sich daraus, dass der Experimentator sowohl von Seite des Stromes, der sich den Weg des geringsten Widerstandes selbst aufsucht, als auch von Seite des Nervenbaues, „der die Theile des Nerven in so mannigfacher Weise miteinander verbindet, durcheinanderwebt u. s. w.“, die Richtung des Stromes nicht in jedem Falle genau beherrschen kann. Es sei zu wundern, dass darauf zurückzuführende Anomalien nur zuweilen vorkämen, und dass die Phänomene, um welche es sich handelt, in ihrer äussersten, bis ans Ideal grenzenden Reinheit und Sauberkeit überhaupt und so häufig ausserdem zu beobachten seien.

So suchte Ritter seine Lehre vom Gegensatz zwischen Beugern und Streckern möglichst consequent durchzuführen. Aber seine Lehre fand bald ihren Gegner.

2. C. H. Pfaff.

Dieser Gelehrte, welcher viel gründlichere anatomische Kenntnisse besass [1], als das bei Ritter der Fall gewesen zu sein scheint, konnte die Angaben Ritter's in Bezug auf die Abhängigkeit der Flexion und der Extension von der Schliessung oder Öffnung des auf- und abwärts gehenden Stromes nicht bestätigen [2].

Er gibt Ritter in Bezug auf die bei galvanischen Reizversuchen zu beobachtende Form der Bewegungen des Froschschenkels nur zu, was in den folgenden Worten enthalten ist, die ich der letzteren Schrift Pfaff's (p. 722) entnehme: „darin stimmen meine Erfahrungen mit denen jenes Gelehrten überein, dass die Einwirkung des galvanischen Reizes auf die Flexoren nur auf der ersten, höchsten Stufe der Reizbarkeit stattfindet, dass diese gewöhnlich schnell verschwindet und die Reizbarkeit der Extensoren nach sehr kurzer Zeit das Übergewicht erhält, wesswegen es dann auch nur selten gelingt, in den Froschpräparaten Phänomene der Flexion wahrzunehmen, sondern beinahe in allen Fällen die Zuckungen auf gewaltsame Streckung und Verlängerung der absichtlich gebogenen Gliedmassen zur geraden Linie durch die Thätigkeit der Extension hinwirken.“

Es kann nach diesen Worten kein Zweifel darüber bestehen, dass auch Pfaff das von Ritter beobachtete Phänomen, dass unter Umständen die Beuger das Übergewicht über die Strecker haben können, beobachtet hat.

Das an die von Ritter aufgestellten Regeln gebundene constante Vorkommen einer solchen Erscheinung erschien aber durch Pfaff's Bemühungen völlig widerlegt, und damit auch das Interesse für die Erscheinung verloren.

---

[1] Vergleiche: Über thierische Elektricität und Reizbarkeit. Leipzig 1795; besonders p. 176 u. d. f.

[2] Nordisches Archiv für Naturkunde etc., von Pfaff, Scheel und Rudolphi 1805. Bd. IV. Stück 3, Nr. XII, p. 3 und später in Gehler's physikalischem Wörterbuch Bd. IV. 2. Abtheil. Leipzig. 1828. (Artikel Galvanismus) p. 717—727.

So weist Joh. Müller in seiner Physiologie[1] kurz darauf hin, indem er anführt, dass der von Ritter angenommene Gegensatz der Flexoren und Extensoren für den galvanischen Reiz sich nicht bestätigt hat.

3. E. du Bois.

Ausführlicher hat sich, wie schon angeführt, erst du Bois wieder auf eine Untersuchung der Arbeiten Ritter's und Pfaff's eingelassen.

Er theilt vorerst die bereits oben von uns angeführten Lehren Ritter's mit und stellt dann das von Ritter daraus abgeleitete Gesetz der Zuckungen in einer Tabelle für die den Gang der Erscheinungen bestimmenden, von Ritter unterschiedenen fünf oder besser sechs Stufen der Erregbarkeit zusammen[2].

In dem folgenden Abschnitte geht aber du Bois, und das ist für uns sehr wichtig, in eine Beurtheilung von Ritter's Gesetz der Zuckungen ein.

Zunächst müssten daran „zweierlei Punkte auseinandergehalten werden“, die Aussagen Ritter's über den Gegensatz zwischen Streckern und Beugern, dann aber die anlangend, die Umkehr des Gesetzes der Zuckungen und die Stellung der Fälle, welche das umgekehrte Gesetz zeigen, auf der höchsten Stufe der Erregbarkeiten. Die eine dieser Lehren könnte richtig sein, ohne dass es die andere zu sein brauchte.

Dank dieser kritischen Sichtung du Bois, ist es uns leicht, nur das unseren Gegenstand berührende Urtheil du Bois, über den ersteren Punkt, den Gegensatz zwischen den Erregbarkeiten beider Muskelgruppen hier zu überschauen.

du Bois lässt vor allem dem Verdienste Pfaff's um die Widerlegung des von Ritter angenommenen Gegensatzes eine übergrosse Gerechtigkeit widerfahren, wenn er anführt, dass er die Betrachtungen Pfaff's nur in einigen Punkten, gemäss der seitdem vorgeschrittenen physiologischen Kenntniss ergänzt wiedergebe.

---

[1] I. Band, Coblenz 1835, p. 602 und II. Band, Coblenz 1837, p. 81.

[2] Vergleiche p. 12 oben.

Ich muss mir hier erlauben, auf die Darlegungen du Bois etwas näher einzugehen, aber zugleich auch immer die Einwürfe anführen, welche man denselben nach meiner Meinung heute, also 24 Jahre nach dem Erscheinen von du Bois Werke zu Gunsten Ritter's machen kann.

Beuger und Strecker, sagt du Bois, unterscheiden sich in nichts anderm als in der Art ihrer Befestigung am Knochengerüste.

Gleich dagegen ist zu bemerken, dass man diese Behauptung in ihrer Allgemeinheit heute a priori kaum wird aufrecht erhalten können, möglich und denkbar wäre es doch, dass beide Arten von Muskeln durch ihre eigene Erregbarkeit oder durch die Erregbarkeit ihrer Nerven oder durch die verschiedene Zahl der Verknüpfungen von Muskel- und Nervenfasern sich von einander wesentlich unterschieden.

Ich erinnere an die Beobachtungen, welche Ranvier[1] jüngst an verschiedenen Muskeln gemacht hat.

Eine grosse Anzahl von Muskeln, fährt du Bois fort, seien Beuger und Strecker zugleich, daran lasse sich allerdings nicht die Frage knüpfen, welche Ritter'sche Art der Erregbarkeit nun wohl dergleichen Muskeln besitzen würden, da vielmehr diese dann den Eintheilungsgrund für dieselben abgeben könnte, sondern es trete durch jene Überlegung nur die Willkürlichkeit und die schlechte physiologische Grundlage jener Ansicht in ein helleres Licht.

Wie richtig diese Bemerkungen du Bois auch sind mit Bezug auf das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein von Ritter's Phänomen, muss man daran festhalten, dass der Schwerpunkt der Frage nur darin liegen kann, welche ganz bestimmt benannte Muskeln eben Ritter zu den Beugern und welche er zu den Streckern rechnete. Denn das scheint mir ausser allem Zweifel, dass er den von ihm entgegengesetzten Muskeln auch ganz bestimmt die Eigenschaft zugeschrieben hat, bei der Bewegung gewisser Glieder in bestimmten Gelenken eine antagonistische Wirkung auszuüben.

---

[1] Propriétés, et structures differentes des muscles rouges et des muscles blancs chez les lapins et les raies. Comptes rendus 1873. Novembre, Tom. LXXVII, p. 1030.

Der einzige Unterschied zwischen Beugern und Streckern sagt du Bois weiter, sei, dass die ersteren früher zu antworten aufhören und durch die Todtenstarre zuerst der Fäulniss überliefert werden, das sei aber kein Grund zu einer innerlichen Entgegensetzung, da, nach dem Nysten'schen Gesetze, nach welchem die Todtenstarre von den dem Gehirn näher gelegenen Theilen nach den entfernteren fortschreitet, auch zwischen den Streckern ähnliche Unterschiede stattfänden. Dagegen möchte ich aber hervorheben, dass, wenn Ritter nur die auch ihm wohlbekannte, von du Bois angeführte Thatsache und nichts weiter constatirt hätte, auch für ihn vielleicht kein Grund zu einer innerlichen Entgegensetzung von Beugern und Streckern vorhanden gewesen wäre. Sein Gegensatz war eben auf noch ganz andere Wahrnehmungen basirt. Nebenbei hätte aber, und zwar nicht nur für die Strecker, sondern auch für die Beuger das Nysten'sche Gesetz Geltung haben können.

Einen Wink für die Erklärung der Thatsache, dass die Beuger überhaupt früher absterben als die Strecker, sieht du Bois in den Erfahrungen Engelhardt's, denen zufolge die Beuger mit höheren Punkten des Rückenmarks in Verkehr zu stehen scheinen als die Strecker.

Richtig, so schliesst du Bois diesen Abschnitt, sei bei Ritter unstreitig, dass bei entschwindender Erregbarkeit es nur noch Strecker sind, welche zucken, im höchsten Grade zweifelhaft aber sei es, dass zu Anfang das umgekehrte Verhältniss stattfinde. Du Bois verweist nun darauf, dass Pfaff's Versuche so wenig mit den von Ritter angegebenen Resultaten übereinstimmen; dass Ritter nirgends in die Einzelheiten seiner Beobachtungen einführt; und dass unter den Nachfolgern Ritter's auf dem Gebiete der Reizversuche keiner auf seine Gedanken eingegangen oder selbstständig auf sie geführt worden wäre.

Endlich macht du Bois eine Reihe von Bemerkungen, um Anhaltspunkte für die Entscheidung der Frage zu gewinnen, was den Ritter selbst auf jene Gedanken gebracht habe.

Beide Muskelgruppen zuckten gemeinsam, die Strecker überwögen, aber doch sei ein gewisser Grad von Beugung das Endergebnis der Zuckung. In eine Lage, in der Femur und Tibia einen Winkel von ungefähr 120 — 130° mit einander

machen, scheint jede Zuckung den Froschschenkel zu versetzen. Befindet er sich darin, dann bewirke die Zuckung weiter keine Ortsveränderung, er geht dagegen in jene Lage über, wenn er vorher N-förmig zusammengeknickt oder aber gerade ausgestreckt war. Die Zuckung bewirke jene halbgebogene Lage, durch das in Folge der Querschnittszunahme der Muskeln auftretende Emporschnellen, wodurch die Adhäsion an die Unterlage aufgehoben würde, welche die Glieder früher hinderte, jene dem Gleichgewichte der antagonistischen Muskelgruppen im Zustande der Ruhe entsprechende Lage anzunehmen.

Würde man die angeführte Ursache nicht zureichend finden, so sei noch eine andere Deutung möglich. Man müsse sich die Muskelzusammenziehung vorstellen als Summation von Geschwindigkeiten, welche in jedem Zeittheilchen den Massetheilchen des Muskels ertheilt werden.

Geringere Zusammenziehung bedeute Abnahme der der constanten Masse des Muskels ertheilten Geschwindigkeit. Die Kraft der Beuger nehme rascher ab als jene der Strecker, die Zusammenziehungen der ersteren werden also zur selben Zeit langsamer erfolgen als die der letzteren, so kann es kommen, dass die Beuger das Glied in ihrem Sinne bewegt hinterlassen. Dagegen ist aber anzuführen, dass aus keiner Stelle bei Ritter zu entnehmen ist, dass es sich für ihn nur um ein solches Endergebniss einer stattgehabten Zuckung gehandelt hätte. So dass man eben nur, wenn es nie und nimmer gelingen würde, eine andere als die letztgenannte Erscheinung aufzufinden, mit welcher Ritter's Darlegung in Beziehung zu setzen wäre, an jenes Endergebniss der Zuckung denken müsste.

Es sind aber sehr wohl solche Erscheinungen bei der freien Gegenwirkung antagonistischer Muskelgruppen während der Thätigkeit der letzteren selbst zu beobachten, das gibt schon Pfaff wie angeführt wurde, zu. Und bei diesem Verhalten der Dinge ist es nicht anzunehmen, dass Ritter jemals etwas anderes bei seiner Darstellung im Auge hatte als besondere Formen solcher freier Gegenwirkung antagonistischer Muskelgruppen, die gerade ihm durch eine besondere Gunst der Verhältnisse öfter zur Beobachtung gekommen sein müssen.

Sein ganzer Ideengang, namentlich aber die Folgerungen, welche er im VII. Abschnitte seiner Abhandlung mittheilt, sprechen nur dafür.

Du Bois fasst endlich selbst seine gegen Ritter gerichteten Betrachtungen dahin zusammen, dass er die in ein verwickeltes Gebiet von Erscheinungen führende Lehre Ritter's auf so lange für beseitigt erklärt, bis sie aufs Neue durch unzweideutige und im Einzelnen mitgetheilte Erfahrungen sich das Recht der Berücksichtigung erkämpft haben wird. Es ist das eine bedeutsame Reserve am Schlusse von du Bois Polemik.

Aus den in dieser Abhandlung mitzutheilenden Versuchen wird sich, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, ergeben, dass am Froschschenkel in der That bei schwachen Reizen, welche den gemeinsamen Nervenstamm treffen, eine Bewegung im Sinne einer funktionell bestimmten Gruppe von Muskeln, die also die mehr erregbaren sind, auftritt; während bei stärkeren Reizen eine Bewegung im Sinne einer anderen funktionell bestimmten Gruppe von Muskeln, die also die weniger erregbaren sind, erfolgt.

Die erstere Gruppe von Muskeln gehört augenscheinlich der Reihe jener an, welche Ritter bei seinen Versuchen als Beuger, die letztere der Reihe jener, welche er als Strecker bezeichnete.

Ein ähnlich differentes Verhalten funktionell verschiedener Muskeln kommt aber auch an anderen Orten des Körpers vor.

Darum muss Ritter trotz der vielen Irrthümer, in welchen er bei der Darstellung dieser Thatsache befangen war und welche die Aufnahme und Schätzung des Richtigen in seinen Beobachtungen hemmten und beeinträchtigten, doch als derjenige genannt werden, welcher mit Hilfe elektrischer Reizung des Nerven jene Thatsache zuerst wahrnahm, und wenn auch nicht oder falsch erklärte, doch in ihrer Bedeutung würdigte und zur Anerkennung zu bringen suchte.

II. Plan der Untersuchung und Befestigung des Froschpräparates.

Als es mir wünschenswerth erschien, dem angedeuteten Gegenstande meine Aufmerksamkeit zuzuwenden, entschied ich mich nach einigen Vorversuchen dafür, dass vorerst unter Anwendung von inducirten Wechselströmen, ganz nach Art der zahlreichen Reizversuche, bei welchen man gewöhnlich den Abstand der Spiralen des Schlitteninductoriums als Mass der Erregbarkeit benützte, die oben angeführte Frage gelöst werden solle.

Die nicht so eindeutigen Versuche mittelst des constanten Stromes oder anderer Reize aber sollten eventuellen späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Ferner wollte ich als Object für die Untersuchung vorerst einzig und allein den an den flachen Seitentheilen des vorderen Gelenkendes des os cruris[1] fixirten Unterschenkel und Fuss des Frosches mit dem daran befindlichen Hüftnerven verwenden.

Die an diesem Präparate vorhandenen Muskeln können vorzugsweise in zwei Gruppen, in die Motoren des Fusses und der Zehen nach vor- und aufwärts mit den Abductoren der Zehen und in die Motoren des Fusses und der Zehen nach rück- und abwärts mit den Adductoren der Zehen zerlegt werden.[2]

---

[1] Siehe Ecker, die Anatomie des Frosches, Braunschweig 1864, p. 59. Fig. 46.

[2] Der Gruppe I gehören an: Der *M. tibialis anticus*, der *M. peroneus*, der *M. flexor tarsi anterior* und *posterior*, die *M. extensores* und *abductores digitorum* und die *M. interossei dorsales*.

Der Gruppe II gehören an: der *M. gastrocnemius*, der *M. tibialis posticus*, der *M. extensor tarsi*, der *M. plantaris*, die *M. transversi plantae*, die *M. flexores digitorum*, die *M. lumbricales*, die *M. adductores digitorum* und die *M. interossei plantares*. Bei dieser Bezeichnung der Muskeln sind wir zunächst Ecker (l. c. p. 119—137) gefolgt.

In die zwei oben getrennten, funktionell verschiedenen Gruppen wurden sie eingereiht nach Ecker's für einzelne derselben gemachten Angaben über ihre Funktion, ferner nach den im Wesentlichen mit Ecker's Angaben übereinstimmenden, aber in vieler Beziehung noch genaueren Angaben, welche C. Eckhard in einer schönen Arbeit (Über Reflexbewegungen der vier letzten Nervenpaare des Frosches. (Zeitschrift für rationelle Medicin. Bd. 7. Heidelberg 1849, p. 288 u. d. f.) macht.

Von den zwei Ästen des *N. ischiadicus* versorgt der *N. peroneus* wenn nicht ausschliesslich, so doch vorzugsweise die Motoren des Fusses und der Zehen nach vor- und aufwärts und die Abductoren der Zehen, wogegen der *N. tibialis,* wenn nicht ausschliesslich so doch vorzugsweise die Motoren des Fusses und der Zehen nach rück- und abwärts und die Adductoren der Zehen versorgt[1].

Es liegt also an dem gewählten Präparate der für unsere Versuche günstige Fall der Vereinigung aller oder der meisten für antagonistische Muskelgruppen bestimmten Fasern eines Nervenstammes in zwei besonderen Ästen der nächsten Ordnung vor.

Das vorerwähnte Präparat wurde für die später mitzutheilenden Versuche in der folgenden Weise hergestellt. Nachdem die Durchtrennung der Wirbelsäule dicht am Ende des Rückenmarkes mittelst eines einzigen Scheerenschnittes vorgenommen war, wurde zuerst am Oberschenkel der *Nervus ischiadicus* vom Becken bis zur Kniekehle blossgelegt und ohne Zerrung völlig isolirt, dann mittelst einer unter dem Nerven hingeschobenen Scheere der Schenkel nahe dem Hüftgelenke amputirt, darauf der Nerv bis über den Plexus verfolgt und dicht am oberen Ende des Plexus durchschnitten. Darauf wurde die Muskulatur des Oberschenkels vom Oberschenkelknochen mit der Scheere entfernt und zugleich das Kniegelenk zum Behufe der Fixirung etwas von der Haut entblösst.

Der Oberschenkelknochen wurde nun um denselben zu fixiren, von unten her vertical in einen Kork, Fig. I, II, III — *a* eingeschoben, welcher auf einem Ständer verschiebbar angebracht war, dann an die flachen Seitentheile des vorderen Gelenkendes des Os cruris die Branchen einer Pinzette *b* in Fig. I, II und III, angelegt, die mittelst einer an einem Ständer befindlichen Klemme *c* in Fig. I, II, III geschlossen wurde. Der so fixirte Unterschenkel und Fuss, deren Muskulatur mit Haut bedeckt blieb, befand sich dann in hängender Lage zu den Versuchen bereit, wenn während aller vorhergegangenen Operationen der Nerv und die Muskulatur des Unterschenkels sorgfältig vor jeder Zerrung oder Quetschung bewahrt blieben.

---

[1] Vergl. Joh. Müller, Handbuch der Physiologie. Bd. 2. Coblenz 1837, p. 81.

Auf welche Elektroden *d* (Fig. 1, 2, 3) und in welcher Weise der Nerv unseres Präparates auf dieselben gelegt wurde, soll später angegeben werden.

Um alle Missdeutungen unserer späteren Angaben völlig auszuschliessen, wollen wir uns aber hier noch darüber verständigen, welche verschiedene Lage ein in der besprochenen Weise präparirtes und fixirtes Bein (Fig. I) annimmt, wenn der *Nervus ischiadicus* einmal nach Durchschneidung des *Nervus tibialis*, das anderemal nach Durchschneidung des *Nervus peroneus* gereizt wird.

Ich habe beide Lagen dargestellt nach Photographien, welche während tetanischer Erregung des *Tibialis* oder *Peroneus* erhalten wurden.

Wir sehen im ersteren Falle (Fig. II) die Theile des Fusses im Fusswurzelgelenke[1] (Fig. I, II — *e*), ferner in dem Gelenke zwischen den grossen beiden Fusswurzelknochen und den kleinen[2] (Fig. II *f*) und ebenso alle Zehen gehoben und zwischen den auseinander gespreizten Zehen die Schwimmhaut entfaltet.

Im zweiten Falle (Fig. III) sehen wir den Fuss gestreckt, die Zehen nach hinten gebogen und aneinander geschlossen.

Wir wollen der Kürze halber, wie das auch in der That gebräuchlich geworden ist, die erste Lage die Beugelage und den Übergang in dieselbe — die Motion des Fusses nach vor- und aufwärts — als Beugung; die zweite die Strecklage und den Übergang in dieselbe — die Motion des Fusses nach rück- und abwärts — als Streckung bezeichnen. Ferner dem entsprechend den *N. peroneus* kurzweg als Beugenerven, den *N. tibialis* als Strecknerven bezeichnen.

Ausser dem oben beschriebenen Präparate, welches zu ausführlichen Versuchsreihen diente, wurde aber auch noch der *Plexus ischiadicus* mit der ganzen frei herabhängenden Extremität und der *Plexus brachialis* mit der vorderen Extremität zu Versuchen verwendet. Da diese Präparate nur in einzelnen Versuchsreihen zur Anwendung kamen, so soll ihre Herstellung erst am betreffenden Orte näher beschrieben werden.

---

[1] Eckhart l. c. p. 286.
[2] Eckhart l. c. p. 287 u. 288.

In Bezug auf den Zustand der Frösche habe ich zu bemerken, dass meine Versuche sich über mehr als ein volles Jahr ausdehnten, dass ich dabei aber zu keiner Jahreszeit auf Schwierigkeiten in der Darstellung der Phänomene stiess, wenn ich nur vermied, durch allzulange Gefangenschaft abgemagerte und herabgekommene Frösche zu gebrauchen. Die Thiere waren zum Theile frisch eingefangen, zum Theile solche, welche in dem Froschbassin des hiesigen Institutes gehegt wurden.

Wichtig ist, dass man bei der Herstellung des Präparates, wie schon erwähnt, damit anfängt, das Hirn und Rückenmark auszuschliessen. Zu dem Ende trenne ich durch einen einzigen Scheerenschnitt den Rücken des Thieres an der unteren Grenze des Rückenmarks quer durch, dabei können die unteren Extremitäten wohl einmal zucken, sie dürfen aber nicht in tetanische Contractionen verfallen.

Ereignet sich das Letztere, dann verzichte man auf die Verwendung solcher Präparate. Ich muss bei dieser Gelegenheit auf eine Erscheinung aufmerksam machen, welche ich zwar nicht weiter verfolgt habe, aber anführen will, weil sie, unberücksichtigt gelassen, die Unbrauchbarkeit vieler Präparate bedingen könnte. Wenn ich in der oben angegebenen Weise, die unteren Extremitäten sofort abtrennte, so erfolgten nur dann tetanische Contactionen in denselben, wenn der Schnitt zu hoch hinauf reichte und so das Rückenmark mit getroffen wurde. Wenn man aber sehr stark abgekühlte, in dem eigenthümlichen Zustande winterlicher Trägheit befindliche Frösche zu den Versuchen benützen will, dann bemerkt man, dass, wenn auch der Schnitt das Rückenmark nicht getroffen hat, doch längere Zeit nach erfolgtem Schnitte im Präparate die gesammte Muskulatur in einem tetanischen Zittern begriffen ist, welches auch, wenn der Nerv jetzt frei präparirt und das Bein völlig isolirt wird, noch andauert und alle weiteren Versuche unmöglich macht.

Diese Krämpfe sind den Trocknungskrämpfen sehr ähnlich. Ich überzeugte mich aber, dass sie nicht durch Trocknung bedingt sind.

Sie bleiben vollständig aus, wenn man die Frösche erst einige Zeit im Versuchszimmer hält und sie erst benützt, wenn ihre Temperatur mit der des letzteren sich abgeglichen hat. Ich muss

also in solchen Fällen zum Zwecke der später anzuführenden Versuche empfehlen, das Letztere immer zu thun. Was die angeführte Erscheinung an den stark erkälteten Fröschen anbelangt, so muss diese besonders weiter verfolgt werden.

Ich habe nur noch zu bemerken, dass eine getreue und genaue Einhaltung der angegebenen und noch weiter vorzuschreibenden Verfahrungsweisen bei den nachfolgenden Versuchen mehr als irgendwo nothwendig ist, um zu sicheren Resultaten zu gelangen.

III. Der Reizapparat.

Bevor ich an die Mittheilung meiner Versuche gehe, muss ich noch den Reizapparat besprechen, dessen ich mich bediente.

Ich benützte nicht das Schlitteninductorium von du Bois, wie das bei Versuchen mit abgestuften Inductionsströmen am häufigsten geschieht, da ich durch Verschiebung der Inductionsspirale nicht die vielen und bequemen Abstufungen des Inductionsstromes, welche sich für meine Zwecke als dienlich erwiesen, erhalten konnte. Es wird sich das ohne weitere Begründung aus der Beschreibung meiner Versuche ergeben.

Ich stufte dabei vielmehr bei immer ganz aufgeschobener Nebenrolle den Strom der Hauptrolle, die keinen Eisenkern enthielt, mittelst eines als Nebenschliessung zur Hauptrolle angelegten Rheochordes von du Bois ab.

Pflüger[1] gedenkt schon der Feinheit dieser Methode, hat sie aber nicht in Anwendung gebracht. Neuestens wendete Preyer[2] dieselbe zu ganz bestimmten Zwecken an. Als Übelstand des Verfahrens rügt Preyer mit Recht, dass die Änderung der Stärke des inducirenden Stromes zugleich die Schwingungsfrequenz des Unterbrechungshammers mit verändert.

Das muss immer der Fall sein, wenn der inducirende Strom gleichzeitig den Hammer treibt.

---

[1] Untersuchungen über die Physiologie des Elektrotonus. Berlin, 1859, p 126.

[2] Das myophysische Gesetz. Jena 1874, p. 69 u. d. f. und über electrische Muskelreizung. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaften 1874.

Preyer bemühte sich aber nicht, diesen Übelstand wegzuschaffen, er sagt vielmehr, dass bei hoher Frequenz des Hammers die Änderung der letzteren auf die Grösse der Verkürzung des Muskels keinen merklichen Einfluss zu haben scheine und dass er zu seiner Verwunderung bemerkt habe, dass die Schwingungszahl des Hammers eines Schlitteninductoriums mit Helmholz'scher Vorrichtung sehr wenig bei Anwendung des Rheochordes geändert wird, während die Inductionswirkung bei Prüfung mittelst des Muskels und des Geschmackes die grössten Schwankungen zeigt.

Nach meinen Erfahrungen kann ich aber diese Angaben Preyer's über so schwer erklärliche Wirkungen jener Stromabstufung nicht gelten lassen.

Ich konnte das Verfahren erst brauchbar finden, wenn der Einfluss der Änderung des inducirenden Stromes auf die Hammerfrequenz eliminirt wurde.

Luchsinger[1] erreichte diesen Zweck schon dadurch. dass er nicht wie Preyer mit tetanisirenden Strömen reizte, sondern mit einzelnen Inductionschlägen.

Die Art und Weise aber, wie Luchsinger[2] das Problem mathematisch behandelt hat, könnte leicht die Meinung erwecken, als ob das Verfahren überhaupt nicht brauchbar wäre, da schon von einem gewissen niedrigen Werthe des Rheochordwiderstandes ab sich die Intensität in der Hauptrolle bei weiterer Vergrösserung der Rheochordwiderstände nur wenig ändert, sondern vielmehr sich rasch einem von den Rheochordlängen völlig unabhängigen Grenzwerthe nähert.

Es nimmt mich Wunder, dass Luchsinger sich nicht darüber ausgesprochen hat, dass seine Einwürfe das Rheochord als Nebenschliessung ganz im Allgemeinen treffen müssen. Er wäre dann offenbar über die Grenzen der Brauchbarkeit dieses Instrumentes besser ins Klare gekommen, als das, wie wir später sehen werden, bei ihm der Fall ist. Zum Theile hat schon Preyer selbst sein Verfahren gerechtfertigt. (Jenaische Zeitschrift 1874.)

---

[1] Pflüger's Archiv, Bd. 8. Bonn 1874, p. 544. — [2] L. c. p. 545 u. 546.

Ich habe mich lange, ehe ich von den Versuchen Preyer's und Luchsinger's Kunde erhielt, des gedachten Verfahrens mit grossem Vortheile bedient, und zwar unter Anwendung tetanisirender Ströme und werde nun hier seine hohe Brauchbarkeit und vorzügliche Leistungsfähigkeit zeigen.

Wie gesagt muss vor allem dafür gesorgt werden, dass, während man den inducirenden Strom durch Änderung der Drahtlängen in der Nebenschliessung ganz allmälig ansteigen oder abfallen lässt, dieser Strom immer dieselbe Anzahl von Öffnungen und Schliessungen erfährt.

Mit dem so überaus bequemen Hammerwerke liesse sich das erreichen, wenn man dasselbe nicht, wie gewöhnlich, mit demselben, sondern durch einen von dem inducirenden Strome ganz unabhängigen zweiten Strom in Bewegung setzen und als Unterbrecher für den ersten Strom benützen würde; wie ja auch bei grossen Inductionsapparaten mit Foucault'schem Interruptor der letztere seinen eigenen Strom bekommt.

Für unsere Hammerwerke könnte das geschehen, ohne dass es auch nothwendig wäre, zwei besondere Ketten für jene Ströme anzuwenden. Sowohl der einfache Wagner'sche Hammer, als auch der Fromment'sche Stromunterbrecher könnten so gebraucht werden. Ich bediente mich aber weder des einen noch des anderen, sondern vielmehr eines für meine Zwecke modificirten Halske'schen Stromunterbrechers.

Ein solcher Stromunterbrecher erhält zu dem Zwecke folgende Zugabe:

Zwei durch Schrauben aneinander gehaltene Messingbügel (Fig. IV *a* und *b*) werden an der Säule *c* des Stromunterbrechers von dieser durch Zwischenlage von Kammmasse isolirt angebracht.

Die Messingbügel sind bestimmt, zu Trägern von zwei Klemmen *kk'* und einer Platinspitze *s*, welche einer an der unteren Seite des Hammers befindlichen Halske'schen Feder an derselben Stelle entgegensieht, wo von oben her die Spitze *s'* auf die an der oberen Seite befindliche Halske'sche Feder *h'* hintrifft.

Der Platincontact *sh* dient, um beim Niedergang des Hammers den Strom der Hauptrolle zu schliessen, der Strom für das

Hammerwerk dagegen ist geschlossen, wenn der Contact *s'h'* vorhanden ist.

Unsere untere Spitze hat also andere Zwecke zu erfüllen. als die an derselben Stelle befindliche Spitze bei dem von Riess[1] benützten modificirten Stromunterbrecher.

Wir wollen nun in der schematischen Fig. V, absehend von den nur durch Striche oder Punkte angedeuteten Verbindungen. welche später besprochen werden sollen, zuerst den Strom für das Hammerwerk verfolgen. Wir gelangen von der Kette 1 zum Hammer, zur Platinspitze *s'*, durch die Säule *c* zum Elektromagneten, zur Klemme *g* und zurück zur Kette 1.

Wird dieser Strom beim Niedergang des Hammers geöffnet, so schliesst sich durch den Contact mit *s* der Strom der Hauptrolle, wenn diese zwischen *l* und *l'* eingeschaltet wurde.

Wir gelangen, wie es die gestrichelten Pfeile anzeigen, von der Kette 1 zum Hammer, zur Spitze *s*, zur Hauptrolle, von dieser durch den in der Figur noch enthaltenen Stöpselrheostaten *R* zur Klemme *g* und zurück zur Kette. Die Enden *rr'* in Fig. V sind zur Verbindung mit dem Rheochord bestimmt.

Es ist nun auch leicht ersichtlich, dass man wie mit einer Kette auch mit zwei gesonderten Ketten arbeiten kann. Schaltet man die zweite Kette (Fig. V, 2) zwischen *d* und *R* ein, während man die Verbindung zwischen *g* und *R* entfernt, so dient der Strom der Kette 1 allein für das Hammerwerk, dagegen der Strom der Kette 2 für die Hauptrolle allein, wie das abermals die gestrichelten Pfeile anzeigen.

Ich habe in der That unter Anwendung eines in der erwähnten Weise umgestalteten Halske'schen Stromunterbrechers, sowohl mit einer, als mit zwei Ketten völlig entsprechende Resultate erzielt.

Allein man muss dabei die obere und untere Platinspitze sehr genau einstellen, so dass jedes, wenn auch ein noch so kleines Zeittheilchen andauernde, gleichzeitige Vorhandensein beider Contacte vollkommen vermieden ist, da sonst eine Ver-

[1] Poggendorff's Annalen. Bd. XCI, p. 290. Vergl. auch Wiedemann, die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. II. Band. Braunschweig 1861, p. 626.

zweigung der beiden Ströme in dem Momente des gleichzeitigen Schlusses und damit eine Störung im Gang des Hammers und eine unbeabsichtigte Schwankung des inducirenden Stromes eintritt.

Um sicher und mit weniger Aufmerksamkeit diese Übelstände zu vermeiden, stand noch das Mittel zu Gebote, die oben und unten am Hammer befindlichen und zur Berührung mit den Spitzen bestimmten Contactstellen von einander zu isoliren.

Das wurde bei dem nun zu beschreibenden Stromunterbrecher in der Weise realisirt, dass ich die Säule, welche den Drehpunkt des Hammers enthält, halbiren liess. Fig. VI stellt dieselbe vergrössert dar.

Durch eine zwischen den Hälften *hh'* angebrachte Lage von Hartkautschuk *gg* sind die beiden Hälften von einander isolirt. Der Stiel des Hammers ist ebenfalls aus Hartkautschuk gebildet und trägt vorne den Anker. Oben und unten ist er mit Messingstreifen *mm'* (Fig. VI) belegt, auf welche die obere und untere Halske'sche Feder aufgeschraubt werden, mit dem oberen Messingstreifen aber wird die eine Hälfte *a* der am Hammerstiel festen Drehungsaxe verbunden, mit dem unteren Messingstreifen die von der ersten isolirte zweite Hälfte *a'* der Drehungsaxe. Der ganze Apparat ist in Fig. VII abgebildet[1]. Aus dieser Zeichnung, aus Fig. V u. VI, so wie aus den schematischen Figuren V und VIII, auf welche wir sogleich verweisen werden, ist die Einrichtung des Hammerwerkes vollständig zu entnehmen. Die zwei Klemmen *a* u. *b* (Fig. VII), welche für gewöhnlich durch ein Drahtstück verbunden sind, dienen dazu, eventuell auch die Enden der Hauptrolle aufzunehmen, so dass das Hammerwerk auch in gewöhnlicher Weise für ein Schlitteninductorium verwendet werden könnte.

Es ist leicht ersichtlich, dass die Verbindungen wie in Fig. V getroffen werden müssen, wenn man in der gewöhnlichen Weise mit Öffnungs- und Schliessungsschlägen arbeiten will.

Wir finden in dieser Figur, wovon wir früher noch abgesehen haben, auch schon die gehälftete Säule *hh'* eingezeichnet, und

---

[1] Einen solchen Stromunterbrecher haben Meyer u. Wolff in Wien nach meinen Angaben völlig entsprechend und elegant ausgeführt.

zwar ist der eine Pol der für das Hammerwerk bestimmten Kette 1 mit dem oberen Contact *s'* also mit *h* zu verbinden, während mit dem unteren Contacte *s* der eine Pol der für die Hauptrolle bestimmten Kette 2 verbunden werden muss. Alles Übrige verhält sich bei zwei Ketten und isolirten Contacten so wie früher bei zwei Ketten und nicht isolirten Contacten.

Viel werthvoller wurde mir aber der modificirte Stromunterbrecher in der in Fig. IX gezeichneten Verbindungsweise. Es schliesst dabei der von dem Strom der Kette 1 immer gleichmässig bewegte Hammer bei Herstellung des unteren Contactes *s* in ganz ähnlicher Weise, wie bei den nach Helmholtz zur Hervorbringung zeitlich gleichverlaufender Öffnungs- und Schliessungsströme eingerichteten Hammerwerken eine Nebenschliessung zum Strom der Hauptrolle, welcher von Kette 2 geliefert wird, das wird nach dem früher an der Fig. V Erläuterten auch in Fig. VIII sofort gut zu verfolgen sein. Gerade die letztere Verbindungsweise bedingt aber die vorzügliche Brauchbarkeit des modificirten Stromunterbrechers zu den später zu beschreibenden Versuchen und sind dieselben, wo nichts Anderes besonders bemerkt wird, auch alle nur mit einem also verbundenen Stromunterbrecher angestellt worden.

Der Gang des Hammers mit seinen zwei gegenüberliegenden Federn zwischen den einander entgegengekehrten Spitzen ist ein sehr regelmässiger und gleichförmiger, was sich sofort mit Aug' und Ohr deutlich wahrnehmen lässt. Er besteht aber auch noch gegenüber von viel feineren Prüfungsmethoden, worauf ich später zurückkommen will.

Wir waren früher davon ausgegangen, den Strom der Hauptrolle, von dem Strom für das Hammerwerk des Inductoriums unabhängig zu machen, so dass es uns möglich wird, bei gleichbleibendem Gange des Hammerwerkes den inducirenden Strom durch ein als Nebenschliessung zu demselben angelegtes Rheochord abzustufen.

Ich muss nun über dieses Verfahren noch einige Bemerkungen von allgemeinerem Interesse machen. In Fig. IX bedeute w_{I} die Hauptleitung, w_{II} den einen Zweig, w_{III} das Rheochord, so erhält man nach den bekannten Kirchhoff'schen Formeln für die Intensität I_{II} in dem Zweige neben dem Rheochord.

$$I_{II}=\frac{Ew_{III}}{w_I w_{II}+w_I w_{III}+w_{II} w_{III}} \tag{1}$$

und für die Intensität in der Hauptleitung

$$I_I=\frac{E(w_{II}+w_{III})}{w_I w_{II}+w_I w_{III}+w_{II} w_{III}} \tag{2}$$

In 1 Zähler und Nenner mit $w_{III}+w_{II}$ multiplicirt gibt nach 1 und 2

$$I_{II}=\frac{w_{III}}{w_{III}+w_{II}} I_I \tag{3}$$

Man ersieht daraus, dass die Intensität in dem Zweige zunimmt, wenn die Intensität in der Hauptleitung und wenn die Rheochordlängen zunehmen. Der Rheostat (Fig. V u. VIII) dient dazu I_I passend zu reguliren und dadurch die Werthe von I_{II} bei den einzelnen Versuchen zwischen andere Grenzen zu verlegen.

Wie sich in (1) I_{II} mit w_{III} ändert, während alle anderen Bedingungen constant bleiben, ergibt sich des Näheren aus der folgenden Überlegung.

Betrachtet man in der Gleichung

$$I_{II}=\frac{Ew_{III}}{w_I w_{II}+w_I w_{III}+w_{II} w_{III}}$$

oder

$$(w_I+w_{II})w_{III}I_{II}-Ew_{III}+w_I w_{II} I_{II}=0 \tag{4}$$

die Variabelen $I_{II}=y$ und $w_{III}=x$ als die Coordinaten eines veränderlichen Punktes, so findet man, dass (1) die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel ist. Die Coordinatenaxen sind parallel den Assymptoten x', y' Fig. X. Sie geht durch den Anfangspunkt 0 der Coordinaten, da der Gleichung (4) auch durch $x=y=0$ entsprochen wird. Die Coordinaten des Mittelpunktes der Hyperbel sind

$$0B=-\frac{w_I w_{II}}{w_I+w_{II}}$$

$$0'B=\frac{E}{w_I+w_{II}}$$

Für die Axen $x'0'$ und $y'0'$ nimmt nämlich die Gleichung (4), wie durch Transformation der Coordinaten leicht zu finden ist, die Form

$$x'y' = \frac{Ew_{\mathrm{I}}w_{\mathrm{II}}}{(w_{\mathrm{I}}+w_{\mathrm{II}})^2} = \text{const.} \tag{5}$$

an und für die Axen $X0'$ und $Y0'$ die Form

$$X^2 - Y^2 = \frac{2Ew_{\mathrm{I}}w_{\mathrm{II}}}{(w_{\mathrm{I}}+w_{\mathrm{II}})^2} = \text{const.} \tag{6}$$

Durch das Stück $A0$ Fig. X können wir uns also das Gesetz des Anwachsens der Stromstärke in dem Zweige w_{II} dargestellt denken, wenn der Rheochordschieber von 0 nach aufwärts an der Scala verschoben wird, während im gegebenen Falle alle anderen Widerstände ungeändert bleiben [1].

---

[1] Bei Luchsinger (l. c. p. 545) kommen folgende Deductionen vor: „Nach den Gesetzen der Stromverzweigung ist — wenn ε die elektromotorische Kraft I und W-Intensität und Widerstand in der Stammleitung i_1, w_1 dasselbe in der Hauptrolle i_2, w_2 im Rheochordzweige bedeuten

$$i_1 = \frac{\varepsilon w_2}{W(w_1+w_2)+w_1 w_2}.$$

Wenn W und w_1 sehr gross im Vergleiche zu w_2, ist eine Reduction der Gleichung zu

$$i_1 = \frac{\varepsilon w_2}{W w_1}$$

erlaubt.

Nur dann ist die Intensität in der i_1 proportional dem Rheochordwiderstande w_2, was Herrn Preyer vielleicht vorschwebte.

Diese Bedingungen sind aber in unserem Falle nicht erfüllt. Denn w_1, der Widerstand der Hauptrolle beträgt an meinem Apparate kaum 160 Rheochordeinheiten, während die Variationen der w_2, der Rheochordwiderstände, 1000—2000 Einheiten betragen. Dann aber muss von einem gewissen niedrigen Werthe w_2 ab die Intensität i_1 der Rolle sich durch Variiren von w_2 nur wenig ändern können, der Werth von i_1 sich schnell einem Grenzwerthe

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{W}$$

nähern, der von den Änderungen im Rheochord völlig unabhäng ist.“

Diese Deductionen Luchsinger's sind sämmtlich falsch, wie eine einfache Überlegung ergibt. Dächte man daran, dass in Luchsinger's

Wird w_I oder w_{II} oder werden beide $= \infty$, so fält AO mit der Abscissenaxe zusammen. In beiden Fällen existirt kein Strom in dem Zweige neben dem Rheochord.

Für $w_I = 0$ wäre

$$I_{II} = \frac{E}{w_{II}}$$

und für $w_{II} = 0$

$$I_{II} = \frac{E}{w_I}.$$

Es ergibt sich aber aus der voranstehenden Darstellung für unseren Reizapparat sofort die Folgerung, dass uns derselbe eine sehr ausgedehnte und feine Abstufung des Inductionsstromes ermöglicht, da wir aus einer Reihe von Curven, für den primären

---

Text die Worte „W und w_1 sehr gross" einen Druckfehler enthalten und es vielmehr heissen sollte: sehr klein, dann ist die reducirte Gleichung ein Nonsens.

Reducirt man aber unter der Voraussetzung, welche Luchsinger macht, dann wird man nicht auf die Gleichung

$$i_1 = \frac{\varepsilon w_2}{W w_1},$$

sondern auf die Gleichung

$$i_1 = \frac{\varepsilon w_2}{\infty} \text{ oder } i_1 = 0$$

geführt, was mit unseren obigen Angaben übereinstimmt.

Wie man auf den Grenzwerth

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{W},$$

den Luchsinger weiterhin anführt und welchen wir mit

$$I_{II} = \frac{E}{w_I}$$

bezeichnet haben, kommen würde, ist oben auseinander gesetzt.

Was aber für das Verfahren Luchsinger's gilt, das ist in dem früher angeführten Hyperbel-Gesetze, welches Luchsinger nicht erwähnt, enthalten, und aus diesem folgt allerdings, dass über eine gewisse Grenze hinaus eine weitere Steigerung der Rheochordlängen ohne Einfluss auf die Intensität in der Nebenleitung ist. Das ist der Fall, wenn die Hyperbel der Assymptote sich schon sehr angenähert hat.

Strom leicht eine bestimmte und von dieser wieder das unseren Zwecken passendste Stück der Hyperbel auswählen können.

Wir vermögen so uns dem Widerstande und dem Grade der Erregbarkeit der in den Inductionskreis eingeschalteten Theile leicht anzupassen, und im gegebenen Falle die Abstufung des Inductionsstromes in entsprechender Weise vorzunehmen. Man muss aber dabei sowohl für den Strom der Hauptrolle des Inductoriums als auch für den Strom des Hammerwerks Elemente anwenden, welche für längere Dauer völlig constant sind.

Mit dem besten Erfolge habe ich für beide Ströme, die jüngst von mir[1] beschriebenen Zink-Kupferelemente angewendet. Ich habe den in der citirten Abhandlung angeführten Regeln für den Gebrauch dieser Elemente nur hinzuzufügen, dass es gut ist, das Zink von Zeit zu Zeit an seiner unteren Seite am besten mit einer Bürste rein zu putzen und habe ich es, um die Erneuerung der Zinkplatte auf längere Zeit hinauszuschieben, auch vortheilhaft gefunden, die Zinkplatten um das Doppelte und Dreifache dicker giessen zu lassen, als meinen damaligen Angaben entspricht.

Ich habe es nicht unterlassen, meinen Reizapparat einer speciellen experimentellen Prüfung zu unterwerfen. Da mir dieselbe einiges Interesse zu verdienen scheint und spätere Schlüsse auf dieselbe basirt werden sollen, will ich dieselbe hier mittheilen.

Es wird das auch die mit dem Reizapparate erhaltenen Resultate gegen Einwürfe möglichst sicherstellen.

1. Ich schaltete in die Zweigschliessung neben dem Rheochord die Spirale eines empfindlichen Spiegelgalvanometers *g* (Fig. IX) und an einer anderen Stelle *c* einen Schlüssel ein.

Als solchen benützte ich, da es mir nicht auf die Beobachtung der Ablenkung bei dauernder Schliessung, sondern vielmehr auf die Beobachtung des Erfolges kurz vorübergehender Stromschlüsse ankam, den von mir an einem anderen Orte[2] schon beschriebenen Manometerschlüssel, der aber in beiden

[1] Untersuchungen aus dem Institute für Physiologie und Histologie in Graz. 3. Heft. Leipzig 1873, p. 295.

[2] L. c. 3. Heft, p. 301, Fig. 2.

Schenkeln nur je einen Leitungsdraht besass, im übrigen in der (l. c.) angeführten Weise gehandhabt wurde.

Es wurde also analog den Vorgängen am Inductionsapparate der Strom rasch einmal geschlossen und wieder geöffnet. Als Element diente eines der oben angeführten, und wurde mittelst eines Rheostaten in der Hauptleitung der Strom vorerst so regulirt, dass, wenn der Rheochordschieber auf 0 sich befand, beim Schliessen der Magnet völlig ruhig blieb.

Ich beobachtete dann nacheinander die Ausschläge bei verschiedener Einstellung des Rheochordschiebers.

Noch habe ich zu bemerken, dass zu Anfang des Versuches der Magnet auf eine bestimmte Ruhelage eingestellt wurde, welche, wenn sich dieselbe während des Versuches ein wenig änderte, durch feine Drehung des Scalenfernrohres um die verticale Axe vor jeder Ablesung wieder aufgesucht wurde.

Es konnte das ohne Nachtheil geschehen und wird dadurch die Übersichtlichkeit der Aufzeichnungen erhöht. Die Scala befand sich in einer Entfernung $a = 2{\cdot}15$ Meter vom Spiegel. Wegen der Kleinheit der Ablenkungswinkel des Spiegels, welche bei den grössten Ausschlägen, die beobachtet wurden, noch nicht 1° betrugen, soll in bekannter Weise $\frac{n}{a} = \text{tang}\ 2\varphi$ gleich $2\ \text{tang}\ \varphi$ gesetzt werden und die Stromintensität direct proportional der beobachteten Anzahl Theilstrichen n, um welche das Spiegelbild der Scala verschoben wurde.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate von zehn Versuchsreihen, welche sich über 6 Tage erstreckten. Während derselben blieb die Versuchsanordnung immer in derselben Weise erhalten, nur wurde das Kupfervitriol-Reservoir des Elementes nach Beendigung der einzelnen Versuchsreihen gesperrt und das Element metallisch geschlossen; vor Beginn jeder Versuchsreihe aber das Reservoir wieder geöffnet und gewartet, bis die Kupfervitriollösung ihre an der Kupferspirale leicht abzulesende gewöhnliche Höhe wieder erreicht hatte.

Tabelle I.

Versuchs-nummer	Stöpsel-rheostat	Rheochord auf	Galvanometer			Versuchstag
			Ruhelage	Ausschlag bis	Verschiebung d. Spiegelbildes in Theilstrichen der Scala	
I	400	50	510	497	13	Erster Nachmittag
		100	„	489	21	
		200	„	477	33	
		400	„	465	45	
		600	„	455	55	
		1000	„	448	62	
II	400	50	„	497	13	Zweiter Vormittag
		100	„	489	21	
		200	„	479	31	
		400	„	466	44	
		600	„	458	52	
		1000	„	449	61	
III	400	50	500	486	14	Zweiter Nachmittag
		100	„	480	20	
		200	„	467	33	
		400	„	454	46	
		600	„	347	53	
		1000	„	434	63	
IV	400	50	510	497	13	Dritter Vormittag
		100	„	489	21	
		200	„	477	33	
		400	„	465	45	
		600	„	457	53	
		1000	„	448	62	
V	400	50	„	497	13	„
		100	„	489	21	
		200	„	478	32	
		400	„	463	47	
		600	„	455	55	
		1000	„	446	64	

Versuchs-nummer	Stöpsel-rheostat	Rheochord auf	Galvanometer Ruhelage	Ausschlag bis	Verschiebung d. Spiegelbildes in Theilstrichen der Scala	Versuchstag
VI	400	50	500	487	13	Vierter Vormittag
		100	„	480	20	
		200	„	469	31	
		400	„	456	44	
		600	„	446	54	
		1000	„	437	63	
VII	400	50	„	488	12	„
		100	„	479	21	
		200	„	469	31	
		400	„	454	46	
		600	„	447	53	
		1000	„	440	60	
VIII	400	50	„	486	14	Fünfter Vormittag
		100	„	479	21	
		200	„	468	32	
		400	„	455	45	
		600	„	446	54	
		1000	„	437	63	
IX	400	50	510	498	12	Fünfter Nachmittag
		100	„	491	19	
		200	„	479	31	
		400	„	467	43	
		600	„	456	54	
		1000	„	448	62	
X.	400	50	500	488	12	Sechster Vormittag
		100	„	481	19	
		200	„	469	31	
		400	„	457	43	
		600	„	448	52	
		1000	„	439	61	

Die Mittelwerthe der Verschiebungen des Spiegelbildes aus den zehn Beobachtungsreihen und die denselben entsprechenden Ablenkungswinkel und deren Tangenten sind.

Tabelle II.

Rheochordschieber auf	50	100	200	400	600	1000
Mittel von n	12·9	20·5	32·0	44·8	53·5	62·1
φ	10'18·5"	16'23"	25'34·5"	35'53·5"	42'45·5"	49'35"
tang φ	0·0029	0·0048	0·0074	0·0104	0·0124	0·0144

Wir werden uns dem oben ausgesprochenen Gesetze nur annähern, denn, abgesehen von den übrigen Fehlerquellen ist für unsere Versuche mit dem Galvanometer wegen des Schliessungsextrastromes[1]

$$I_{II} = \frac{E w_{III}}{(w_I + w_{II}) w_{III} + w_I w_{II}} \left(1 - e^{-\frac{[(w_I + w_{II}) w_{III} + w_I w_{II}] t}{(w_I + w_{III}) p}}\right)$$

wo t die Stromdauer und p das Potentiale der Spirale auf sich selbst bedeutet, wenn wir auch dafür sorgen, dass t in allen Versuchen gleich bleibt, so erscheint noch w_{III}, und zwar nicht als gemeinschaftlicher Faktor in Zähler und Nenner des Exponenten.

Passen wir aber die Resultate unserer Versuche direct der Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel (Fig. X) an. Für das Stück $0A$ einer solchen, deren halbe grosse Axe 200 ist und wobei die Coordinaten des Mittelpunktes

$$0B = -259 \cdot 74$$
$$0'B = \quad 77 \cdot 00$$

sind, finden wir nach

$$x'y' = 20000,$$

[1] Helmholtz, Über die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten Ströme. Poggend. Annalen Bd. LXXXIV, p. 524.

wenn wir y' von dem Werthe $0B = 259 \cdot 74$ an um 50, 100, 200 etc. wachsen lassen und die erhaltenen x' von dem Werthe $0'B = 77 \cdot 00$ abziehen für die Werthe von

$x =$	50,	100,	200,	400,	600,	1000
				die berechneten Werthe von		
$y = 0'B - x' =$	12·43,	21·41,	33·50,	46·72,	53·74,	61·13
			was verglichen mit den beobachteten			
$n =$	12·90,	20·50,	32·00,	44·80,	53·50,	62·10
die Unterschiede	—0·47,	+0·91,	+1·50,	+1·92,	+0·24,	—0·97

ergibt.

Ausser dieser Ubereinstimmung ist mir aber zur Rechtfertigung des speciellen Verfahrens bei den später mitzutheilenden physiologischen Versuchsreihen noch von Wichtigkeit, dass man sich einmal an einer wie oben substituirten Curve des genaueren über die Änderungen orientire, welche die Stromstärke im Zweige neben dem Rheochord erleidet; wenn man sich z. B. den Rheochordschieber von 0 an um je zwei und zwei Centimeter der Scale [1] nach aufwärts verschoben denkt.

Man wird dabei das folgende erhalten:

von 0—18 Centimeter nimmt der Zuwachs von y für je 2 Centim. rasch von 4—2 ab, und zwar erfolgt anfangs die rascheste Abnahme;

von 18—38 Centimeter nimmt der Zuwachs von y für je 2 Ctm. successive von 1·9 —1·0 ab, und zwar ist immer der folgende Zuwachs ungefähr um 0·01 kleiner;

von 38—100 Centimeter nimmt der Zuwachs von y für je 2 Ctm. successive von 0·9—0·2 ab, und zwar ist immer der folgende Zuwachs nicht um ein Hundertel kleiner als der vorausgehende.

Von	0— 100	wächst	y	von	0—61·22		
„	100— 200	„	„	„	—68·29	um	7·05
„	200— 300	„	„	„	—71·00	„	2·72
„	300— 500	„	„	„	—73·35	„	2·34
„	500—1000	„	„	„	—75·21	„	1·86
„	1000—2000	„	„	„	—76·18	„	0·97

dann sind die Rheochordwiderstände sämmtlich verbraucht.

[1] i. e.: 20 Rheochordeinheiten.

Mit dem ganzen dritten Tausend unserer Rheochord-Einheiten erzielen wir aber nur mehr den halben Zuwachs, den y schon durch die ersten zwanzig Rheochord-Einheiten erfährt.

Das Urtheil über die Leistungsfähigkeit des Rheochordes bei richtiger Handhabung des Schiebers und der Stöpseleinrichtung für zwischen möglichst weiten Grenzen liegende, feine Stromabstufungen ergibt sich aus den angeführten Betrachtungen von selbst.

2. Die nachfolgende Tabelle enthält noch Versuche ähnlich den früher angestellten, aber bei verschiedener Einstellung des Rheostaten in der Hauptleitung.

Tabelle III.

Versuchsnummer	I			II			III			Verhältniss der Rheostaten-Widerstände u. der Ablenkungen in d. Versuchen I, II,	II, III
Stöpselrheostat	900			400			300			2·25	1·33
Rheochord auf	Galvanometer									—	—
	Ruhelage	Ausschlag bis	Ablenkung in Theilstrichen	Ruhelage	Ausschlag bis	Ablenkung in Theilstrichen	Ruhelage	Ausschlag bis	Ablenkung in Theilstrichen		
50	500	494	6	500	487	13	500	482	18	2·16	1·38
100	„	490	10	„	479	21	„	471	29	2·10	1·38
200	„	486	14	„	468	32	„	458	42	2·28	1·31
400	„	480	20	„	455	45	„	440	60	2·25	1·33
600	„	476	24	„	447	53	„	429	71	2·21	1·34
1000	„	472	28	„	438	62	„	416	84	2·21	1·35

Es ergibt sich daraus der Nutzen des Rheostaten, den wir später für unsere Versuche ziehen wollen.

3. Ich habe endlich noch mittelst einer Galvanometer-Rolle aus sehr dünnem Draht und hoher Windungszahl (physiologische Rolle), mit der ich die Nebenrolle meines Reizapparates schloss, die Öffnungsschläge untersucht, während der Rheochordschieber im primären Kreise in verschiedener Weise eingestellt wurde.

Zu dem Ende wurde bei *g*, Fig. IX, die Hauptrolle eingeschaltet, über dieselbe die Nebenrolle *I* geschoben. In dem Kreise der letzteren befand sich das Galvanometer *g'*, ferner ein du Bois'scher Schlüssel bei *c'*. Die übrige Anordnung blieb wie in Fig. 9. Der Schlüssel bei *c* wurde, während *c'* eingelegt war, so gehandhabt, dass das Quecksilber in dem einen Schenkel so weit emporgehoben wurde, dass die Platinspitze eben in dasselbe eintauchte. Die Einstellung der Quecksilberkuppe wurde immer auf eine bestimmte Marke vorgenommen.

War so der Schliessungsschlag abgeblendet, dann wurde *c'* geöffnet und das Quecksilber in *c* fallen gelassen; es erfolgte der Öffnungsinductionsschlag.

Die folgende Tabelle enthält die so gewonnenen Resultate.

Tabelle IV.

Versuchs-nummer	Stöpsel-rheostat	Rheochord auf	Galvanometer			Versuchstag
			Ruhelage	Ausschlag	Ablenkung in Theilstrichen	
I	5	50	500	507	7	Erster Vormittag
		100	„	512	12	
		300	„	519	19	
		600	„	524	24	
		1000	„	526	26	
II	5	50	„	508	8	Erster Nachmittag
		100	„	512	12	
		300	„	519	19	
		600	„	524	24	
		1000	„	526	26	

Versuchs-nummer	Stöpsel-rheostat	Rheochord auf	Galvanometer			Versuchstag
			Ruhelage	Ausschlag	Ablenkung in Theilstrichen	
III	5	50	500	508	8	Erster Nachmittag
		100	„	512	12	
		300	„	519	19	
		600	„	524	24	
		1000	„	526	26	
IV	5	50	„	507	7	Zweiter Vormittag
		100	„	512	12	
		300	„	520	20	
		600	„	524	24	
		1000	„	526	26	
V	5	50	„	508	8	„
		100	„	512	12	
		300	„	519	19	
		600	„	524	24	
		1000	„	526	26	
VI	5	50	„	508	8	Dritter Vormittag
		100	„	512	12	
		300	„	520	20	
		600	„	524	24	
		1000	„	526	26	
VII	8	50	„	505	5	Dritter Nachmittag
		100	„	508	8	
		300	„	514	14	
		600	„	518	18	
		1000	„	519·5	19·5	
VIII	12	50	„	514	14	„
		100	„	520	20	
		300	„	534	34	
		600	„	540	40	
		1000	„	545	45	

4. Wir müssen nun noch die Prüfung der früher beschriebenen Unterbrechungsvorrichtung für den primären Strom vornehmen.

Ich habe schon früher angeführt, dass der Gang jenes Hammerwerkes, welches ich als Unterbrecher des inducirenden Stromes benützte, ein sehr regelmässiger ist. Mittelst der zwei gegenüberliegenden Schrauben und der Spiralfedern lässt sich derselbe, wenn man den Hammer nur mittelst eines Elementes von gleichbleibender Wirkung in Bewegung setzt, sehr gut reguliren.

Zur Prüfung desselben brachte ich an dem Hammerstiel eine schreibende Spitze an und liess die Bewegung des Hammers auf eine berusste Walze anschreiben. Die bei verschiedener Frequenz erhaltenen Curven sind in Fig. XI und XII dargestellt, und zwar nach photographisch vervielfältigten Originalcurven.

In Fig. XI, welche die Hammerfrequenz darstellt, mit welcher ich meine Versuche anstellte und welche mit Leichtigkeit immer wieder zu finden war, ist auch die gleichzeitig erhaltene Schrift einer chronographischen Gabel von König enthalten, die 100 Schwingungen in der Sekunde gab.

Wenn wir uns an die über der Stimmgabelschrift befindliche Hammercurve, die wie auch die folgenden von rechts nach links zu lesen ist, halten, so finden wir, dass auf 0·81 Sekunden 22 Schwingungen des Hammers kommen. Für die zwei darüberliegenden, unmittelbar darauf angeschriebenen Hammercurven kommen für die eine auf 0·8025 Sekunden, für die andere auf 0·8075 Sekunden 22 Schwingungen. Im Mittel kommen also auf 0·8066 Sekunden 22 Schwingungen, oder auf die Sekunde 27·27 Schwingungen des Hammers, was 54·54 abwechselnd entgegengesetzt gerichteten Inductionsschlägen in der Sekunde entspricht.

Durch eine Reihe von Versuchen wie der vorausgehende überzeugte ich mich, dass ich, wie ich auch vorher die Schrauben des Unterbrechers verstellen mochte, auf 26—28 Schwingungen in der Sekunde immer wieder genau einstellen konnte.

Den Hammercurven sind aber noch weitere Details zu entnehmen, wie aus den Fig. XI und XII ersichtlich ist. Offenbar entsprischt in Fig. XI *a* dem Moment, wo die untere Halske'sche Feder auf die Contactspitze trifft, *b* dem Moment, wo der

Anker den Elektromagnet wieder verlässt, in *c* aber wird der untere Contact wieder gelöst sein.

Eine Schwingung des Hammers dauert im Mittel 0·0368 Sekunden und dabei entfallen für den Contact 0·0225 Sekunden. Das Intervall zwischen Schliessung und Öffnung beträgt also 0·0225 Sekunden, das Intervall zwischen Öffnung und darauffolgender Schliessung aber 0·0143 Sekunden. Für den oberen Contact, der aber kein besonderes Interesse für uns hat, haben *a'*, *b'*, und *c'* in Fig. XI dieselbe Bedeutung, wie *a*, *b* und *c* für den unteren.

Dieselben bemerkenswerthen Punkte erscheinen auch in den höheren Frequenzen entsprechenden Curven der Fig. XII noch ebenso regelmässig. Nur in der einer sehr niederen Hammerfrequenz entsprechenden Curve der Fig. XII, wo der Hammer zwischen weit von einander geschraubten Contactspitzen in regelmässigem Tacte hin- und herging, sind sie nicht mehr enthalten, dort geht vielmehr der Hammer in einer Reihe von regelmässigen kleinen Schwingungen nieder.

Nach den gemachten Erfahrungen wird man aber über den regelmässigen Gang unseres Unterbrecherwerkes nicht mehr im Zweifel sein können.

5. Ich habe endlich den Reizapparat, ehe ich an die Versuche ging, noch direct physiologisch erprobt und zwar in zweierlei Weise.

Erstens war es mir von Werth, einen unmittelbaren Nachweis für die gleiche oder nahezu gleiche physiologische Wirkung der Öffnungs- und Schliessungs-Inductionsschläge meiner Reizvorrichtung zu haben.

Zweitens wollte ich den Verlauf kurz dauernder, tetanischer Contractionen eines Muskels, wenn derselbe successive durch die abgestuften Reize des Apparates in bestimmten Intervallen vom Nerven aus erregt wurde, näher kennen lernen.

Für beide Versuchsreihen diente mir eine Vorrichtung, welche ich als rotirenden Schlüssel an einem späteren Orte dieser Abhandlung beschreiben will. Ihrem Wesen nach ist dieselbe eine gut leitende Nebenschliessung, welche von demselben Uhrwerke in Bewegung gesetzt wird, welches den Cylinder des Myographions bewegt und welche in bestimmten Intervallen einfällt und wieder entfernt wird.

Eingeschaltet wurde dieselbe bei der ersten Versuchsreihe an Stelle des Hammers, Fig. VIII, der dann sammt der für ihn bestimmten Kette entfällt, während die übrige Anordnung dieselbe bleibt wie in Fig. VIII, in welcher *S* den Rheostaten, *R* das Rheochord bedeutet. Bei der zweiten Versuchsreihe dagegen ist die Anordnung vollkommen der Fig. VIII entsprechend, und nur noch überdies der rotirende Schlüssel bei *C* in den Inductionskreis eingeschaltet.

In beiden Fällen wurden Platinelektroden von später zu beschreibender Form, die mit der Inductionsrolle *N*, Fig. VIII, in Verbindung standen, an den *N. ischiadicus* gelegt.

a) In den Figuren XIII u. XIV sind die mittelst der ersten Versuchsanordnung gewonnenen und einzelnen Öffnungs- und Schliessungsschlägen entsprechenden Zuckungen des Gastrocnemius vom Frosche mit Marey's Myographion aufgezeichnet. Dabei erfolgte immer zuerst ein Öffnungs- oder Schliessungsschlag, davon durch ein bestimmtes Intervall getrennt, ein Schliessungs- oder Öffnungsschlag, dann in derselben Ordnung die folgenden. Die aufeinanderfolgenden Schläge sind mit fortlaufenden Nummern bezeichnet und fallen, je nachdem die Reihe mit einem Öffnungs- oder Schliessungsschlag beginnt, auf die ersteren oder auf die letzteren alle ungeraden Zahlen von 1—29, und umgekehrt alle geraden Zahlen von 2—30 auf die entsprechenden ungleich namigen Inductionsschläge, und zwar entsprechen diesen Figuren die in der folgenden Tabelle enthaltenen Versuche.

Der erste derselben ist an einem durch vorausgehende Versuche schon etwas ermüdeten Muskel angestellt und drückt sich das darin aus, dass die Zuckungscurve auseinander gezogen erscheint[1].

Der zweite Versuch betrifft einen ganz frischen, vollkommen leistungsfähigen Muskel. Beide Versuche sind aus einer Reihe ganz übereinstimmender ausgewählt.

---

[1] Vergl. O. Funke, Über den Einfluss der Ermüdung auf den zeitlichen Verlauf der Muskelthätigkeit. Freiburger Programm 1873, p. 26.

Tabelle V.

Versuchs-nummer	Stöpsel-rheostat	Rheochord-schieber auf Ctm.	Nummer der Öffnungs-schläge	Nummer der Schliessungs-schläge	Höhe der Zuckungscurve, die ein Vielfaches der Muskelverkürzung ist, in Millimetern	Anmerkung
I	20	9·5	1	2	13·5	Der Werth für die Höhe der Curve über der Abscisse ist das Mittel aus einer Reihe von wiederholten Messungen mittelst Fernrohr u. Mikrometer. Die Resultate der einzelnen Messungen weichen nur in den Zehnteln sowohl für die Öffnungs-, als auch für die Schliessungsschläge bald nach oben, bald nach unten von dem Mittel ab.
Fig. 13		11·5	3	4		
		13·5	5	6		
		15·5	7	8	14·5	
		17·5	9	10		
		19·5	11	12		
		21·5	13	14		
		23·5	15	16	14·8	
		25·5	17	18		
		27·5	19	20		
		29·5	21	22		
		31·5	23	24		
		33·5	25	26		
		35·5	27	28		
		37·5	29	30	15·1	
II	20	17·5	2	1	11·70	
Fig. 14		19·5	4	3		
		21·5	6	5		
		23·5	8	7	12·30	
		25·5	10	9		
		27·5	12	11		
		29·5	14	13		
		31·5	16	15	12·75	
		33·5	18	17		
		35·5	20	19		
		37·5	22	21		
		39·5	24	23		
		41·5	26	25		
		43·5	28	27		
		45·5	30	29	13·75	

Wir können aus diesen Versuchen entnehmen, dass eine erhebliche Differenz zwischen der physiologischen Wirkung der Öffnungs- und Schliessungsschläge nicht vorhanden ist.

Liesse sich gegen die Genauigkeit unseres Messverfahrens auch eine Einwendung erheben, wenn es sich nur um die Vergleichung zweier zusammengehöriger, ungleichnamiger Schläge handeln würde, so entfällt diese Einwendung doch bei der Betrachtung der ganzen Reihe der Öffnungs- und Schliessungsschläge sofort, denn wenn sich so feine Unterschiede in der Wirkung der aufeinanderfolgenden gleichnamigen Schläge noch nachweisen lassen, wie das bei unseren Versuchen der Fall ist, so müssten auch nur einigermassen erhebliche Differenzen in der physiologischen Wirkung der ungleichnamigen Schläge in einer ganz deutlichen und unzweifelhaften Weise hervortreten.

b) Die Figuren XV, XVI, XVII u. XVIII zeigen bei der zweiten Versuchsanordnung erhaltene, kurze aber in bestimmten Intervallen, bei verschiedener Reizstärke sich folgende tetanische Contractionen des Gastrocnemius vom Frosch, ebenfalls mit Marey's Myographion gezeichnet, und zwar entsprechen die Curven den in der nachfolgenden Tabelle enthaltenen Versuchen.

An jedem Präparate wurde zuerst bei nicht angedrücktem Hebel, durch langsames Abziehen des Rheochordschiebers von 0 an, diejenige Einstellung des Schiebers aufgesucht, bei welcher eine Zuckung eben sich bemerken liess, dann wurde diese angeschrieben und darauf in der Zeit, während welcher die rotirende Nebenschliessung des secundären Kreises eingefallen war, der Schieber auf jene Theilstriche eingestellt, welche in der Tabelle angegeben sind.

Wieder diente, wie zu allen bisher angeführten Versuchsreihen, was ich hier ausdrücklich noch einmal bemerke, eines der bezeichneten Elemente für den primären Strom. Ein anderes solches Element setzte den Hammer in Bewegung. Ich will aber, indem ich das betone, auch zugleich hervorheben, dass alle die vorausgehenden Versuche als ebenso viele Prüfsteine für die unter allen Umständen so grosse Constanz[1] der verwen-

---

[1] Vergl. auch: Untersuchungen etc. l. c. p. 300.

deten Elemente, auf welche bei unseren Versuchen fast alles ankommt, zu betrachten sind und dass schon aus diesem Grunde den mitgetheilten Versuchen ein nicht zu unterschätzender Werth zukommt.

Tabelle VI.

Versuchs-nummer	Stöpsel-rheostat	Rheochord-schieber auf Ctm.	Nummer der Reizung	Anmerkung
I	40	9·5	1	In allen Versuchen folgten die Reizungen in Intervallen von circa 62½ Sekunden aufeinander, und dauerte jede Reizung in I nahe an 3 Sekunden, in II, III nnd IV etwas über eine Sekunde an.
Fig. 15		11·5	2	
		14·5	3	
		24·5	4	
		44·5	5	
		84·5	6	
II	40	17	1	
Fig. 16		19	2	
		22	3	
		32	4	
		52	5	
		92	6	
III	40	10	1	
Fig. 17		12	2	
		15	3	
		25	4	
		45	5	
		85	6	
IV	40	13·5	1	
Fig. 18		15·5	2	
		18·5	3	
		28·5	4	
		48·5	5	
		88·5	6	

Eines weiteren Commentares bedürfen die in der Tabelle enthaltenen Versuche vorläufig nicht.

Nur muss ich bemerken, dass die in der letzten Tabelle mitgetheilten Versuche schon vollständig analog jenen sind, welche mir zur Feststellung der Thatsache dienten, dass functionell verschiedene Nervmuskelapparate eine verschiedene Erregbarkeit besitzen.

IV. Erste Versuchsreihe.

Die erste Reihe meiner Versuche stellte ich aus besonderen Gründen, deren Berücksichtigung sich mir aber bald als überflüssig erwies, mit Elektroden an, welche den von Kühne [1] einmal zu bestimmten Zwecken benützten nachgebildet waren, nur befestigte ich dieselben an einem passenden Gestelle. Mit den Klemmen dieser Elektroden, Fig. XIX, wurden die Enden der Inductionsspirale, Fig. VIII, verbunden. Die letztere Zeichnung vergegenwärtigt die ganze Versuchsanordnung.

Der aus mehrfachen Lagen bestehende Filtrirpapierpausch der Elektroden, Fig. XIX, war mit 1°/₀ ClNa-Lösung getränkt. Auf dieselben wurde der ganze Verlauf des *N. ischiadicus* von der Theilungsstelle an der Länge nach aufgelegt und der Nerv mit einer kleinen, feuchten Kammer, Fig. I, II, III *g h*, bedeckt. Diese Kammer, welche auch zu allen weiteren Versuchen dienen wird, ist von einem der Länge nach aufgeschliffenen Glasröhrchen gebildet, die Enden des so erhaltenen Deckels sind mit Siegellackwänden verschlossen, deren eine nur einen seichten Eindruck am unteren Rande zum Durchlassen des Nerven besitzt.

Das Bein, dessen Nerv in der eben berührten Weise auf den Elektroden lag, war in der unter II beschriebenen Weise aufgehängt und fixirt, und in passender Erhöhung und Entfernung so aufgestellt, dass es sich in den in den Figuren I, II und III dargestellten Ansichten fortwährend vor den Augen des am Schlüssel und Rheochord beschäftigten Experimentators befindet.

Ich werde nun die Resultate dieser Versuche, die ich, da sie in allen wesentlichen Punkten mit meinen später angestellten

---

[1] Über die Wirkung des amerikanischen Pfeilgiftes. Reichert und du Bois Archiv. Jahr 1860, p. 490.

Versuchen übereinstimmen, nicht verloren geben will, hier mittheilen. Nur die Einrichtung der Electroden will ich als nicht nachahmenswerth bezeichnet haben. Es sind immer eine Reihe von Versuchen an demselben Schenkel angestellt worden.

Wie bei den im vorigen Abschnitte zuletzt angeführten Tetanusversuchen wurde auch hier zuerst bei einem bestimmten Rheostatenwerth durch langsames Abziehen des Rheochordschiebers die Entfernung des letzteren vom 0-Punkte aufgesucht, bei welcher überhaupt eine Wirkung zu beobachten war, dann wurde der Schieber von 5 zu 5 Centimeter nach aufwärts eingestellt und wieder die Wirkung beobachtet. Die näheren Details und einzelnen Abweichungen von dem im Allgemeinen eingehaltenen Verfahren wird man aus den Tabellen entnehmen. Nur in Bezug auf die Handhabung des Schlüssels bei *C*, Fig. VIII, welcher ein du Bois'scher Schlüssel war, muss ich noch einiges bemerken. Ich richtete mich so ein, dass bei jeder, auf eine bestimmte Einstellung des Rheochordschiebers fallenden Reizung, der Schlüssel etwa 1 Sekunde geöffnet blieb. Etwa 3 Sekunden wurden verwendet, um das Resultat zu notiren, 5 Sekunden, um den Schieber neu einzustellen.

Jeder Versuch nimmt also 9 Sekunden in Anspruch, und betrug dabei das Intervall zwischen den einzelnen Reizungen 8 Sekunden.

Es wäre mir ganz leicht gewesen, das Einfallen und Ausheben der Nebenschliessung *C*, Fig. VIII, durch ein Uhrwerk besorgen zu lassen.

Allein eine so grosse Regelmässigkeit ist kein absolutes Erforderniss und da ich das Einstellen des Rheochordschiebers doch mit der Hand besorgen musste und überdies die gleich später zu erwähnenden gelegentlichen Abänderungen des gewöhnlichen Versuchsverfahrens eine rotirende Nebenschliessung nur als Belästigung erscheinen liessen, so dirigirte ich auch den Schlüssel lieber mit der Hand.

Tabelle VII.

Bezeichnung des Froschschenkels	Nummer der Versuche	Stöpselrheostat	Rheochordschieber auf Ctm.	Erfolg
A	I	20	10	Beginn der Zuckung in den Zehen.
			15	Beugung.
			20	Beugung.
			25	Schwächere Beugung.
			30	Streckung
			35	Stärkere Streckung.
	II	20	12—40 continuirlich abgezogen	bei 12 beginnen die Zuckungen und gehen durch anfangs wachsende, dann abnehmende Beugung in anfangs schwächere, dann immer stärkere Streckung über.
	III	20	14	Beginn.
			19	Beugung.
			24	Beugung.
			29	Starke Beugung.
			34	Schwächere Beugung.
			39	Desgleichen.
			44	Desgleichen.
			49	Streckung.
			54	Stärkere Streckung.
	IV	20	21	Beginn.
			26	Beugung.
			31	Beugung.
			36	Beugung.
			41	Beugung.
			46	Schwächere Beugung und starkes Auseinanderspreizen der Zehen.
			51	Schwache Beugung.
			56	Streckung.
			61	Streckung.

Bezeichnung des Froschschenkels	Nummer der Versuche	Stöpselrheostat	Rheochordschieber auf Ctm.	Erfolg
A	V	20	24·5	Beginn.
			29·5	Schwache Beugung.
			34·5	Schwache Beugung.
			39·5	Schwache Beugung.
			44·5	Schwache Beugung und Spreizen der Zehen.
			49·5	Schwache Streckung.
			54·5	Streckung.
			59·5	Streckung.
			64·5	Starke Streckung.
B	I	20	13·5	Beginn.
			18·5	Schwache Zuckung.
			23·5	Schwache Beugung.
			28·5	Schwache Beugung.
			33·5	Stärkere Beugung.
			38·5	Beugung.
			43·5	Beugung.
			48·5—113·5	Die Beugung dauert fort bei allen Einstellungen des Schiebers von 5 zu 5.
	II	10	11·5	Beginn mit schwacher Zuckung.
			16·5—76·5	Beugung anfangs schwächer, dann zu-, dann wieder abnehmend bei allen Einstellungen von 5 zu 5.
			81·5	Zuckende Beugungen u. Streckungen gleichzeitig, eine Art Kampf um die Oberherrschaft zwischen beiden Muskelgruppen.
			86·5	Dasselbe.
			91·5	Dasselbe.
			96·5	Streckung.
			101·5	Streckung.
			106·5	Starke Streckung.

Bezeichnung des Froschschenkels	Nummer der Versuche	Stöpselrheostat	Rheochordschieber auf Ctm.	Erfolg
B	III	5	9	Beginn mit schwacher Zuckung.
			14	Schwache Zuckung unbestimmt.
			19	Beugung.
			24	Beugung.
			29	Schwächere Beugung.
			34	Streckung.
			39	Streckung.
	IV V VI VII VIII IX	5	continuirlich abgezogen	Bei allen diesen Versuchen erfolgte der Übergang durch anfangs schwächere, dann stärkere Beugung in Streckung. Es werden aber bei allen späteren Versuchen die Beugungen zusehends schwächer und sind zuletzt nur noch schwach, während noch ausgiebige Streckung erfolgt.
C	I	20	12·5	Beginn.
			17·5	Schwache Beugung.
			22·5	Ebenso.
			27·5—152·5	Beugung bei der Einstellung des Rheochords von 5 zu 5, und zwar wächst die Beugung, bis sie bei 97·5 sehr stark wird, so bleibt bis 122·5, dagegen von da an abnimmt bis 152·5.
			157·5—197·5	Wachsende Streckung bei der Einstellung von 5 zu 5.
	II	10	19	Beginn.
			24	Schwache Beugung.
			29	Stärkere Beugung.
			34	Beugung.
			39	Beugung.
			44	Beugung.

Bezeichnung des Frosch-schenkels	Nummer der Versuche	Stöpsel-rheostat	Rheochord-schieber auf Ctm.	Erfolg
C	II	10	49	Unbestimmt.
			54	Schwache Streckung.
			59—99	Wachsende Streckung bei der Einstellung von 5 zu 5.
	III	10	23	Beginn.
			28	Schwache Beugung.
			33	Desgleichen.
			38	Desgleichen.
			43	Streckung.
			48	Streckung.
			53—98	Wachsende Streckung bei der Einstellung des Rheochord-schiebers von 5 zu 5.
D	I	10	5·5	Beginn.
			10·5	Zuckende Beugung.
			15·5	Starke Beugung.
			20·5	Sehr starke Beugung.
			25·5	Desgleichen.
			30·5	Beugung mit einzelnen Strekkungen.
			35·5	Desgleichen.
			40·5	Desgleichen.
			45·5	Schwächere Beugung und Ausspreizen der Zehen.
			50·5	Desgleichen.
			55·5	Desgleichen.
			60·5	Streckung.
			65·5	Stärkere Streckung.
			70·5	Desgleichen.
	II	10	7	Beginn.
			12	Beugung.
			17	Stärkere Beugung.
			22	Starke Beugung.
			27	Desgleichen.
			32	Beugung mit Streckzuckungen.

Bezeichnung des Froschschenkels	Nummer der Versuche	Stöpselrheostat	Rheochordschieber auf Ctm.	Erfolg
D	II	10	37	Schwäch. Beugung mit Streckzuckungen.
	\		42	Beugung, dann Streckung und Ausspreizen der Zehen.
			47	Desgleichen.
			52	Strecken mit Ausspreizen der Zehen.
			57	Streckung.
			62	Streckung.
			67	Streckung.
			72	Streckung.
			77	Streckung.
	III IV V VI VII VIII IX X XI XII	10	22 77	Starke Beugung. Starke Streckung. } Es wurde bei diesen Versuchen 10mal hintereinander der Rheochordschieber zuerst auf 22, darauf auf 77, dann wieder auf 22 u. s. w. eingestellt.
	XIII	10	11	Beginn.
			16	Schwache Beugung.
			21	Stärkere Beugung.
			26	Desgleichen.
			31	Desgleichen.
			36	Kampf.
			41	Desgleichen.
			46	Desgleichen.
			51	Streckung.
			56	Streckung.
			61	Stärkere Streckung.
			66	Desgleichen.
			71	Desgleichen.
			76	Desgleichen.
			81	Starke Streckung.

Bezeichnung des Froschschenkels	Nummer der Versuche	Stöpselrheostat	Rheochordschieber auf Ctm.	Erfolg
D	XIV XV XVI XVII XVIII XIX XX XXI XXII XXIII	10	26 81	Beugung. Streckung. } Diese Versuche wurden wie die Versuche III—XII angestellt.
	XXIV	0	12 17—37 42 47—82	Beginn. Bei allen Einstellungen des Schiebers von 5 zu 5 erfolgen Beugungen, welche etwas zunehmen, aber immer schwach bleiben. Kampf. Anfangs schwächer dann immer stärker, endlich sehr stark werdende Streckungen bei allen Einstellungen des Rheochordschiebers von 5 zu 5.
	XXV XXVI XXVII XXVIII XXIX	10	continuirlich abgezogen 0—100	Bei allen Versuchen gehen deutliche aber schwache u. immer schwächer werdende Beugungen den Streckungen voraus, die Streckungen werden aber sehr kräftig, wenn der Schieber bis 100 abgezogen wird.
E	I	15	16·5 21·5 26·5 31·5 36·5 41·5 46·5 51·5 56·5	Beginn. Schwache Beugung. Stärkere Beugung. Desgleichen. Kampf. Desgleichen. Streckung. Streckung. Streckung.

Bezeichnung des Froschschenkels	Nummer der Versuche	Stöpselrheostat	Rheochordschieber auf Ctm.	Erfolg
E	II III IV V VI	15	31·5 56·5	Beugung. } Wie bei *D* III— Streckung. } XII angestellt.
	VII	15	continuirlich abgezogen	Bei 25 beginnend, durch Beugung in Streckung bis 60.
	VIII	15	31 36 41 46 51 56 61	Beginn. Schwache Beugung. Desgleichen. Etwas stärkere Beugung. Kampf. Streckung. Streckung.
	IX	10	22 27 32 37—100	Beginn. Unbestimmt (sehr schwache Beugung). Streckung. Wachsende und zuletzt sehr energische Streckung bei allen Einstellungen des Schiebers von 5 zu 5.
F	I	20	7 12 17 22 27 32 37 42 47 52	Beginn. Beugung. Desgleichen. Schwächere Beugung. Kampf. Desgleichen. Desgleichen. Desgleichen. Streckung. Starke Streckung.
	II	20	17 52	Beugung. Streckung.

Bezeichnung des Froschschenkels	Nummer der Versuche	Stöpselrheostat	Rheochordschieber auf Ctm.	Erfolg
F	III	20	9	Beginn.
			14	Unbest. (schwache Beugung).
			19—29	Beugung bei allen Einstellungen von 5 zu 5.
			34—44	Kampf bei allen Einstellungen von 5 zu 5.
			49—64	Wachsende Streckung bei allen Einstellungen von 5 zu 5.
	IV	20	19	Beginn.
			24	Unbestimmt.
			29	Sehr schwache Beugung.
			34	Kampf.
			39	Schwache Streckung.
			44—99	Wachsende und endlich sehr energische Streckung beim Einstellen von 5 zu 5.
G	I	20	28	Beginn.
			33	Schwache Beugung.
			38	Desgleichen.
			43—63	Wachsende Beugung bei allen Einstellungen von 5 zu 5.
			68	Schwächere Beugung.
			73	Übergang.
			78	Streckung.
			83	Streckung.
	II	20	30	Beginn.
			35—70	Wachsende Beugung bei allen Einstellungen von 5 zu 5, aber alle Beugungen schwächer als in I.
			75	Übergang.
			80	Streckung.

Bezeichnung des Froschschenkels	Nummer der Versuche	Stöpselrheostat	Rheochordschieber auf Ctm.	Erfolg
G	III	20	38	Beginn.
			43—68	Beugung bei allen Einstellungen von 5 zu 5, aber alle noch schwächer als in II.
			73—98	Wachsende und zuletzt starke Streckung beim Einstellen von 5 zu 5.
H	I	20	24	Beginn.
			29	Beugung.
			34—49	Wachsende Beugungen bei allen Einstellungen von 5 zu 5.
			54	Schwächere Beugung.
			59	Kampf.
			64	Streckung.
	II	20	24	Beginn.
			29—44	Wachsende Beugungen bei allen Einstellungen von 5 zu 5.
			49	Schwächere Beugung.
			54	Kampf.
			59	Desgleichen.
			64	Streckung.
	III	20	28	Beginn.
			33—43	Schwache Beugungen bei allen Einstellungen von 5 zu 5.
			48	Übergang.
			53—58	Streckung bei jeder der zwei Einstellungen.
	IV	20	28	Beginn.
			33—48	Schwache Beugungen bei allen Einstellungen von 5 zu 5.
			53	Streckung.
			58—78	Wachsende und zuletzt kräftige Streckung bei allen Einstellungen von 5 zu 5.

Bei einem Durchgehen der eben mitgetheilten Tabelle wird sich sofort als hervortretendes Resultat ergeben, dass die Motoren des Fusses und der Zehen nach vor- und aufwärts, bei schwachen Reizen dagegen die Motoren des Fusses nach rück- und abwärts, bei starken Reizen des gemeinsamen Nervenstammes die Lage der Gliedmasse bestimmen. Im Übrigen unterlasse ich es vorläufig, die in der vorausgegangenen Tabelle enthaltenen Versuche mit weiteren Bemerkungen zu versehen, und werde vorerst in einer bald folgenden zweiten Abtheilung dieser Abhandlung eine Reihe weiterer Versuche mittheilen, und erst dann alle die Folgerungen ziehen, welche sich aus den Versuchen ergeben.

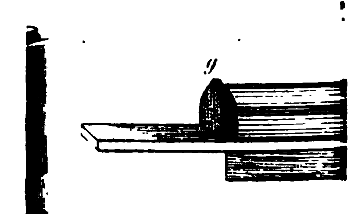
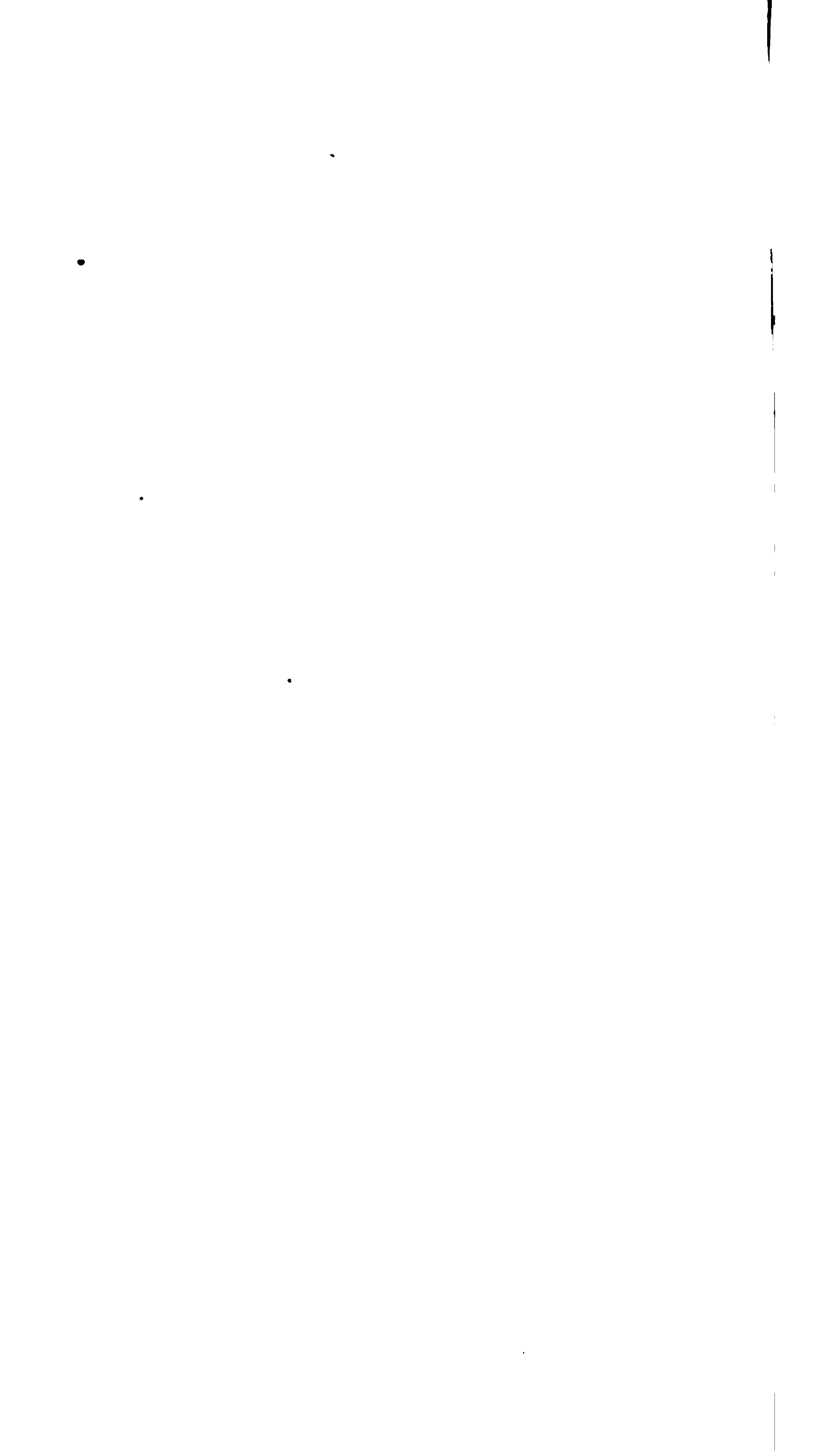
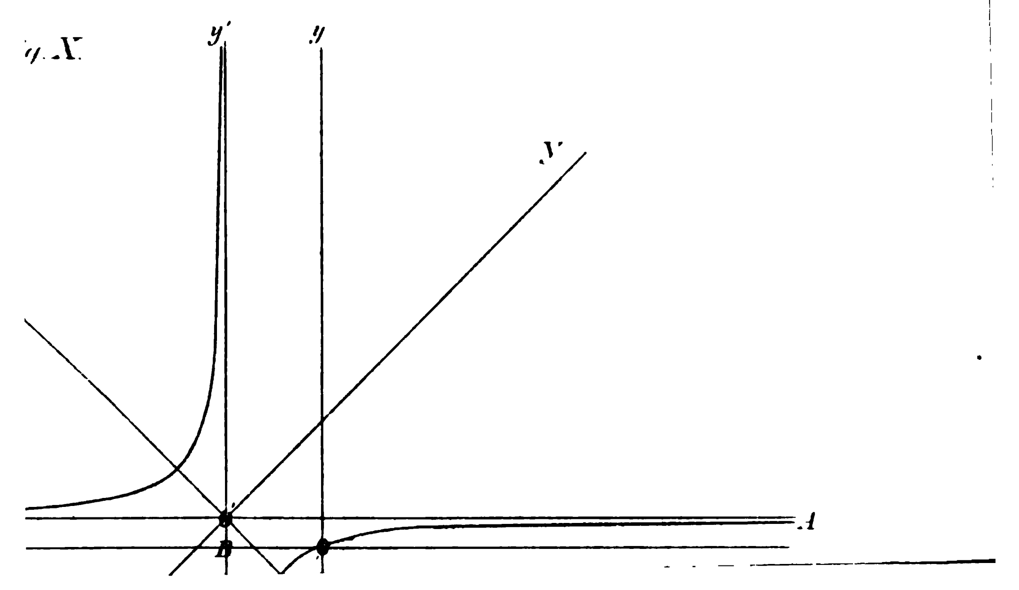
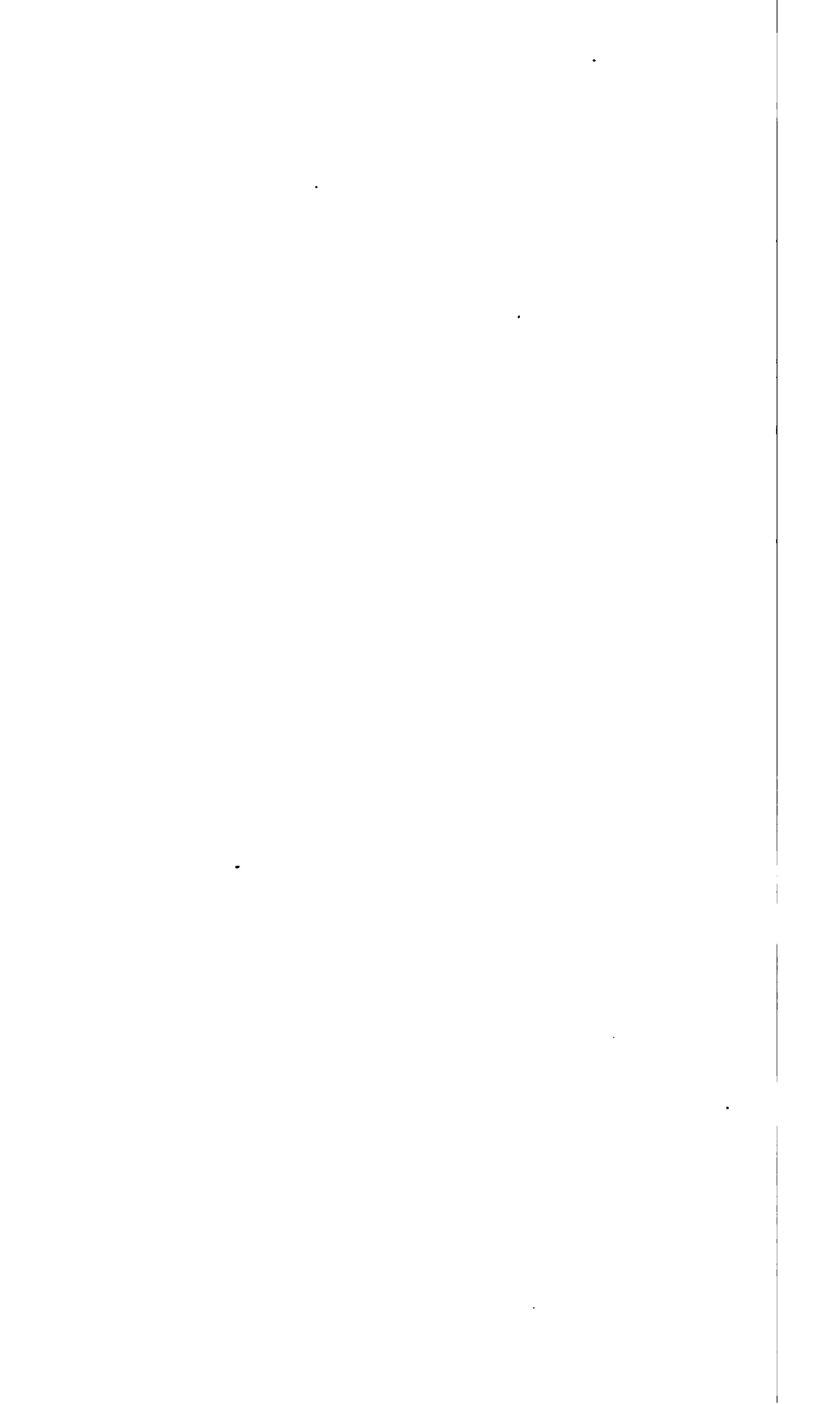


Fig. VII



Taf. II.





XVI. SITZUNG VOM 18. JUNI 1874.

Herr Prof. Dr. Ed. Linnemann in Brünn dankt mit Schreiben vom 15. Juni für den ihm zuerkannten Ig. L. Lieben'schen Preis, und weist, den Bestimmungen des Stiftbriefes gemäss, seine österr. Staatsbürgerschaft nach.

Die Herren A. Winnecke in Strassburg und Alph. Borelly in Marseille danken, mit Schreiben vom 9. und beziehungsweise vom 14. Juni, für die ihnen zuerkannten und übersendeten Kometen-Preise.

Sir Edward Sabine, Generallieutenant und Präsident der Royal Society in London, lässt, da er selbst durch Krankheit zu schreiben verhindert ist, durch Herrn Dr. Scott der Akademie seinen Dank für die Wahl zu ihrem Ehrenmitgliede ausdrücken.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Über einige bestimmte Integrale“, von Herrn Prof. L. Gegenbauer, d. Z. in Berlin.

„Über neue und ungenügend bekannte Vögel von Neu-Guinea und den Inseln der Geelvinksbai“, V. Mittheilung, von Herrn Dr. A. B. Meyer in Wien.

Herr Prof. Dr. Ed. Suess legt zwei Mittheilungen des Herrn Th. Fuchs aus Tarent vor, betitelt: 1. „Das Alter der Tertiärschichten von Malta“, und 2. „Über das Auftreten von Miocänschichten vom Charakter der sarmatischen Stufe bei Syrakus“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Annales de l'Observatoire de Moscou. Vol. I. Moscou, 1874; 4°.

Beobachtungen, Schweizer. Meteorologische. November und December 1872; Jänner, Februar & März 1873. Zürich; 4°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome L^me^. Nr. 197. Genève, Lausanne, Paris, 1874; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXVIII, Nr. 22. Paris, 1874; 4°.

Edlund, E., Théorie des phénomènes électriques. Leipzig & Stockholm, 1874; 4°.

Erman, A., und H. Petersen, Die Grundlage der Gaussischen Theorie und die Erscheinungen des Erdmagnetismus im Jahre 1829. (Herausgegeben im Auftrage der kais. Admiralität.) Berlin, 1874; 4°.

Feistmantel, Ottokar, Das Kohlenkalkvorkommen bei Rothwaltersdorf in der Grafschaft Glatz und dessen organische Einschlüsse. 8°.

Genocchi, Angelo, Breve riposta, al Signor Conte L. F. Menabrea. 4°.

Genootschap, Bataviaasch, van Kunsten en Wetenschappen: Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde. Deel XXI, Aflev. 1. Batavia, 's Hage, 1873; 8°. — Notulen. Deel XI. 1873. Nr. 2. Batavia, 8°. — *Codicum Arabicorum in Bibliotheca Soc. art. et scient., quae Bataviae floret, asservatorum Catalogum inchoatum a Doct. R. Friedrich absolvit indicibusque instruxit L. W. C. van den Berg. Bataviae & Hagae Comitis, 1873; 8°.*

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang. Nr. 24. Wien, 1874; 4°.

Instituut, Koninkl., voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië: Bijdragen. III. Volgreeks. VIII. Deel, 3e & 4e Stuk. 'S Gravenhage, 1874; 8°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 12. Graz, 1873; 4°.

Leitgeb, Hubert, Untersuchungen über die Lebermoose. I. Heft. Jena, 1874; 4°.

Menabrea, L. F., Un' ultima lettera sulle peripezie della serie di Lagrange, in riposta al prof. Angelo Genocchi. Roma, 1874; 4°.

Nachrichten über Industrie, Handel und Verkehr aus dem statistischen Departement im k. k. Handels-Ministerium. IV. Band, 2. Heft. Wien, 1874; 4°.

Nature. Nr. 241, Vol. X. London, 1874; 8°.

Nuovo Cimento. Giornale di fisica, fisica matematica, chimica e storia naturale. Serie 2ª. Tomo XI. Gennajo — Aprile 1874. Pisa; 8⁰.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VII, Nr. 5. Torino, 1872; 4⁰.

Revista de Portugal e Brazil. 2ᵉ Volume, Nr. 4. Lisboa, 1874; 4⁰.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". IIIᵉ Année, 2ᵉ Série. Nr. 50. Paris, 1874; 4⁰.

Settimanni, C., Supplément à la nouvelle théorie des principaux éléments de la Lune et du Soleil. (Florence 1871.) Florence, 1874; 4⁰.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des travaux. 3ᵉ Série. 27ᵉ Année. 1ᵉʳ Cahier. Paris, 1874; 8⁰.

Tübingen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1872/3. 4⁰ & 8⁰.

Verein für Natur- und Heilkunde zu Pressburg: Verhandlungen. N. F. 2. Heft, Jahrgang 1871—1872. Pressburg, 1874; 8⁰.

Vierteljahresschrift, österr., für wissenschaftliche Veterinärkunde. XLI. Band, 2. Heft. Wien, 1874; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 24. Wien, 1874; 4⁰.

XVII. SITZUNG VOM 25. JUNI 1874.

Seine Excellenz der Herr k. k. Handels-Minister übersendet, mit Note vom 17. Juni, eine Serie von fünf Kategorien von Preis-Medaillen der Wiener Weltausstellung 1873.

Die Herren Jérôme Coggia in Marseille und Wilhelm Tempel in Mailand danken, mit Schreiben vom 14. und beziehungsweise vom 17. Juni, für die ihnen zuerkannten und übersendeten Kometen-Preise.

Herr Regierungsrath Dr. K. v. Littrow überreicht eine Abhandlung: „Bahnbestimmung des ersten Kometen vom Jahre 1871" (II. Abtheilung), von Herrn Dr. Joh. Holetschek.

Derselbe legt ferner das von Herrn Dr. Holetschek berechnete „Dritte Elementensystem des von Coggia in Marseille am 17. April entdeckten Kometen sammt Ephemeride" vor.

Herr Prof. Dr. Fr. Toula überreicht eine Abhandlung, betitelt: Kohlenkalk- und Zechstein-Fossilien aus dem Hornsund an der Süd-Westküste von Spitzbergen".

Herr Prof. Dr. A. Schrauf berichtet über seine „Untersuchung eines neuen Minerals, genannt Veszelyit".

Der Secretär legt eine Probe künstlichen Vanilin's vor, welches im Laboratorium des Herrn Prof. A. W. Hofmann in Berlin aus Sägespänen dargestellt und ihm von diesem zugesendet wurde.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Tomo IX, Entrega 106; Tomo X, entrega 107—109. Habana, 1873; 8°.

Academy of Science of St. Louis: Transactions. Vol. III, Nr. 1. St. Louis, 1873; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 18. Wien, 1874; 8°.

Buffalo Society of Natural Sciences: Bulletin. Vol. I. Nrs. 2—3. Buffalo, 1873; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences Tome LXXVIII, Nr. 23. Paris, 1874; 4°.

Connecticut Academy of Arts and Sciences: Transactions. Vol. II, Part 2. New Haven, 1873; 8°.

Fritz, Hermann, Verzeichniss beobachteter Polarlichter. (Auf Kosten der kais. Akademie der Wissenschaften.) Wien, 1873; 4°.

Gesellschaft der Wissenschaften, k. böhm.: Sitzungsberichte. 1874, Nr. 2. Prag; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 12. Wien, 1874; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö. Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 25. Wien, 1874; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrg. 1874, Nr. 10. Wien; 4°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administrat. Militär-Comité. Jahrgang 1874, 6. Heft, Wien; 8°.

Nature. Nr. 242, Vol. X. London, 1874; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrg. 1874, Nr. 9. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger“. III° Année, 2° Série, Nr. 51. Paris, 1874; 4°.

Report, Annual, of the Chief Signal-Officer to the Secretary of War for the Year 1872. Washington, 1873; 8°.

Santiago de Chile, Universität: Anales. Años 1871 & 1872. 8°. — Sesiones ordinarias i estraordinarias de la Cámera de Diputados i ordinarias de la de Senadores de 1872. 4°. Estadistica comercial de la República de Chile de 1871. 4°. — Memoria de Marina. 1871; Memorias del Interior, Relaciones Esteriores, Colonizacion, Instruccion Publica i Marina de 1872. 8°. — Apéndice a la Memoria del Interior de 1872. 8°. — Apéndice a la Memoria de Relaciones Esteriores de 1872. 8°. — Lei de presupuestos para 1873. 4°. — Compilacion de leyes i dicretos vijentes en materia de instruccion pública, por M. E. Ballesteros. 1872; 8°. —

Ordenanza de Aduanas de la República de Chile. 1873; 8°. — Colonizacion de Llanquihue, Valdivia i Arauco etc., por José Antonio Varas. 1872; 8°. — Reseña de los trabajos de la Universidad desde 1855 hasta el aňno 1872, por don Ignacio Domeyko. 1872; 8°. — Cuenta jeneral de las entradas i gastos de la República de Chile en 1871. 4°. — Tratado de ensayes por el señor dor Ignacio Domeyko. 1873; 8°. — Derecho publico ecclesiastico, por don Rafael Fernandez Concha. Tomo I & II. 1872; gr. 8°. — Los orijenes de la iglesia chilena, por don Crescente Errázuriz. 1873; 8°. — Los precursores de la Independencia de Chile, por don Miguel L. Amunátegui. 1870—1872; 8°. — Anuario estadistico. Tomo XII. 1872; 4°. — Viage al desierto de Atacama, por el doctor don R. A. Philippi. Halle en Sajonia, 1860; 4°.

Sociedad Mexicana de historia natural: La Naturaleza. Entrega 12 & 19—39. Mexico, 1869—1873; 4°.

Verein für Landeskunde von Niederösterreich: Blätter. VII. Jahrgang. 1873, Nr. 1—12. Wien; 8°. — Topographie von Niederösterreich. 5., 6. & 7. Heft. Wien, 1873 & 1874; 4°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 25. Wien, 1874; 4°.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

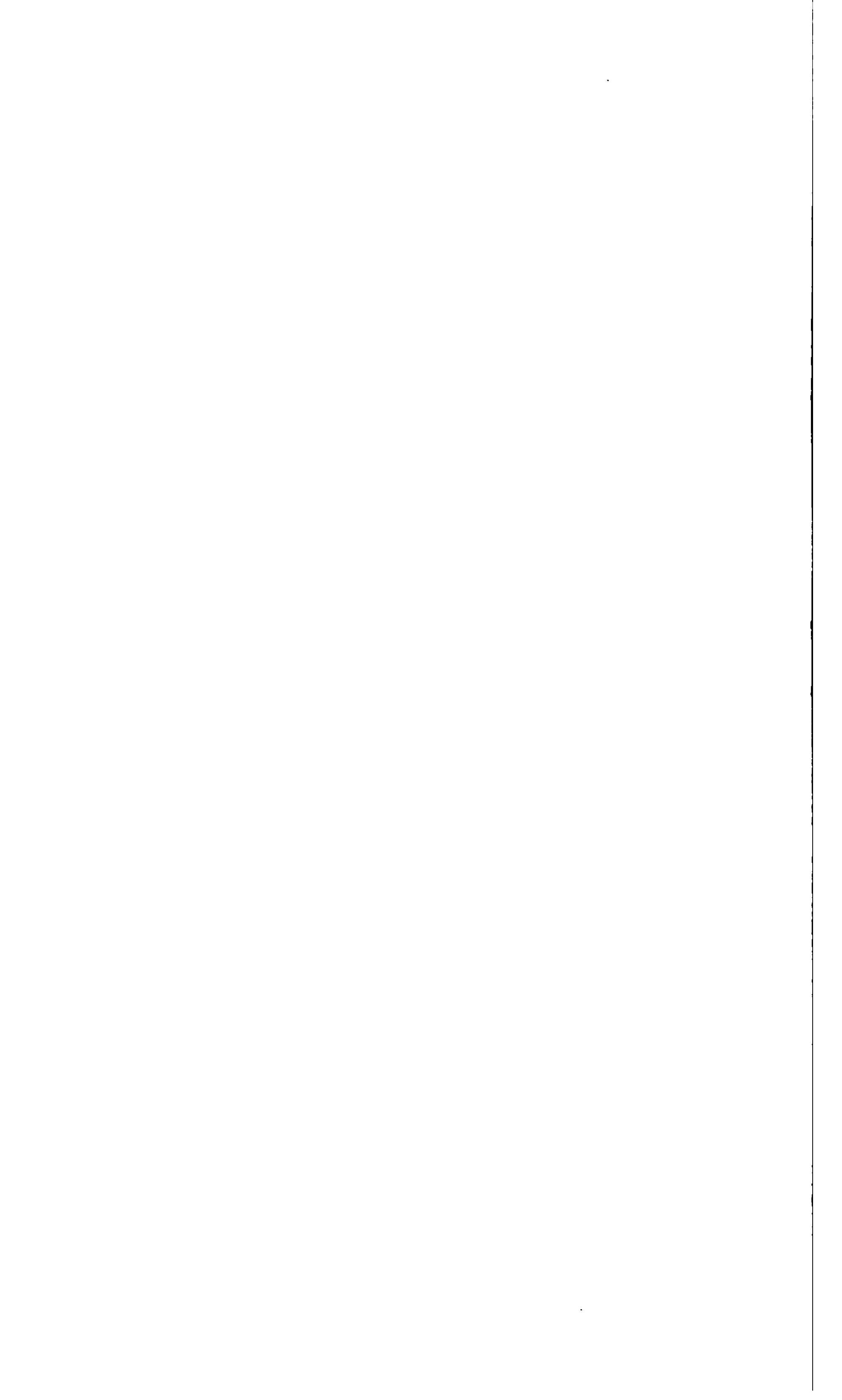
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. Band.

DRITTE ABTHEILUNG.

7.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.



XVIII. SITZUNG VOM 9. JULI 1874.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Untersuchungen über die Gallenfarbstoffe." IV. Abhandlung, vom Herrn Prof. R. Maly in Innsbruck.

„Über eine Modification der herrschenden Gastheorie," von dem Professor und Capitular zu Seitenstetten, Herrn Karl Puschl.

Herr Prof. Dr. Ed. Suess überreicht eine Abhandlung des Herrn Th. Fuchs über „Die Tertiärbildungen von Tarent."

Herr Hofrath Dr. E. v. Brücke legt eine Untersuchung „über die Sommer'schen Bewegungen" vor, welche vom Herrn Dr. H. Storoscheff aus Moskau im physiologischen Institute der Wiener Universität durchgeführt wurde.

Herr Dr. Zöller, Professor an der Hochschule für Bodencultur, spricht „über Ernährung und Stoffbildung der Pilze."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia Olimpica di Vicenza: Atti. 2do Semestre 1873. Vicenza; 8°.

Akademie der Wissenschaften und Künste, Südslavische: Rad. Knjiga XXVII. U Zagrebu, 1874; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 19. Wien, 1874; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 1996—2000 (Bd. 84. 4—8). Kiel, 1874; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXVIII, Nrs. 24—25. Paris, 1874; 4°.

Ellis, Alex. J., Algebra identified with Geometry. London, 1874; 8°.

Friedmann, Alexander, Officieller Bericht über das Marinewesen auf der Weltausstellung 1873 Wien. Wien 1874; 8°.

Geological Survey of the Territories, U. St.: Report. (2 Volumes.) Washington, 1873; 4°. — Ist, II^{d} and III^{d} & VIst Annual Reports. For the Years 1867, 1868 and 1869, & 1872. Washington, 1873; 8°. — Miscellaneous Publications. Nrs. 1—2. Washington, 1873; 8°.

Gesellschaft, Deutsche Geologische: Zeitschrift. XXV. Band. 4. Heft. Berlin, 1873; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrg. Nr. 26. Wien, 1874; 4°.

Istituto, R., Veneto di Scienze, Lettere ed Arti: Atti. Tomo III°. Serie IV^{a}, Disp. 4^{a}—6^{a}; Venezia, 1873—74; 8°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band IX, 9. & 10. Heft. Leipzig, 1874; 8°.

Koderle's automatische Sicherheits-Vorrichtungen für die Fahrzeuge der Eisenbahnen. Lindau; 8°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 13. Graz, 1874; 4°.

Loomis, Isaacs, The Epoch of the Beautiful in Knowledge. Nantucked, Mss., 1874; 8°.

Lotos. XXIV. Jahrg. Mai—Juni 1874. Prag; 8°.

Luvini, Giovanni, Di un nuovo strumento meteorologico-geodetico-astronomico, il dieteroscopio. Torino, 1874; 8°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 20. Band, 1874, Heft VI. Gotha; 4°.

Moniteur scientifique du D^{teur} Quesneville. 391e Livraison. Paris, 1874; 4°.

Nature. Nrs. 243—244, Vol. X. London, 1874; 4°.

Puyals de la Bastida, Don Vicente, Ortografia de la lengua Castellana. Madrid, 1874; 12°. — Numeracion perfecta braquiloga é ideografica. Madrid, 1874; 12°.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXIV. Band, Jahrgang 1874. Juli-Heft. Wien; 8°.

Revista de la Universidad de Madrid. 2^{a} Época. Tomo III. Nr. 2—4. Madrid, 1874; gr. 8°.

— de Portugal e Brazil. 2° Vol., Nr. 5. Lisboa, 1874; 4°.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger“. III[e] Année, 2[e] Série, Nr. 52. IV[e] Année, 2[e] Série, Nr. 1. Paris, 1874; 4⁰.

Schiaparelli, G. V., Il periodo undecennale delle variazioni diurne del magnetismo terrestre considerato in relazione colla frequenza delle macchie solari. 4⁰.

Siragusa, Fr. P. Camillo, Sulle funzioni delle radici delle piante. Palermo, 1874; 8⁰.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Anno 1874, disp. 5[a]. Palermo, 1874; 4⁰.

Société mathématique de France: Bulletin. Tome II, Nrs. 1—2. Paris, 1874; 8⁰.

Society, The Chemical, of London: Journal. Serie 2, Vol. XI. December 1873; Vol. XII. February—April 1874. London; 8⁰.

Tommasi, Donato, Researches on the Preparation of Organo-Metallic Bodies of the C_nH_{2n} Series. 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nrs. 26—27. Wien, 1874; 4⁰.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang, 10. Heft. Wien, 1874; 4⁰.

Untersuchungen über die Gallenfarbstoffe.

Von **Richard Maly** in Innsbruck.

IV. Abhandlung[1].

(Mit 1 Holzschnitt.)

Als Material zur Gewinnung von Bilirubin benützt man zweckmässig nur Ochsengallensteine, wie ich schon in einer meiner früheren Abhandlungen und wie auch Thudichum (Jour. f. prakt. Chemie 104. 193) angegeben hat. Dies ist aber vielfach noch nicht bekannt, und so kommt es, dass mitunter mit dem sehr unzulänglichen, aus Menschengallensteinen abscheidbaren Material experimentirt wird. So steht auch noch in der dritten Auflage einer neuen zoochemischen Analyse die Angabe, dass die Ochsengallensteine kein Bilirubin enthalten.

Das ist aber unrichtig, denn die Gallenconcretionen des Rindes sind gerade sehr reich daran. Ich habe seit Jahren in grossen Schlachthäusern solche Steine zu acquiriren versucht, und es war mir möglich ein paar Dutzend von circa Nussgrösse zu erlangen. Sie waren alle dem Ansehen nach untereinander gleich, orange- oder kastanienfarbig, aus Schichten bestehend, wie Ocker abfärbend und leicht zu einem orangebraunen Pulver zerreiblich. Immer war ihr Cholesteringehalt ein geringer, und immer habe ich eine sehr reiche Ausbeute an Bilirubin davon bekommen.

Es besteht also eine grosse Verschiedenheit gegenüber den Gallensteinen, wie sie beim Menschen vorkommen, denn bei diesem sind bekanntlich die allermeisten aus Cholesterin bestehend mit wenig anderen Beimengungen. Solche, welche im äusseren und Bilirubingehalt den Ochsengallenstein entsprechen, kommen

---

[1] Sitzungsber. d. Wiener Akademie, Bd. 57 u. 59. Dann Liebig's Annalen Bd. 163.

zwar auch beim Menschen vor, aber enorm selten; es sind jene, die E. Ritter[1] nach seiner Eintheilung in die siebente Classe bringt. Einen Cholesterinstein vom Ochsen habe ich nie zu Gesichte bekommen.

Ganz ähnlich denen vom Rind scheinen die Schweinsgallensteine zusammengesetzt, doch ist von diesen Thieren nicht viel zu bekommen.

Da die Zusammensetzung der Rindsgallensteine nicht bekannt ist, und mir die häufige Verarbeitung derselben gezeigt hat, dass sie ziemlich constant componirt sind, so habe ich eine Analyse derselben mit einer etwas grösseren Menge angestellt.

Gelegentlich sei noch erwähnt, dass im Gegensatze zu den ziemlich häufigen Arbeiten über Menschengallensteine, über die der Thiere sehr wenig vorliegt. Was ich in dieser Beziehung fand, beschränkt sich auf je einen Gallenstein vom Schaf, vom Kameel und vom Schwein und auf qualitative Angaben über einen solchen vom Rind.

In einem Gallenstein vom Schaf fand Landerer[2] 70% Cholesterin durch Alkohol ausziehbar, 20% Gallenschleim, 20% Harz und Farbstoff, 10% Asche.

Einen Gallenstein vom Kameel fand derselbe Autor[3] zum grössten Theile aus Cholesterin bestehend.

Eine modernere Analyse ist von T. L. Phipson[4] vorhanden über einen Schweinegallenstein, worin 8·0 Wasser, 1·35 Cholesterin, 11·5 Schleim, 5·75 gallensaures Natron, 61·36 Bilirubin auf 100 gefunden wurde, neben 13·65 Asche (+ Verlust).

Thudichum[5] fand bei der Untersuchung eines Ochsengallensteines die Hauptmasse aus Pigment bestehend, dann der Menge nach folgend, Gallensäure und ihre Salze, Kalk, Zink und einem in Äther löslichen Stoff.

Das Material zu meiner Analyse war ein grosser, in seiner Masse gleichförmiger Ochsengallenstein, der gepulvert und bei 100° getrocknet wurde.

11·068 Grm. dieses Pulvers wurden mit Wasser wiederholt ausgekocht (wobei sich ein intensiver Moschusgeruch bemerkbar

---

[1] Jour. de l'anatomie et de la physiol. par Robin, Paris 1872. — Jahresbericht für Thierchemie Band II, p. 247.

[2] Pharmazeutisches Centralblatt 1842.

[3] Buchner's Repertorium 2. R. XLII. 60.

[4] Chem. News. XVI. 7.

[5] On the comp. of Gallstones. Quart. Journal. of the Chem. Soc. 1864. Durch Cannstadt's Jahresbericht.

machte), auf ein Filter gebracht und ausgewaschen. Die Auskoch- und Waschwässer vereint dampfte man auf 100 CC. ein.

Die eine Hälfte davon, also 50 CC., gaben im Platintiegel abgedampft, und bei 105° getrocknet, 1·0012 Grm. Rückstand mit 0·1572 Grm. Asche, welche in Wasser löslich war, alkalisch reagirte, und zur Neutralisation 0·100 Grm. krystallisirter Oxalsäure bedurfte. Ausserdem enthielt sie Kochsalz mit wenig Phosphorsäure, Kalk und Magnesia.

Die zweiten 50 CC. des wässerigen Extractes wurden eingeengt, der Rückstand mit Alkohol ausgezogen und mit Äther vermischt. Es schied sich ein farbloses Harz ab, das sich unter Äther in Krystalle von den Eigenschaften des glycocholsauren Natrons verwandelte, die aber nicht gewogen wurden.

Das mit Wasser erschöpfte Gallensteinpulver wurde nach dem Trocknen mit Alkohol-Äther ausgekocht und dann noch 10mal mit kaltem Äther behandelt, bis die letzten Auszüge fast farblos waren. Alle Auszüge wurden nacheinander in demselben Kölbchen abdestillirt; der Rückstand (Äther-Extract) wog 0·5820 Grm., war ein klares, gelbes Fett, zum grössten Theile verseifbar, wobei nur wenige Milligramme Cholesterin zurück blieben. Salzsäure schied fette Säuren ohne Geruch, also von höherer Zusammensetzung, aus der Seife ab.

Das bislang mit Wasser und Äther erschöpfte Gallensteinpulver wurde nun zur Entfernung der unlöslichen Salze und der an Pigment gebundenen Erden mit verdünnter Salzsäure gründlich extrahirt. Der Abdampfrückstand enthielt noch wieder etwas Kochsalz, dann phosphorsaure Erden, Kalk und Magnesia, die nicht an Phosphorsäure gebunden waren, etwas Eisen (kein Kupfer) und eine Spur Zink.

Nach diesen drei Extractionen wog nun das Gallensteinpulver 8·327 Grm., woraus sich folgende Bilanz ergibt:

vom ursprünglichen Pulver	. . . .	11·0680
ab { Wasserextract	. . . .	2·0024
ab { Ätherextract	. . . .	0·5820
	bleibt . . .	8·4836
Nach Extraction mit HCl	. . . .	8·3270
daher von HCl aufgenommen	. . . .	0·1566.

r wurde, nachdem durch die Säure das Bilirubin
.t worden war, die Behandlung des Pulvers mit
vorgenommen durch 10maliges Auskochen mit die-
;smittel. Dabei waren die drei letzten Auszüge aber
· gelb gefärbt. Das zurückbleibende Pulver war braun
farbig. Die vereinigten chloroformigen Auszüge gaben
Abdestilliren und Waschen des Rückstandes mit
3·1100 Grm. Bilirubin.

ɜrwähnte olivenfarbene Rückstand enthielt noch immer
irubinkalk (von dessen Bestimmung abgesehen wurde),
.kle, humusartige Stoffe und viel Anorganisches, nämlich
a 0·9960 Grm. (dieses Rückstandes).

ɜ allen vorhergehenden Zahlen ergibt sich dann folgende
ıensetzung.

	in 11·0680 Grm.:	in 100 Theilen:
iche Gallenstoffe	2·0024	18·09
arin Asche	0·3144	
erextract (Fett)	0·5820	5·28
ɔsphate und an Bilirubin gebun- ɹe Erden	0·1566	1·41
lirubin	3·1100	28·10
ɹckstand und Verlust	5·2170	47·13.

Da die letzten, dem Pulverrückstand anhängenden Bilirubin-
te sich schwer entziehen lassen, und auch ein Theil des Bili-
ɔins, der sich zu Biliverdin umgewandelt hatte, beim Waschen
t Weingeist in diesen überging, so ist der Gehalt von 28%
elleicht auf 30% zu erhöhen.

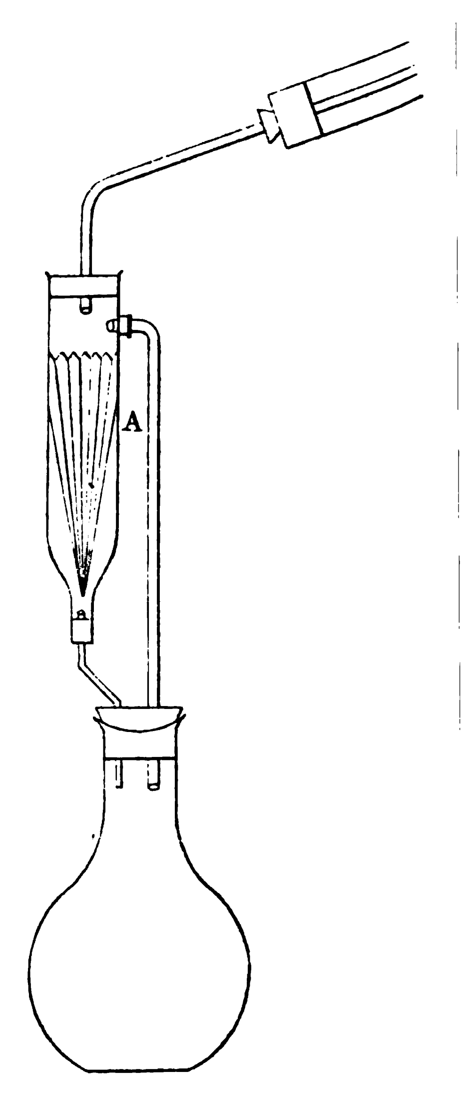
Erinnert man sich, dass das Bilirubin zum grössten Theile
ɹls Calciumverbindung in den Concrementen enthalten ist, so
bestand der analysirte Stein zu wenigstens einem Drittel aus
derselben [1].

Zur Extraction des Gallensteinpulvers benütze ich schon
lange einen Apparat, der sehr ähnlich ist jenem, den Zulkowski [2]
vor Kurzem beschrieb, und ich kann desshalb keinen beson-

[1] Aus einem anderen in der letzten Zeit analysirten Ochsensteine
wurden 45% Bilirubin gewonnen.

[2] Zeitsch. f. analytische Chemie XII. 303.

deren Werth darauf legen, will ihn aber doch durch eine kleine Zeichnung versinnlichen, da er viel leichter construirbar ist. Das cylindrische Gefäss *A* ist nämlich als Bestandtheil der kleinen, mit schlangenförmigem Kühlrohr versehenen Kühlapparate überall käuflich. Ein zweiter Vortheil, den eine solche Construction bietet, ist der, dass man die zu extrahirende Substanz in einem Faltenfilter in den Cylinder bringen, und so mit der Extraction zugleich Filtration verbinden kann. Das ist namentlich dann nützlich, wenn man quantitativ extrahiren will; bei der gewöhnlichen Art des Verschlusses mit einem Baumwollpfropf mengt sich das zu extrahirende Pulver in die Baumwolle, und ist davon nicht mehr gut zu trennen.



Zur weiteren Kenntniss des Biliverdins.

Die Zusammensetzung eines Körpers ist der erste Schritt in seiner Erkenntniss; es schien mir deshalb wichtiger, hier Endgiltiges zu schaffen, statt neue problematische Existenzen, woran diese Körperreihe schon reich ist.

Das Biliverdin ist bisher von mir[1] und von Thudichum[2] analysirt worden. Städeler[3], dessen Arbeit keine Analyse von Biliverdin enthält, hat vermuthungsweise auf Grund einer älteren Analyse von Heintz die Zusammensetzung $Ɵ_{16}H_{20}N_2Ɵ_5$ aufgestellt, eine Formel, die da und dort aufgenommen wurde.

Meine Analysen, die in der citirten zweiten Abhandlung mitgetheilt wurden, und sich auf aus reinstem Bilirubin dargestelltes Biliverdin beziehen, stimmten hingegen zu $Ɵ_{16}H_{18}N_2Ɵ_4$, und zwar ganz genau im C- und H-Gehalte, während sich im N-Gehalte ein Deficit von $0{\cdot}5^0/_0$ zeigte. Diese N-Bestimmungen waren nach der Will-Varrentrapp'schen Methode ausgeführt worden.

Die Differenz zwischen meiner Formel und der von Städeler supponirten bezieht sich nur darauf, ob neben einem Atom Sauerstoff auch noch die Elemente eines Wassermoleküles aufgenommen werden oder nicht.

Mittlerweile sind auch von Thudichum l. c. Analysen von Biliverdin in seinen Untersuchungen über die Gallenfarbstoffe publicirt worden, und obwohl diese namentlich im Kohlenstoffgehalte nur sehr mittelmässig zu meinen Analysen stimmen, so hat doch Thudichum dieselbe Zusammenstellung wie ich daraus abgeleitet, mit dem Unterschiede, dass sie Thudichum nur halb so gross — $Ɵ_8H_9NƟ_2$ — schreibt[4].

Das vorhandene thatsächliche Material stellt sich demnach folgendermassen:

---

[1] L. c.

[2] Journ. f. prakt. Chem. Band 104. 1868.

[3] Annalen d. Chemie 1864.

[4] Thudichum schreibt die Bildungsgleichung des Biliverdins aus Bilirubin folgender Art:

$$Ɵ_9H_9NƟ_2 + Ɵ_2 = Ɵ_8H_9NƟ_2 + ƟƟ_2,$$

lässt also Kohlensäure nebenbei entstehen. Abgesehen, dass Thudichum's Bilirubinformel die diesmal übereinstimmenden Analysen von Städeler und mir gegen sich hat, müsste nach dieser Gleichung das Biliverdin (wegen der CO_2-Abspaltung) weniger wiegen, als das Bilirubin, aus dem es entsteht.

Zwecke Bilirubin mit einem Gemisch von Chloroform und Eisessig so in Röhren ein, dass noch ein gehöriger Luftraum bleibt, und erhitzt etliche Stunden auf 100°. Man hat dann eine feurig dunkelgrüne Lösung, kann aber daraus das Biliverdin nicht gut mit Wasser ausfällen.

Eine Säure, die principiell ähnlich wirkt, aber schon bei gewöhnlicher oder doch niedriger Temperatur und ohne Chloroform, ist die Monochloressigsäure. Man verflüssigt etwas davon in einem Becherglase (Schm. 62°), trägt das gepulverte Bilirubin ein und lässt unter zeitweiligen Digeriren in der Wärme stehen. Nach ein paar Tagen ist das Ganze dunkelgrün geworden und Wasserzusatz gibt einen reichen Biliverdinniederschlag, während die darüber stehende, die Monochloressigsäure enthaltende wässrige Flüssigkeit nur sehr kleine Mengen Pigment enthält. Auch hiebei ist es Luftsauerstoff, der vom Bilirubin aufgenommen wird. Es wurde ein kleines, w-förmiges Glasrohr so beschickt, dass in die erstere untere Biegung Bilirubin, in die zweite Monochloressigsäure gebracht und das Rohr durch einen mehrere Stunden dauernden Gasstrom vollständig mit CO_2 erfüllt wurde. Das Rohr schmolz man dann mit der Vorsicht, dass alle Luft ausgeschlossen blieb, an beiden Seiten zu, vereinigte durch Neigen die Substanzen und verflüssigte sie durch Erwärmen. Die Masse blieb trotz öfterer Erwärmung braun und ergrünte nicht.

Vor guter Weile habe ich auf die oben bezeichnete Weise mit Monochloressigsäure Biliverdin dargestellt, und um zu sehen, ob nicht bemerkbare Mengen (farbloser) Nebenproducte in der wässerigen Säure gelöst blieben, das dazu verwendete Bilirubin und das dabei erhaltene Biliverdin gewogen. Es resultirten:

1. aus 0·7566 Grm. Bilirubin 0·7528 Grm. Biliverdin
2. „ 0·4863 „ „ 0·4767 „ „

Dass ein zweiter Körper in bemerkenswerther Menge dabei nicht entsteht, konnte man aus diesen Wägungen wohl ersehen. Ich habe nun aber neuerdings versucht, diesem Versuche eine solche Genauigkeit zu geben, dass er zur Verification der Biliverdinformel noch zu verwerthen wäre, d. h. dass man die Gewichtszunahme (respective Abnahme) bestimmte, die das Bilirubin bei seiner Umwandlung in Biliverdin erleidet. Es war dazu

nöthig, die kleine Menge Farbstoff mit zu bestimmen, die sich der Fällung mit Wasser entzog und in das Filtrat überging.

Da ich mich jedoch von der Reinheit des Biliverdins, das unter Mithilfe von Monochloressigsäure entsteht, nicht direct durch die Analyse überzeugt hatte, und die von mir sowohl als von Thudichum analysirten Präparate auf die gewöhnliche Weise durch Einwirkung verdünnter Laugen bei Luftzutritt dargestellt worden waren, so habe ich den Versuch in folgender Weise dargestellt.

Bilirubin wurde in sehr verdünnter Sodalösung gelöst, unter gelegentlichem Einleiten von Sauerstoff einige Tage stehen gelassen, mit HCl das Biliverdin gefällt, am getrockneten und gewogenen Filter gesammelt und bis zum Verschwinden der Chlorreaction gewaschen. Es wurde dann bei 110° getrocknet und gewogen. Das grüngelbe Filtrat dampfte man ein und bestimmte darin den Gehalt an organischer Substanz durch schwaches Glühen des bei 125° getrockneten Rückstandes. Die Waschwässer, welche in dickerer Schichte auch eine Spur grüngelber Färbung zeigten, wurden colorimetrisch nach dem ersten Filtrate geschätzt. Dabei erhielt man:

Angewandtes Bilirubin (110° getrocknet) . . .	0·4558 Grm.
Abfiltrirtes Biliverdin (110° getrocknet)	0·4458 „
Organische Substanz im Filtrate	0·0223 „
Gesammtes Biliverdin . . .	0·4681 Grm.

Daher Gewichtszunahme 0·0123 Grm. oder 2·0 pro 100. Setzt man noch in Rechnung den kleinen Gehalt der späteren Waschwässer an Farbstoff, welcher nach dem Augenmasse zu $^1/_3$ von dem des Filtrates geschätzt wurde, also circa 7·4 Mgrm. betragen konnte, so ergibt sich eine Zunahme von 0·0197 Grm. oder 4·3%, d. h. 100 Theile Bilirubin geben 104·3 Theile Biliverdin. Die Rechnung verlangt für die analytisch gefundene Formel 105·6 Theile Biliverdin, was also so genau stimmt, als unter solchen Verhältnitnissen verlangt werden kann.

Würde neben Θ auch noch $H_2\Theta$ bei der Biliverdinbindung aufgenommen, wie Städeler glaubte, so müsste die Zunahme das Doppelte, nämlich 11·9% betragen; würde, wie Thu-

dichum will, Kohlensäure nebenbei abgespalten werden, so würde umgekehrt ein Minus von Biliverdin auftreten müssen.

Ein zweiter Versuch, dessen Details ich nicht weiter anzuführen brauche, ergab ein ähnliches Resultat, nur war die Gewichtszunahme noch etwas kleiner, also von Städeler's Formel noch weiter entfernt.

Jedenfalls stimmen also Analyse und Gewichtszunahme zusammen, und beide führen zu der Biliverdinformel $\Theta_{16}H_{18}N_2\Theta_4$, welche von der des Bilirubins durch einen Mehrgehalt von Θ sich unterscheidet.

Innsbruck, Juni 1874.

XIX. SITZUNG VOM 16. JULI 1874.

Der Secretär theilt die aus Upsala eingelangte Nachricht von dem am 21. Juni daselbst erfolgten Ableben des Professors Dr. Anders Jonas Ångström mit.

Das k. & k. Ministerium des Äussern übermittelt ein Dankschreiben des Geschäftsträgers von Griechenland am österr. Hofe für die der National-Bibliothek zu Athen übersendeten akademischen Druckschriften.

Herr Dr. Ad. B. Meyer übersendet eine sechste Mittheilung: „Über neue und ungenügend bekannte Vögel von Neu-Guinea und den Inseln der Geelvinksbai."

Herr Dr. Fitzinger legt die II. Abtheilung seiner Abhandlung vor, betitelt: Kritische Untersuchungen über die Arten der natürlichen Familie der Hirsche *(Cervi)*."

Herr Hofrath Dr. E. v. Brücke überreicht eine im physiologischen Institute der Wiener Universität durchgeführte Arbeit des Herrn Dr. Nicolaus Strawiński aus St. Petersburg: „Über den Bau der Nabelgefässe und über ihren Verschluss nach der Geburt.

Herr Prof. Dr. Zöller spricht „über die Zusammensetzung fossiler Eier und verschiedener im Guano gefundener Concretionen."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften zu Krakau: Die zwei ersten öffentlichen Sitzungen. Krakau, 1873; 4°. (Polnisch.)

American Chemist. Vol. IV, Nr. 12. Philadelphia, 1874; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 20. Wien, 1874; 8°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome L. Nr. 198. Genève, Lausanne, Paris, 1874; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXVIII, Nr. 26. Paris, 1874; 4°.

Ellero, Pietro, La questione sociale. Bologna, 1874; 8°.

Gesellschaft der Wissenschaften, k. böhm., zu Prag: Sitzungsberichte. 1874. Nr. 3. Prag; 8°.

— Astronomische, in Leipzig: Vierteljahrsschrift. IX. Jahrgang. 1. Heft. Leipzig, 1874; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 13, Wien, 1874; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 28. Wien, 1874; 4°.

Institut, Königl. Preuss. geodätisches: Astronomisch-geodätische Arbeiten in den Jahren 1872, 1869 und 1867. Leipzig, 1874; 4°. — General-Bericht über die Europäische Gradmessung für das Jahr 1873. Berlin, 1874; 4°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 14. Graz, 1874; 4°.

Memorial des Ingenieros. Año de 1873; Tomo XXVIII. Madrid 8°.

Nature. Nr. 245, Vol. X. London, 1874; 4°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bullettino meteorologico. Vol. VIII, Nr. 11. Torino, 1873; 4°.

— R., di Brera in Milano: Pubblicazioni. Nr. II. Milano & Napoli, 1873; 4°.

Protocoll über die Verhandlungen der 50. General-Versammlung der Actionäre der a. pr. Kaiser Ferdinands-Nordbahn. Wien, 1874; 4°.

Revista de Portugal e Brazil. 2° Vol. Nr. 6. Lisboa, 1874; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". IV° Année, 2° Série. Nr. 2. Paris, 1874; 4°.

Société des Sciences de Nancy. (Ancienne Société des Sciences naturelles de Strasbourg, fondée en 1828): Statuts. 8°.

Society, The Zoological, of Philadelphia: The 2d Annual Report of the Board of Managers. Philadelphia, 1874; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 28. Wien, 1874; 4°.

Über den Bau der Nabelgefässe und über ihren Verschluss nach der Geburt.

Von Dr. **Nicolaus Strawiński** (aus Petersburg).

(Aus dem physiologischen Institute der Wiener Universität.)

(Mit 3 Tafeln.)

Die Nabelarterien.

Es ist bekannt, dass die Nabelarterien kurze Zeit nach der Geburt aufhören zu pulsiren, auch wenn sie noch mit der Placenta in Verbindung sind und diese sich noch im Mutterleibe befindet. Es ist ferner bekannt, dass in vielen Fällen die Nabelschnur durchschnitten wurde, ohne dass sie vorher unterbunden worden wäre, und dass nichts desto weniger in der Regel keine Blutung eintrat. Es ist nicht möglich, diese Thatsachen aus einer Ablenkung des Blutstromes von den Nabelarterien zu erklären: es muss irgendwo in denselben ein Verschluss gebildet werden, und ich habe mir die Aufgabe gestellt, die Art und Weise und den Ort dieses Verschlusses näher kennen zu lernen.

Zu diesem Zwecke war es nöthig, auch den anatomischen Bau der Nabelarterien von Neuem zu untersuchen, und ich will diese Untersuchung und die Resultate derselben voranschicken.

Wenn man die Nabelarterie mit anderen Arterien des neugeborenen Kindes vergleicht, so zeichnet sie sich vor denselben schon für das blosse Auge und für den Griff des Fingers durch die Dicke ihrer Wand aus. Dieselbe nimmt im Allgemeinen gegen den Nabel hin zu, sowohl im intraabdominalen Theile als auch in demjenigen, welcher im Nabelstrange liegt. Die dickste Stelle finde ich unmittelbar nach innen vom Nabel. Auch die Hypogastrica zeigt noch eine stärkere Wand als die übrigen Arterien des neugeborenen Kindes.

Es ist bekannt, dass die innere Oberfläche der Arterien im Allgemeinen gleichförmig glatt und eben ist, abgesehen von

den Längsfalten, in welche die Intima durch starke Contraction der Media gelegt wird. Anders verhält es sich bei den Nabelarterien. Hier ist die Oberfläche nie in grosser Ausdehnung eben und gleichförmig. An einigen Stellen sieht man feine Streifchen mehr oder minder regelmässig gelagert; sie verlaufen der Länge nach oder schief, stossen manchmal unter einem Winkel aneinander und nehmen den ganzen Umfang des Gefässes oder einen Theil desselben ein.

An anderen Stellen ist die innere Oberfläche wie besäet mit unregelmässigen Erhabenheiten von verschiedener Grösse. Auch einzelne grössere Erhabenheiten, die wie Polster in das Lumen hineinragen, kommen vor. Ihr längster Durchmesser steht ausnahmslos in der Richtung der Längsachse der Arterie. Diese Polster sind jedoch nur ausnahmsweise vorhanden. Am häufigsten begegnet man ihnen in der Gegend des Nabels, theils nach aussen, theils nach innen von demselben.

Unebenheiten der einen oder der anderen findet man auf der inneren Oberfläche jeder Nabelarterie, stellenweise zeigt sich dieselbe aber auch eben und glatt.

Weder die grossen noch die kleinen Erhabenheiten beruhen auf Faltenbildung, denn sie schwinden nicht, wenn die Gefässwand nach der Quere ausgedehnt wird. Dasselbe lehrt auch die mikroskopische Untersuchung. Falten der Gefässwand kommen im Verlaufe des Nabelstranges häufig vor; an dem Intraabdominalstücke bin ich ihnen nicht begegnet, wohl aber bisweilen Erweiterungen, Ausdehnungen der Gefässwand, die sich theils auf die ganze Circumferenz, manchmal aber auch nur auf einen Theil derselben erstrecken. Viel ungleicher noch ist das Lumen während des Umlaufs im Nabelstrange. Es wechselt fortwährend und beschränkte Erweiterungen, namentlich partielle, solche, welche nur auf einen Theil des Gefässumfanges sich erstrecken, kommen hier noch häufiger vor als am intraabdominalen Theile. Sie haben meistens die Grösse einer halben Erbse, schwanken aber von der Grösse eines Hirsekorns bis zu einem Längsdurchmesser von fast zwei Centimeter. Der Querdurchmesser ist kleiner, denn sie sind nicht rund, sondern oval und mehr oder weniger abgeplattet. Der Längsdurchmesser liegt in der Längsachse des Gefässes. Die Blutgerinsel, welche

vorzüglich die partiellen Erweiterungen erfüllen, geben den letzteren, da die Gefässwand hier sehr verdünnt ist, eine schwärzliche Farbe. Solchen Erweiterungen begegnet man an jeder Nabelstrangarterie. (Sie sind schon von den älteren Autoren makroskopisch beschrieben, z. B.: Harvecius — *De Umbilico* — pg. 375, Hobokenus — *Anatomiae secundinae humanae* parag. 10, pg. 33, Rouhault — *Du cordon ombilical* — Histoire de l'Acad. roy. 1714 pg. 312 und noch von den Anderen.) Die grösseren kommen namentlich an Stellen starker Krümmungen und Windungen vor; kleine partielle Erweiterung auch an Stellen, wo der Verlauf mehr gerade ist.

Die echten Falten, Duplicaturen der Wand, an welchen alle Schichten derselben Antheil nehmen, und welche sich im Verlaufe der Krümmungen des Nabelstranges oft bilden, haben meiner Ansicht nach nichts gemein mit Klappen, weder in Rücksicht auf ihren Bau noch in ihrer physiologischen Bedeutung, wie einige Schriftsteller gemeint haben. Doch können sie vielleicht, indem sie bei stärkerer Anfüllung der Arterien stärker gegen die übrige Wand vorspringen, den Widerstand für das vordringende Blut vermehren.

Die Arterienwand ist im Nabelstrange weicher, lockerer und blässer, im Intraabdominalende compacter und von gelb-röthlicher Farbe.

An erst vor kurzer Zeit verstorbenen Kindern findet man die Nabelarterien stark zusammengezogen; abgesehen von den Erweiterungsstellen und von dem der *Arteria hypogastrica* zunächst liegenden Theile ist oft kaum etwas von dem Lumen übrig geblieben. Man kann nur schwierig mit einer feinen Sonde eindringen, noch schwieriger mit der stumpfen Branche einer feinen Scheere, welche man zum Spalten des Gefässes anwendet. Die Wand der gespaltenen Arterie zeigt sich auf dem Querschnitte von sehr ungleicher Dicke, am dünnsten in den Erweiterungen. Bekommt man die Leiche erst nach ein paar Tagen zur Untersuchung, so sind die Arterien relaxirt, und alle diese Schwierigkeiten existiren nicht. Die Nabelarterien sind vor allen anderen dazu geeignet, die alte Tiedemann'sche Beobachtung zu bewahrheiten, dass die Schlagadern einige Zeit nach dem Tode stärker zusammengezogen sind als später.

Ich habe mehrmals bald nach dem Tode Wasser in die Nabelstranggefässe zu injiciren gesucht; durch die Arterien aber drang es nicht vor, während die Injection in die Vene keine Schwierigkeiten hatte.

Der Beschreibung des mikroskopischen Befundes muss ich einige Worte über die Methode der Untersuchung vorausschicken.

Die herauspräparirten Gefässe wurden, soweit ich sie vollständig erhalten konnte, der ganzen Länge nach von der Aorta bis zur Placenta mit einer feinen Scheere aufgeschlitzt und auf gewöhnlichem weissem Löschpapier ausgebreitet, worauf sie sich leicht und gut anlegen und fest darauf haften. Mit diesem werden sie in ein flaches Gefäss gelegt und mit 96% Spiritus übergossen. Ich habe diese Präparation in der Regel erst vorgenommen, wenn die Arterien wieder erschlafft wurden, weil sie sich dann leichter herauspräpariren, spalten und ausbreiten lassen, als im ganz frischen Zustande. Nachdem die Gefässe genügend hart geworden, wurden kleine Stückchen, die sich nun leicht vom Papier lösten, in Paraffin eingebettet und mit einem mit Spiritus benetzten Messer geschnitten. Die Schnitte wurden in Wasser abgespült, vom Paraffin getrennt und mit Carmin auf die gewöhnliche Weise gefärbt. Nachdem dieses geschehen war, wurden sie in Wasser abgespült und einer zweiten Färbung in sehr schwacher weingeistiger Pikrinlösung unterzogen. Hierauf wurden sie in verharztem Terpentinöl behufs der Untersuchung durchsichtig gemacht. Zum Aufbewahren bestimmte Schnitte wurden in Damarlack übertragen und eingeschlossen. Die gerade Ausbreitung der Arterien auf Löschpapier ist wesentlich für den Erfolg der Untersuchung, weil es uns so gelingt, reine Längs- und Querschnitte zu machen, was sonst durch den gewundenen Verlauf der Gefässe vereitelt wird. Um die Verhältnisse der Nabelgefässe zu einander und zum Nabelstrange kennen zu lernen, habe ich auch Nabel und Nabelstränge mit injicirten Gefässen in Spiritus gehärtet. Als Injectionsmasse habe ich Wachs benützt. Als Einbettungsmittel wählte ich dann eine Masse, welche bei niedrigerer Temperatur schmolz als die Injectionsmasse, und zwar eine Mischung von Wachs und Oel. Alle Einbettungen wurden bei so niedriger Temperatur als möglich vorgenommen,

was unumgänglich nothwendig ist, um der Schrumpfung der Präparate vorzubeugen. Die letzteren wurden desshalb erst in die Einbettungsmasse eingesenkt, wenn diese sich der Erstarrungstemperatur näherte. Aus demselben Grunde habe ich die Schnitte, wenn sie aus der wässrigen Lösung in Alkohol gebracht werden sollten, erst in schwächeren Weingeist übertragen, dann in stärkeren.

Meine Untersuchungen wurden angestellt an Präparaten, welche theils von mit 7 oder 8 Monaten geborenen Kindern herrührten, theils von ausgetragenen Kindern, welche zum Theil einige Tage gelebt hatten, grösstentheils aber unter der Geburt zu Grunde gegangen waren.

Ich will den Anfang machen mit der Arterienwand, wie man sie in der Mitte des Nabelstranges findet. Hier erstrecken sich die glatten Muskelfasern über die ganze Breite der Gefässwand von dem *Endothelium* bis zur *Adventitia*; sie sind im Verhältniss zu denen der anderen Arterien ungewöhnlich gross, und übertreffen nicht nur die der Aorta, sondern auch die der Schlagadern mittleren Calibers um ein bedeutendes. Ich habe Querschnitte bis zu 0,008 Mm., in einzelnen Fällen sogar zu 0,01 Mm. im grössten Durchmesser gemessen; die Kerne massen 0,003 bis 0,004 Mm. im Durchmesser. Die Anordnung der Muskelfasern ist ungemein verschieden; sie liegen theils so dicht gedrängt, dass sie sich vielkantig gegen einander abplatten, theils lockerer und durch eine, wie es scheint, bindegewebige Zwischensubstanz von einander getrennt. An elastischen Elementen ist die Wand der Nabelarterien verhältnissmässig arm; dieselben treten zu Tage, wenn man wasserfeuchte Schnitte mit Weinsäure-Lösung behandelt, indem dann Muskelfasern und Bindegewebe aufquellen und durchsichtig gemacht werden. Die Armuth an elastischen Fasern zeigt sich sowohl in der Media als in der Intima, ja man kann sagen, dass die eigentliche elastische Intima, welche allen übrigen Arterien zukommt, der Nabelarterie geradezu fehlt, indem ich die Muskelfasern bis hart unter das Endothel habe verfolgen können. Den auf Querschnitten anderer Arterien sehr deutlichen stark lichtbrechenden Streifen, welcher zwischen den Muskelfasern und dem Endothel

liegt, und der den Querschnitt der elastischen Intima repräsentirt, habe ich bei der Nabelarterie im Verlaufe des grössten Theiles des Nabelstranges gänzlich vermisst.

Die ersten Spuren einer elastischen Intima zeigen sich einige Centimeter vom Nabelringe in der Gestalt von elastischen Fasern, welche unmittelbar unter dem Endothelium liegen und sich mittelst Weinsäure gut sichtbar machen lassen; aber erst im intraabdominalen Theile entwickelt sich die elastische Intima als selbstständige Schicht und nimmt gegen die Iliaca hin an Dicke und Festigkeit zu.

Die Dicke der contractilen Faserzellen nimmt im Allgemeinen gegen die innere Oberfläche hin ab, doch gibt es auch davon Ausnahmen, siehe Fig. 2 *a*. Was an der Nabelarterie nächst der Armuth an elastischen Elementen am allermeisten auffällt, ist die ausserordentliche Unregelmässigkeit ihrer Schichtung, der stäte Wechsel in der Anordnung und Richtung der Muskelfasern. Eines der gewöhnlichsten Bilder, welche mikroskopische Längsschnitte darbieten, ist in Fig. 1 dargestellt. Hier sieht man in *a* die innere Partie der Gefässwand mit längsverlaufenden Elementen, in *b* die äussere Partie mit ringförmigen Elementen, in *c* die Adventitia. Aber schon an diesem Bilde sieht man, dass selbst auf dem engen Raume die Structur nicht gleichmässig ist, indem in dem unteren Theile des Schnittes die Ringsmuskelfasern viel weniger weit gegen das Innere vordringen als im oberen Theile des Schnittes.

Von dem hier gezeichneten Schema giebt es nun alle möglichen Abweichungen, deren Extreme dahin auseinandergehen, dass einmal in der ganzen Dicke der Wand nur Ringmuskelfasern sind (Fig. 2), das andere Mal nur Längsmuskelfasern (siehe Fig. 3).

Namentlich dieses letztere Extrem findet sich nur selten und in geringer Ausdehnung und hängt wahrscheinlich mit den Windungen des Gefässes und hobeltourartig verlaufenden Fasern zusammen. Die Abweichungen beschränken sich aber nicht nur auf das Vorherrschen der Ringfasern oder Längsfasern, sondern auch auf die Anordnung im Einzelnen, indem bald Längsfasern und Ringsfasern ziemlich gesondert, die einen nach innen, die

anderen nach aussen liegen, während sie ein anderes Mal mehrfach mit einander verflochten sind. Ja es kommt selbst vor, dass die Ringfasern vorzugsweise nach innen, die Längsfasern vorzugsweise nach aussen liegen.

Die Adventitia ist im mittleren Theile des Nabèlstranges immer scharf von der eigentlichen Arterienwand abgegrenzt, eben so im ganzen Verlaufe des Nabelstranges gegen die Placenta hin. Wenn man sich aber dem Nabel nähert, so wird diese Grenze undeutlicher und diese Undeutlichkeit nimmt gegen den intraabdominalen Theil hin noch mehr zu. Dieser letztere verdient überhaupt im Kurzen gesondert beschrieben zu werden. Man bemerkt hier zunächst in der Adventitia einen grossen Reichthum an *vasa vasorum*, welche man manchmal, auch ohne dass sie injicirt worden wären, in die äusseren Schichten der Media eindringen sieht, während andererseits die Muskelfasern sich nicht auf die Media beschränken, sondern theils einzeln, theils zu ganzen Bündeln in der bindegewebigen Adventitia gefunden wurden. Im Allgemeinen ist die Gesammtlage von Muskelfasern hier anfangs mächtiger als im Nabelstrange, nimmt aber gegen die Hypogastrica hin rasch ab. Ich gebe im Folgenden die Durchmesser, wie sie an verschiedenen Schnitten der Nabelarterie gemessen wurden: es sind Mittel aus einer grösseren Reihe der Messungen.

In der Nähe der Placenta	0·2 Mm.
„ „ Mitte des Nabelstranges	0.3 „
„ „ Nähe des Nabels	0·4 „
Im Nabelringe	0·4 „
Nach innen vom Nabelring	0·6 „
In der Nähe der Hypogastrica	0·2 „

Zum Vergleiche füge ich die Durchmesser der Muscularis einiger anderer Arterien bei, wie sie an neugeborenen Kindern gefunden wurde, gleichfalls gemessen an Durchschnitten, die wie die Nabelarterie behandelt worden waren.

Aorta abdominalis	0·2 Mm.
Carotia	0·2 „
Iliaca externa	0·09 „
Hypogastrica	0·1 „

Cruralis (oben am Schenkel) . . . . . . 0·1 Mm.
Brachialis . . . . 0·07 „
Cubitalis . . . . 0·06 „

Der intraabdominale Theil ist viel reicher an elastischen Elementen als die übrige Nabelarterie. Dieselben treten schon ohne Behandlung mit Weinsäure hervor und zeigen sich nach derselben als reiche Netze, sowohl im Bindegewebe der Adventitia, als auch zwischen den Muskelfasern der eigentlichen Arterienwand. Wir haben schon früher gesehen, dass sie sich hier auch an der inneren Oberfläche des Muskellagers zu einer elastischen Intima ansammeln.

Das bis jetzt Angegebene bezieht sich auf den mikroskopischen Bau an der normalen Gefässwand. [1] Im Folgenden will ich gewisse, oben schon erwähnte Abweichungen in Rücksicht auf den mikroskopischen Befund besprechen. An den einfach verdickten Stellen der Gefässwand bleibt die Structur dieselbe und die Dickenzunahme hängt von der Vermehrung der Muskelfasern ab. Dasselbe lässt sich sagen über die verdünnten Stellen. Die Zahl der Muskelfasern nimmt ab, und diese verlaufen dann meist in einer Richtung, nämlich als Ringsfasern. An manchen Stellen verdünnt sich die Muskelhaut bis auf 0·03 Mm.

Wenn man Einschnürungen oder Knicke, welche an den Nabelgefässen so oft vorkommen und gegen das Innere leistenartig vorspringen, am injicirten Nabelstrange mikroskopisch untersucht, so findet man, dass die Structur der Gefässwand unverändert bleibt, und die letztere in ihrer ganzen Dicke die Einknickung mitmacht. Man hat es also mit Falten, nicht mit Klappen, weder im anatomischen noch im physiologischen Sinne zu thun.

---

[1] Der unregelmässige und wechselvolle Verlauf der Fasern und die verschiedenartige Abgrenzung der Media im intra- und im extra-abdominalen Theile ist schon in der Arbeit von Simbert (Structure des vaisseaux du cordon ombilical. Comptes rendus des séances et mémoires de la société de Biologie. Paris 1867) erwähnt; mit seinem Gesammt-Urtheile stimme ich aber wenig überein, denn er beginnt seine Conclusions mit den Worten: „La structure des vaisseaux ombilicaux ne diffère pas de la structure générale des vaisseaux sanguins.“

Partielle Erweiterungen des Gefässschlauches zeigen einen merkwürdigen Unterschied in der Dicke der Wand. An einer Seite des Gefässumfanges ist die Wand ungemein dick und besteht aus zahlreichen Muskelschichten; an der anderen Seite dagegen, wo die Erweiterung stattgefunden hat, ist sie sehr dünn und besteht meist lediglich aus Ringsfasern. Um dies anschaulicher zu machen, habe ich zwei Zeichnungen, Fig. 4 und 5, von solchen partiellen Erweiterungen gegeben. Man sieht zu unterst die nicht erweiterte verdickte Partie der Wand mit ihren zahlreichen Schichten von Muskelfasern, nach aufwärts den erweiterten Theil der Wand, bestehend aus wenig zahlreichen Schichten von Ringsfasern. Dazwischen das Lumen, welches grossentheils von geronnenem Blute ausgefüllt ist. Die Bilder sind so auffallend, dass man auf den ersten Anblick glauben sollte, man habe es mit Blutextravasaten zwischen die Schichten der Arterienwand zu thun. Ich habe mich aber entschieden überzeugt, dass dem nicht so war, denn erstens habe ich in dem verdickten Theile keine Spur eines Lumens gefunden, und andererseits war es mir möglich, von der polsterartigen Oberfläche eben dieses verdickten Theiles Faserzüge direct in den verdünnten Theil der Arterienwand zu verfolgen. Ich muss es indessen unentschieden lassen, ob irgend ein Mal in einer früheren Periode der Entwickelung das Blut hier durch eine Zerreissung in ein neues Strombett abgelenkt wurde, oder ob die höchst auffallende Asymetrie nur in dem ungleichen Impulse oder im ungleichen Widerstande, welchen dasselbe fand, ihren Grund hat.

An anderen Stellen kommt es, wie ich oben erwähnte, vor, dass die innere Oberfläche der Arterienwand der Länge nach gefurcht erscheint. Macht man hier Querschnitte, so sieht man, dass an den den Furchen entsprechenden Stellen die Muskelhaut bis etwa zur Hälfte verdünnt ist; die Fasern sind dabei an diesen Stellen mehrfach durcheinander geschoben und unregelmässig gelagert. Elastische Elemente finden sich hier reicher vor, als anders wo. Das Zwischenstück zwischen je zwei Furchen wendet dem Lumen einen convexen Bogen zu; auch die Querfasern beschreiben im inneren Theile der Gefässwand dem entsprechend Bogenlinien.

An diese Form der Abweichungen reiht sich eine andere an, welche ich oben unter dem Namen der Polster makroskopisch beschrieben habe. Sie unterscheiden sich dadurch von den Zwischenstücken zwischen zwei Furchen, dass sie gegen das Lumen des Gefässes hin über das allgemeine Niveau der inneren Wand hervorragen, also positive Verdickungen derselben darstellen, und auch nicht immer seitlich von Furchen begrenzt sind.

Fig. 6 habe ich ein solches Polster im Querschnitt dargestellt. An der einen Seite desselben befindet sich eine deutliche Furche, an der anderen nicht. Man sieht auch hier die schon ohne Weinsäure zu Tage tretenden elastischen Elemente und die Convexität der inneren Schichten. Das Polster, dem diese Zeichnung entnommen wurde, lag etwa einen Centimeter nach innen vom Nabelring. Die Anordnung der elastischen Fasern zeigt ganz deutlich, dass bei der Zusammenziehung der Arterienwand das Polster noch weiter in das Lumen hineinragt und so dem Blutstrome ein wesentliches Hinderniss entgegensetzen kann.

Wir gehen hiemit zu unserem eigentlichen Thema über, zu der Frage nach den Mitteln, welche den Verschluss der Nabelarterien bedingen können. Es ist keine Frage, dass die eben erwähnten Polster dazu sehr geeignet wären, wenn man sich denkt, dass die übrige Arterienwand sich um sie zusammenzöge, aber sie kommen nicht überall vor und nicht gerade da, wo, wie wir später sehen werden, der wesentliche Verschluss zu suchen ist. Wir können also den regelmässigen, den physiologischen Verschluss der Nabelarterien nicht von ihnen ableiten. Dasselbe gilt von den gefurchten Partien der Arterienwand. Auch Stellen, wie die Fig. 4 und 5 dargestellten, würden sich wahrscheinlich für den Verschluss eignen; aber auch sie kommen nicht regelmässig und nicht an der Stelle des wesentlichen Verschlusses vor, und gerade sie findet man nach dem Tode nicht zusammengezogen, sondern von angehäuftem Blute ausgedehnt. Man braucht auch gar nicht nach besonderen Einrichtungen zu suchen, denn die Nabelarterie als solche ist schon durch ihren Reichthum an Muskelfasern und durch ihre Armuth an elastischen Elementen befähigt, ihr Lumen vollständig zu verschliessen. Die günstigsten Stellen dafür sind diejenigen, wo, wie dies ja meistens der Fall

ist, die grosse Masse der Ringfasern nach aussen, die Längsfasern nach innen liegen. Hier verkleinert sich beim Zusammenziehen der Ringfasern nicht einfach das drehrunde Lumen, sondern die Längsfasern werden nach einer Seite leistenartig hervorgedrängt, so dass das Lumen auf dem Querschnitte halbmondförmig wird und sich bei weiterer Zusammenziehung der Ringfasern vollständig schliesst. Ich habe dieses Stadium des halbmondförmigen Querschnittes in Fig. 7 dargestellt nach einem Durchschnitte, den ich durch eine normale Nabelarterie gemacht habe. In dieser Weise kann sich also die Nabelarterie in verschiedenen Theilen ihres Verlaufes zusammenziehen. Sie thut es offenbar nach dem Tode, wie wir dies schon früher gesehen haben, vielleicht auch während des Lebens bald nach der Geburt des Kindes. [1]

Es handelt sich aber für uns um etwas Anderes, es handelt sich darum, dass zwischen der Arteria hypogastrica einerseits und der Stelle, an welcher wir gewöhnlich zu durchschneiden pflegen, andererseits irgend wo ein regelmässiger Verschluss stattfinden muss, da, wie wir früher gesehen haben, nachdem das Klopfen der Nabelschnur aufgehört hat, die durchschnittenen und nicht unterbundenen Nabelgefässe in der Regel nicht bluten. Dieser Verschluss muss aufgesucht werden.

Ich habe zu diesem Zwecke 9 Kinder untersucht, welche nach dem Unterbinden der Nabelschnur gestorben waren, theils während der Rest des Nabelstranges noch saftig war, theils nachdem derselbe bis zu einem gewissen Grade eingetrocknet war.

---

[1] In gleichem Sinne sagt Virchow: „Die Nabelarterien pflegen sich nach der Geburt gleichfalls allmälig zu verengern und gerade bei ihnen kann die musculöse Natur der sich verengenden Elemente um so weniger fraglich sein, als wenige Gefässe eine so kräftige Ringsfaserhaut (Muscularis) besitzen. Gerade diese energische Wirkung der starken Muscularis erklärt es, dass trotz des relativ grossen Seitendruckes des Blutes im regelmässigen Gange diese Arterien sich bis auf ein ganz kleines Lumen zusammenziehen und dass der Thrombus, der sich in ihnen bildet, einen sehr geringen Umfang hat. Denn allerdings ist hier die Thrombose die Regel und sie lässt sich einfach nach den Erfahrungen der Arterienligatur deuten.“. (Gesammelte Abhandlungen zur wissenschaftl. Medicin. Frankfurt a. M. 1856. Seite 592.)

In allen diesen Fällen waren die Nabelgefässe nach innen vom Nabelringe dicker, als ich sie bei unter der Geburt verstorbenen Kindern gefunden hatte: im Nabelringe selbst aber habe ich sie nicht verdickt gefunden. An der äusseren Oberfläche desselben bemerkte man ein reich entwickeltes Netz von Vasa vasorum. Beim Aufschlitzen findet man einen gewöhnlich sehr dünnen Thrombus im intraabdominalen Theile. Derselbe ist nach Form und Länge sehr verschieden; manchmal hat er mehrere durch dünne fadenförmige Verbindungen mit den anderen verbundene Verdickungen, manchmal fehlt eine solche Verbindung ganz, so dass getrennte spindelförmige Thromben vorhanden sind. Der Thrombus beginnt da, wo die letzten Äste von der Nabelarterie abgegangen sind und erstreckt sich bis auf eine grössere oder geringere Entfernung vom Nabelring. Nur in einer von den 18 untersuchten Nabelarterien habe ich den Thrombus noch in einiger Dicke durch den Nabelring hindurchgehen gesehen. Hier war er vor und hinter dem Nabelringe bedeutend dünner als im Nabelringe selbst. In zwei anderen Fällen liess er sich durch den Nabelring verfolgen, war aber daselbst fadenförmig verdünnt. In allen übrigen Fällen reichte er nicht bis in den Nabelring hinein. In einem Falle war an beiden Arterien das intraabdominale Stück bis zur Abgabe der letzten Äste contrahirt und leer, in zwei anderen Fällen war dies so mit nur einer Arterie. Einer dieser letzteren Fälle betraf gerade das Kind, dessen andere Nabelarterie im Nabelringe einen verhältnissmässig dicken Thrombus hatte.

Ich habe hier im Wesentlichen den Befund anderer Beobachter bestätigt. In der That muss er jedem entgegentreten, der in diesem Stadium eine Anzahl von Nabelarterien aufschlitzte. Schon Notta erwähnt der Kleinheit des Thrombus und dessen relativ nicht seltenes Fehlen (Mémoire sur l'oblitération des artères ombilicales et sur l'artérite ombilicale. — Mémoires de l'Académie imp. de médec. Tom. XIX. Paris 1855, pg. 7) und eben so Virchow, dessen Worte ich schon oben erwähnt habe.

Aus meinen eigenen, sowie aus den fremden Befunden muss ich schliessen, dass für das Aufhören der Pulsation des Nabelstranges eine Contraction der Nabelarterien im Nabelringe und

in grösserer oder geringerer Ausdehnung nach innen von demselben die wesentliche Ursache sei. Es schliesst dieses nicht aus, dass sich die Nabelarterien auch in grosser Ausdehnung ausserhalb des Nabelringes contrahiren; aber für unsere Frage kommt immer nur der Theil der Arterien in Betracht, welcher stromaufwärts von den untersuchten, beziehungsweise durchschnittenen Stellen liegt.

Wenn ich mich frage, was die Ursache für diese Contraction sein kann, so bieten sich mir drei Möglichkeiten dar, die jede für sich nichts Unwahrscheinliches haben.

1. In der Regel sinkt die Temperatur des Nabelstranges, sobald das Kind geboren ist, durch den Einfluss der atmosphärischen Luft, und diese Temperaturerniedrigung kann direct und an und für sich schon eine Contraction der Ringsmuskelfasern bewirken.
2. Die atmosphärische Luft wirkt auf die Haut und auf die Respirationsoberfläche des Kindes, und hiedurch kann ein Reiz ausgeübt werden, der auf reflectorischem Wege eine Zusammenziehung der Nabelarterien hervorruft.
3. Mit dem Uebergange von intrauterinen zum extrauterinen Leben, mit dem Beginn der Respiration und der durch ihn bedingten Veränderung des Blutkreislaufes kann ein innerer Vorgang verbunden sein, der eine Zusammenziehung der Nabelarterien zur nothwendigen Folge hat. Es scheint auf den ersten Augenblick, dass ein unter allen Umständen eintretender innerer Vorgang die wahrscheinlichste Ursache sei für einen Act von so hoher physiologischer Bedeutung. Dass die Puncte eins und zwei aber nicht ohne Weiteres als unwesentlich betrachtet werden können, beweist die Thatsache, dass bei Kindern, welche man mit durchschnittenem aber nicht unterbundenem Nabelstrange in ein warmes Bad setzt, Blutungen aus den Nabelgefässen eintreten.

Die Nabelvene.

Bei der Blosslegung der Nabelvene findet man in deren Wand eine grosse Anzahl von Falten, welche bei der Ausstreckung

derselben vollständig verschwinden, ohne auf der inneren Oberfläche irgend eine Spur zu hinterlassen. Erweiterungen, sowohl partielle als solche, welche die ganze Circumferenz betreffen, kommen hier noch häufiger vor als bei den Arterien. Ganz kleine hirsekorngrosse partielle Erweiterungen sind hier dagegen viel seltener als in den Arterien. Die innere Oberfläche ist vollkommen glatt und von gleichmässigem Aussehen. Furchen oder polsterartige Gebilde kommen hier nicht vor.

Die Muskelfasern sind im Nabelstrangstheile gewöhnlich so angeordnet, dass die Längsfasern nach innen die Ringsfasern nach aussen liegen: doch kommen auch hier Abweichungen vor, wenn auch seltener als bei den Nabelarterien. So habe ich zu beiden Seiten der Ringsfasern Längsfasern gesehen und in anderen Fällen noch solche zwischen den Lagen der Ringsfasern. Eine selbstständige elastische Intima habe ich in dem Nabelstrangstheile nicht gefunden. Die elastischen Elemente sind überhaupt noch spärlicher vorhanden als in den Arterien und die einzelnen elastischen Fasern sind sehr fein. Die Muscularis ist gegen die Adventitia scharf abgegrenzt und die letztere enthält nur ausnahmsweise vereinzelte Muskelfasern. In der Gegend des Nabels wird die Grenze zwischen Muscularis und Adventitia weniger deutlich, weil sich das Bindegewebe immer reichlicher in die Muscularis hineinwebt, so dass 2—3 Centimeter nach innen vom Nabelring das Bild des Durchschnittes (am lehrreichsten sind die Längsschnitte) sich ganz anders darstellt. Von hier an unterscheidet sich der Bau der Nabelvene nicht mehr wesentlich von dem der übrigen grösseren Venen des neugeborenen Kindes. Die Wand der Vene ist im allgemeinen dünner als die der Arterien, jedoch ist dies, namentlich im Nabelstrangstheile, weniger auffallend als bei den Körpervenen und Körperarterien.

Bei den vorerwähnten neun Kindern, an welchen ich den Verschluss der Arterien untersuchte, habe ich nur zweimal einen Thrombus gefunden. Derselbe war im intraabdominalen Theile verhältnissmässig dick, spitzte sich aber gegen den Nabelring zu und setzte sich hier wie ein ganz feiner Faden fort. In den übrigen sieben Fällen war die Nabelvene im Nabelring und nach

innen davon, so weit ich das Gefäss herausgenommen hatte, gewöhnlich 3—4 Cent. weit leer. Auch Virchow und Robin (Mémoire sur la rétraction, la cicatrisation et l'inflammation des vaisseaux ombilicaux etc. Mémoires de l'académie impériale de médecine. Tome XXIV. Paris 1860. pg. 413) erwähnen, dass hier ein Thrombus relativ selten in der Vene vorhanden ist. Es scheint also, dass, wenn kein Blut aus der Placenta mehr nachfliesst, der Inhalt der Nabelvene sich normaler Weise vollständig in den Körperkreislauf des Kindes entleert, und die spätere Obliteration, sei es auf kürzere sei es auf längere Strecke, wie schon Virchow annimmt, ohne Thrombose zu Stande kommt.

Erklärung der Zeichnungen.

Fig. 1. Längsschnitt der Nabelarterie ungefähr aus der Mitte des Nabelstranges. Die innere Schichte der Muskelhaut *a* besteht aus Längsmuskelfasern, die äussere *b* aus quer und schräg durchschnittenen. Die Adventitia *c* enthält vereinzelte Muskelelemente. Vergrösserung 280.

„ 2. Längsschnitt der Nabelarterie aus dem Nabelstrange in der Nähe des Nabels. Die ganze Breite der Wand besteht aus quergeschnittenen Muskelfasern; *a* der innere Theil, *b* der äussere der Muskelhaut, *c* Adventitia. Vergrösserung 260.

„ 3. Der intraabdominale Theil der Nabelarterie in der Nähe des Nabels, Längsschnitt. Die ganze Arterienwand besteht aus längsverlaufenden Muskelfasern. Die Buchstaben *a b c* bedeuten dasselbe wie bei Fig. 2. Vergrösserung 280.

„ 4 u. 5. Querschnitt der Nabelarterie an der Stelle der partiellen Erweiterung. An einer Seite ist die Gefässwand dick, an der anderen ungemein verdünnt. Coagulirtes Blut füllt das Lumen grossentheils aus. Vergrösserung in Fig. 4 = 58 in Fig. 5 = 50.

„ 6. Querschnitt der Nabelarterie gleich nach innen vom Nabel. Die Arterienwand zeigt eine polsterartige Erhabenheit. An einer Seite am inneren Rande der Gefässwand sieht man stark geschlängelte elastische Fasern, welche dann in das Polster hineindringen. In der Adventitia bemerkt man schon die Vasa vasorum. Vergrösserung 145.

„ 7. Querschnitt der normalen Nabelarterie im Nabelstrange, stellt die Art des Verschlusses dar. Vergrösserung 55.

Fig. 4

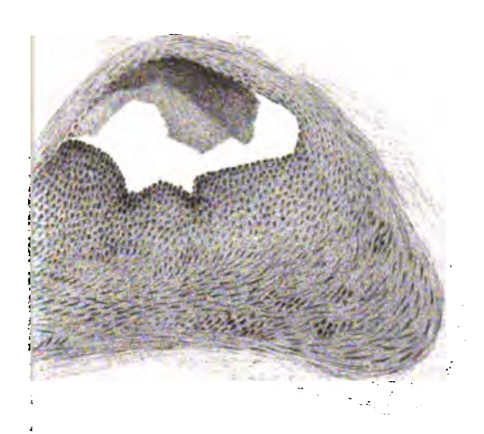


Fig. 5



Fig. 6

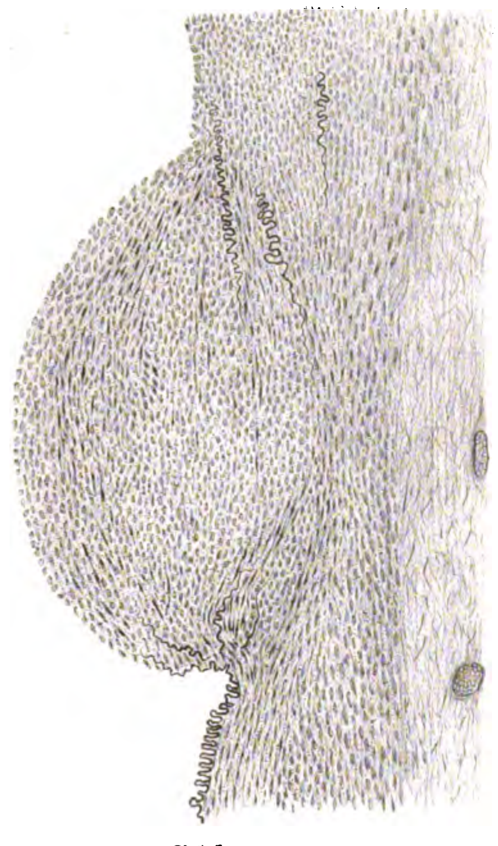
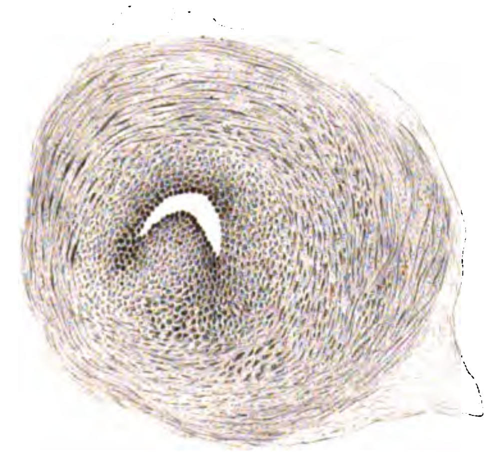
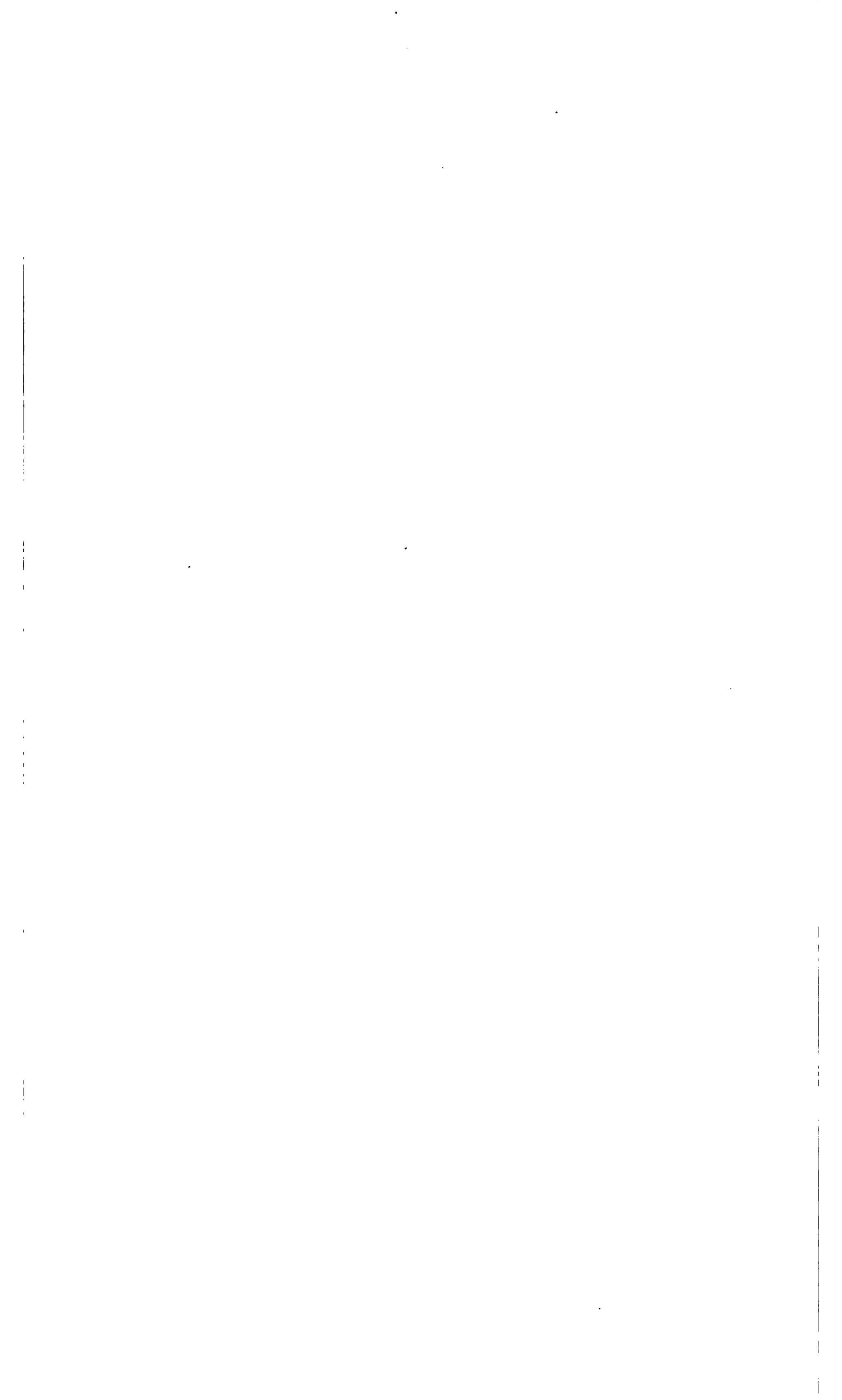


Fig. 7





XX. SITZUNG VOM 23. JULI 1874.

Herr Hofrath Dr. Theodor Billroth dankt, mit Schreiben vom 23. Juli, für seine Wahl zum wirklichen Mitgliede der Akademie.

Herr Prof. Dr. Alex. Rollett in Graz übersendet eine Abhandlung des Herrn Prof. V. v. Ebner: „Untersuchungen über das Verhalten des Knochengewebes im polarisirten Lichte."

Herr Hofrath Dr. K. Langer übermittelt eine Abhandlung: „Studien über die Entwicklung der Extremitäten des Menschen, insbesondere der Gelenkflächen," von den Herren Prof. W. Henke in Prag und Privatdocenten Karl Weyher in Dorpat.

Herr Prof. Dr. Ad. Lieben in Prag übersendet eine für den Anzeiger bestimmte Notiz „über Synthese von Alkoholen mittelst Bichloräthers."

Herr Hofrath Dr. E. v. Brücke legt eine Abhandlung: „Über das Verhalten der entnervten Muskeln gegen den constanten Strom" vor.

Herr Prof. Dr. V. v. Lang übergibt eine Abhandlung des Herrn Dr. J. Puluj: „Über die Reibungsconstante der Luft als Function der Temperatur." II.

Derselbe übergibt ferner eine weitere Folge seiner „krystallographisch-optischen Bestimmungen."

Herr Regierungsrath Dr. Fried. Rochleder überreicht eine Abhandlung des Herrn Zd. Hans Skraup: „Zur Kenntniss der Rhabarberstoffe Chrysophansäure und Emodin."

Herr Prof. Dr. A. Winckler legt eine Abhandlung: „Integration verschiedener Differentialgleichungen zweiter Ordnung" vor.

Herr Hofrath Dr. H. Hlasiwetz legt seine erste, gemeinschaftlich mit Herrn J. Habermann durchgeführte Abhandlung: „Über das Gentisin" vor.

Derselbe übergibt ferner die Nummern 20 und 21 der „Mittheilungen aus dem chemischen Laboratorium der Universität Innsbruck, u. zw.: *a)* „Über die Constitution der Dioxybenzoësäure," von den Herren L. Barth und C. Senhofer, und *b)* „Über Benzoltrisulfosäure," von Herrn Senhofer.

Herr Hofrath Hlasiwetz übergibt endlich eine für den Anzeiger bestimmte Notiz, als Nachtrag zu der Untersuchung des Herrn Dr. Weidel „über das Cinchonin."

Der Secretär v. Schrötter macht eine Mittheilung über eine Arbeit, betreffend die Verbindung des Goldes mit dem Schwefel, welche er gemeinschaftlich mit dem Haupt-Münzamts-Chemiker, Herrn Dr. Přiwoznik, ausgeführt hat.

Derselbe hinterlegt ferner ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung seiner Priorität.

Herr Privatdocent Dr. Sigm. Exner überreicht „Kleine Mittheilungen physiologischen Inhalts."

Herr Alfred Burgerstein, Assistent am pflanzenphysiologischen Institute der Wiener Universität, legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Untersuchungen über das Vorkommen und die Entstehung des Holzstoffes in den Geweben der Pflanzen."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Belgique: Bulletin. 42e Année, 2e Série, Tome 36, Nrs. 1—12. (1873); 43e Année, 2e Série, Tome 37, Nrs. 1—5. (1874.) Bruxelles; 8⁰.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. April 1874. Berlin; 8⁰.

Annalen (Justus Liebig's) der Chemie und Pharmacie. N. R. Band 96, Heft 2. Leipzig & Heidelberg, 1874; 8⁰.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 21. Wien, 1874; 8⁰.

Astronomische Nachrichten. Nr. 2001—2002 (Bd. 84. 9—10.) Kiel, 1874; 4⁰.

Bergwerks-Betrieb, Der — Österreichs im Jahre 1873. I. Theil. (Tabellen.) Herausgegeben vom k. k. Ackerbau-Ministerium. Wien, 1874; kl. 4⁰.

Berlin, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1873/74. 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 1. Paris, 1874; 4°.

de la Rive, und Ed. Sarasin, Einige Versuche über die Wirkungen des Magnetismus auf die elektrischen in der Verlängerung der Axe des Magneten stattfindenden Entladungen in einem verdünnten Gas. (Aus Poggendorff's Annalen.) 8°.

Favero, Valentino, La costituzione fisica delle Comete. Bassano, 1874; 8°.

Gesellschaft, k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XVII (neuer Folge VII). Nr. 6. Wien, 1874; 8°.

— Deutsche, für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mittheilungen. 4. Heft. Yokohama; 4°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 14. Wien, 1874; 4°.

— Deutsche geologische: Zeitschrift. XXVI. Band, 1. Heft. Berlin, 1874; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 29; Wien, 1874; 4°.

Isis: Sitzungsberichte. Jahrgang 1874, Januar bis März. Dresden; 8°.

Ludwig. C., Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig. VIII. Jahrgang: 1873. Leipzig, 1874; 8°.

Montigny, Ch., La fréquence des variations de couleurs des étoiles dans la scintillation est généralement en rapport avec la constitution de leur lumière d'après l'analyse spectrale. Bruxelles, 1874; 8°.

Nature. Nr. 246, Vol. X. London, 1874; 4°.

Naturforscher-Verein zu Riga: Correspondenzblatt. XX. Jahrgang. Riga, 1874; 8°.

Nuovo Cimento. Serie 2ª, Tomo XI. Maggio e Giugno 1874. Pisa; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1874, Nr. 10. Wien; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". IVᵉ Année, 2ᵉ Série, Nr. 3. Paris, 1874; 4°.

Société Entomologique de France: Annales. V[e] Série. Tome III[e]. Paris, 1873; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 29. Wien, 1874; 4⁰.

Société Linnéenne du Nord de la France: Mémoires. Tome III[e]. Années 1872 & 1873. Amiens, 1873; 8⁰. — Bulletin mensuel. 2[e] Année. (1873.) Nrs. 17—18; 3[e] Année. (1874.) Nrs. 19—22. Amiens; 8⁰.

Untersuchungen über das Verhalten des Knochengewebes im polarisirten Lichte.

Von Prof. **V. v. Ebner** in Graz.

(Mit 2 Holzschnitten und 1 Tafel.)

Die lebhaften Discussionen, welche in der neuesten Zeit über das Wachsthum der Knochen geführt werden, gaben mir den ersten Anstoss zu den nachfolgenden Untersuchungen. Mit dem Studium der Resorptionsflächen der Knochen beschäftigt, dachte ich daran, die Umgebung der Howship'schen Lacunen mit dem Polarisationsmikroskope zu untersuchen. Es zeigte sich an senkrechten Durchschnitten, dass diese Lacunen in ihrer eigenthümlichen Natur hiebei besonders deutlich hervortreten; nämlich als offenbar secundär entstandene Lücken in ursprünglich regelmässig abgelagerten Knochenlamellen.

Eine weitere Verfolgung dieser Thatsache könnte aber nur dann von Interesse sein, wenn wir über den Zusammenhang der am Knochen zu beobachtenden Polarisationserscheinungen mit der mikroskopischen Struktur des Knochengewebes genau unterrichtet wären.

Dies ist aber keineswegs der Fall, da die bisher vorliegenden Untersuchungen von Wilhelm Müller[1] und Valentin[2] Resultate ergaben, welche in unlösbarem Widerspruche stehen. Während W. Müller behauptet, die Knochengrundsubstanz sei positiv einaxig mit den Havers'schen Kanälen parallel gerichteter Hauptaxe, vermuthet Valentin, auf Grund seiner Beobachtungen, die Knochensubstanz sei negativ einaxig mit senkrecht

---

[1] Zeitschrift für rationelle Medicin. 3. Reihe, X. Band, p. 187.

[2] Die Untersuchung der Pflanzen- und Thiergewebe in polarisirtem Lichte. Leipzig 1861. p. 255.

auf die Lamellen gerichteter Hauptaxe. Valentin hat gegen W. Müller dargethan, dass die zwischen gekreuzten Nicols an vielen Querschnitten Havers'scher Lamellensysteme sichtbaren Kreuze nicht von einem senkrecht oder schief zur optischen Axe durchschnittenen optisch einaxigen Körper herrühren können; dagegen Erscheinungen zeigen, welche sich unter der von ihm gemachten, eben erwähnten Voraussetzung erklären lassen. Andererseits lässt sich die von W. Müller gemachte Beobachtung, dass an Röhrenknochen sehr viele Querschliffe Havers'scher Kanäle eine Umgebung zeigen, welche bei der Drehung zwischen den gekreuzten Nicols in allen Azimuthen dunkel erscheint, unter der Voraussetzung Valentin's nicht erklären. Man müsste denn die, nach Allem, was man vom Baue der Knochen weiss, unzulässige Annahme machen, dass Havers'sche Kanäle vorkommen, welche das Knochengewebe senkrecht zur Fläche der Lamellen durchbohren.

Es ist also kein Zweifel, dass die am Knochen beobachteten Polarisationserscheinungen durch keine der beiden erwähnten Annahmen, wenigstens in der bisher vorliegenden Form sich erklären lassen, und ich entschloss mich daher, den Gegenstand neuerdings aufzunehmen.

Es handelte sich zunächst darum, sich klar zu machen, welche Strukturverhältnisse des Knochens als Anhaltspunkt zur Bestimmung der Lage der Elasticitätsaxen dienen könnten. Es scheint beinahe selbstverständlich, dass dieser Anhaltspunkt nichts Anderes sein kann als die Knochenkörperchen. Nach dem heutigen Stande der Histologie können wir von vornherein annehmen, dass die Struktur der Knochengrundsubstanz eine gewisse Abhängigkeit von den Knochenzellen haben muss, da sie ja von diesen aus gebildet wird. Es ist daher auch vorauszusetzen, dass die optischen Eigenschaften der Grundsubstanz in einer ganz bestimmten Beziehung zu den Knochenkörperchen stehen werden; ja würde die Untersuchung mit dem Polarisationsmikroskope eine solche Beziehung nicht ergeben, so müsste uns dies in hohem Grade befremden. Es liesse sich ein solches Resultat mit dem, was wir als sicheres Ergebniss der neueren Untersuchungen über die Genese des Knochengewebes betrachten, nur schwer in Übereinstimmung bringen.

Ist es schon auf diese Weise theoretisch gerechtfertigt, die Elasticitätsaxen der Knochengrundsubstanz in ihren Beziehungen zu den Knochenkörperchen aufzusuchen, so empfiehlt sich ein solches Verfahren noch insbesondere durch die ausserordentlich günstige Gestalt dieser Gebilde, welche es in den meisten Fällen möglich macht, drei auf einander senkrechte Richtungen des Raumes im Knochengewebe ohne besondere Schwierigkeit zu unterscheiden.

Trotz dieser günstigen Verhältnisse ist den Knochenkörperchen weder von Valentin noch von W. Müller die gehörige Berücksichtigung zu Theil geworden.

Valentin bringt seine Angaben nur in Beziehung zu den Knochenlamellen. Schon diese Grundlage der Beobachtungen muss einigermassen mit Misstrauen gegen die Zuverlässigkeit derselben erfüllen, da ohne Zuhilfenahme der Knochenkörperchen sich an den Knochenlamellen ausser der Dickenrichtung nur die Fläche im Allgemeinen, nicht aber eine bestimmte Richtung in derselben, unterscheiden lässt. W. Müller benützt zur Orientirung den Verlauf der Gefässkanäle, was desswegen nicht angeht, weil deren Vertheilung und Anordnung eine Eigenthümlichkeit der Knochen als Organe, nicht aber des Knochens als Gewebe ist. Abgesehen davon, dass es ziemlich umfangreiche Strecken von Knochengewebe gibt, die der Havers'schen Kanäle entbehren, steht die Struktur der Knochensubstanz auch dort, wo sie in Form concentrischer Lamellen um die Havers'schen Kanäle angeordnet ist, mit dem Verlauf dieser letzteren nur in loser und wechselnder Beziehung. Es war ein die Frage verwirrender Irrthum, dass W. Müller die Längsrichtung der Havers'schen Kanäle mit der Längsrichtung der Knochenkörperchen ohne Weiteres zusammenfallen liess. Wenn auch sein Schluss, das Knochengewebe sei positiv einaxig und die optische Axe laufe der Längsaxe der Knochenkörperchen parallel, der Wahrheit, wie später gezeigt werden soll, jedenfalls nahe kommt, so ist doch dieser Schluss aus zum guten Theile unrichtigen Prämissen gezogen.

Mit Rücksicht auf die grosse Bedeutung, welche nach dem eben Bemerkten den Knochenkörperchen für die folgenden Untersuchungen zukommt, dürfte es nicht unzweckmässig sein über Form- und Lageverhältnisse derselben Einiges vorauszuschicken.

Die Knochenkörperchen sind bekanntlich längliche, abgeplattete Gebilde. Sie lassen sich bezüglich ihrer Form allenfalls mit einem Zwetschenkerne vergleichen. Man kann an ihnen einen langen, einen mittleren und einen kurzen Durchmesser unterscheiden.

Kölliker gibt für den Menschen die Dimension des langen Durchmessers mit 22—52 μ., die des mittleren mit 6—14 μ., die des kurzen mit 4—9 μ. an.

Was meine eigenen Messungen anbelangt, so sollen dieselben später mitgetheilt werden; die angeführten Zahlen sind genügend, um die beträchtlichen Grössenunterschiede der drei Durchmesser anschaulich zu machen.

Die von den Knochenkörperchen ausgehenden zahlreichen sogenannten Kalkkanälchen sind nach den übereinstimmenden Beschreibungen und Abbildungen der Handbücher grösstentheils dem kurzen Durchmesser der Knochenkörperchen parallel oder fast parallel, und gehen fast sämmmtlich von der breiten Fläche der Knochenkörperchen aus. Sie erscheinen demgemäss an Schliffen, welche dem mittleren Durchmesser parallel sind, überwiegend quer- und schrägdurchschnitten, während sie an Schliffen die parallel dem kurzen Durchmesser geführt sind, als zahlreiche, fast gerade, unter spitzen Winkeln verzweigte Röhrchen sich darstellen.

Aus dem Angeführten geht hervor, dass die Lage der Durchmesser der Knochenkörperchen aus ihren Dimensionen und dem eigenthümlichen Verlauf der Knochenkanälchen erschlossen werden kann.

Was nun die auf Grund dieser Anhaltspunkte gewonnenen Erfahrungen anbelangt, so ist es eine bekannte Sache, dass die breiten Flächen der Knochenkörperchen oder mit anderen Worten der lange und der mittlere Durchmesser derselben, den Knochenlamellen parallel gerichtet sind, während der kurze Durchmesser auf den Lamellen senkrecht steht. Dagegen ver-

misse ich in der mir zugänglichen Literatur Angaben über das Verhalten der langen und mittleren Durchmesser benachbarter Knochenkörperchen in einer und derselben Lamelle und in aufeinander folgenden Lamellen. Die oben erwähnte Thatsache gibt uns nur den Aufschluss, dass in einem Systeme ebenflächiger, übereinander geschichteter Lamellen sämmtliche kurze Durchmesser der Knochenkörperchen einander parallel sind. Die langen und die mittleren Durchmesser sind aber vielleicht in allen möglichen Azimuthen orientirt?

W. Müller hat als selbstverständlich vorausgesetzt, dass in den Röhrenknochen die langen Durchmesser der Knochenkörperchen der Havers'schen Lamellen sämmtlich den Havers'schen Kanälen parallel laufen.[1] Dies ist jedoch thatsächlich nicht der Fall. Wenn auch die Knochenkörperchen mit ihren langen Durchmessern oft nur wenig gegen die Längsrichtung der Havers'schen Kanäle geneigt sind, so sind sie doch nur ausnahmsweise derselben genau parallel. Es kommen aber auch Havers'sche Lamellen vor, deren Knochenkörperchen mit dem langen Durchmesser senkrecht oder fast senkrecht gegen die Längsrichtung der Havers'schen Kanäle orientirt sind.

Zahlreiche Beobachtungen an Flächenschliffen der Knochenlamellen haben mich ferner belehrt, dass die Längsdurchmesser der Knochenkörperchen aufeinander folgender Lamellen in allen möglichen Richtungen zwischen 0° und 90° gegeneinander orientirt sein können, während sie innerhalb derselben Lamelle eine ziemlich gleichmässige Richtung einhalten. Manchmal findet man eine grössere Zahl von Lamellen übereinander mit ziemlich übereinstimmend orientirten Knochenkörperchen, in anderen Fällen dagegen zeigt Lamelle für Lamelle anders gelagerte Knochenkörperchen. Kurz, die Orientirung dieser Gebilde in der Fläche der Lamellen ist eine sehr wechselnde, wodurch die Lösung der im Folgenden zu behandelnden Fragen bedeutend erschwert wird.

Indem ich nun die Knochenkörperchen zur Unterscheidung verschiedener Richtungen im Knochengewebe benütze, denke ich mir drei aufeinander senkrechte Ebenen durch je zwei Durch-

---

[1] L. c. p. 188.

messer der Knochenkörperchen gelegt, die ich als Hauptebenen des Knochengewebes bezeichnen will. Die erste Hauptebene enthält den langen und den mittleren, die zweite Hauptebene den langen und den kurzen, die dritte Hauptebene endlich den mittleren und den kurzen Durchmesser der Knochenkörperchen.

Die Lage dieser Ebenen ist also ausschliesslich durch die Lage der Knochenkörperchen bestimmt; daher eine ebenso wechselnde, wie die der Knochenkörperchen selbst. Ihre Unterscheidung hat natürlich nur dann einen Sinn, wenn in der That die Orientirung der doppeltbrechenden Elemente im Knochen von der Lage der Knochenkörperchen abhängt.

Es ergibt sich aus den Vorhergehenden, dass es nicht leicht sein wird, Schliffe zu gewinnen, an welchen in grosser Ausdehnung die Knochenkörperchen durchaus gleichmässig orientirt sind. Ich habe mich längere Zeit bemüht, ein in dieser Beziehung ganz entsprechendes Object zu finden, ohne jedoch zu einem befriedigenden Resultate zu gelangen. Das relativ günstigste Object auf welches ich stiess und an welchem die Anordnung der Knochenkörperchen ziemlich einfach sich gestaltet, ist der Oberschenkel des Frosches. An diesem Objecte habe ich zunächst die Anisotropie des Knochengewebes untersucht und erst später konnte ich, geleitet durch die hier gemachten Erfahrungen, auch die sehr wechselvollen Erscheinungen, welche complicirter gebaute Knochen unter dem Polarisationsmikroskope darbieten, einer erfolgreichen Analyse unterziehen.

Über die Herstellung der Präparate habe ich nur wenig zu bemerken. Da es mir auf genaue Beurtheilung der Lage der Knochenkörperchen ankam, so wurden nur Schliffe zur Untersuchung benützt, die theils trocken, theils in Wasser unter das Mikroskop gebracht wurden. Die Sägschnitte wurden mit Bimssteinpulver auf einer Glasplatte geschliffen und sorgfältig auf einem sehr feinkörnigen Schleifsteine polirt. Zur Herstellung von Querschliffen durch den Oberschenkel des Frosches ist eine sehr feine Laubsäge nothwendig.

Der von mir benützte Polarisationsapparat stammt, sowie das Mikroskop selbst aus der Werkstätte von Carl Zeiss in Jena. Der Polarisator ist mit einer Condensorlinse verbunden;

das analysirende Nicol befindet sich im Oculare zwischen Collectiv- und Ocularglas und gibt ein grosses, bei gekreuzter Stellung der Nicols sehr dunkles Gesichtsfeld. Die Einschaltung des Nicols in das Ocular hat aber den Nachtheil, dass die Bilder in ziemlich störender Weise verzerrt werden. Ich sah mich daher genöthigt, in allen jenen Fällen, wo es mir darauf ankam, die Knochenkörperchen scharf zu sehen, das grosse Gesichtsfeld zu opfern und das analysirende Nicol in der gewöhnlichen Weise über dem Oculare anzubringen. Noch bessere Dienste leistete mir als Analysator über dem Oculare ein Kalkspathprisma von Hartnack und Prazmowsky [1], das wegen seiner Kürze ein ziemlich ausgedehntes Gesichtsfeld gibt.

Zur Drehung der Objecte um die verticale Axe des Mikroskopes dient ein 9 Mm. breiter Ring von 6 Ctm. Durchmesser, der einfach auf den Objecttisch aufgelegt wird. Beim Drehen gleitet der Ring mit seinem inneren Umfange auf der Peripherie einer kreisförmigen, etwas aus der Ebene des Objecttisches vorragenden Platte. Diese Platte ist durchbohrt, trägt die Hülse zur Aufnahme des Polarisators und ist für die Axe des Mikroskoptubus gut centrirt. Eine Vorrichtung zur Drehung der Präparate um eine horizontale Axe ist dem Polarisationsapparate von Zeiss nicht beigegeben und ich liess mir daher eine solche nach eigener Angabe anfertigen.

Ein $5^1/_2$ Ctm. langer und $2^1/_2$ Mm. dicker, runder Messingstab (Fig. 1 und 2, *a*) trägt ungefähr in der Mitte seiner Länge eine 18 Mm. lange und 16 Mm. breite durchbohrte Messingplatte (*b*) mit einer 12 Mm. weiten kreisrunden Öffnung. An dem einen Ende trägt der Stab einen zur Ebene der Messingplatte senkrecht stehenden Arm (*c*). Der Stab ruht mit seinen Enden auf 6 Mm. hohen Axenlagern aus Messing (*e*), welche am Boden eines Troges (*tt*) festgekittet sind, und wird durch federnde Klemmen (*f*) gegen dieselben angedrückt.

Der Stab mit der Platte lässt sich mittelst des Armes (*c*), der mit dem Zeiger *c'* (Fig. 2) auf einem Gradbogen (*g*) spielt, drehen und kann nach Lüftung der Klemmen jederzeit leicht aus

---

[1] Poggendorf's Annalen. 1866. Bd. CXXVII (203). p. 494.

dem Troge entfernt werden. Der Gradbogen ist so eingerichtet, dass er auf die parallelen Wände des Troges ($t't'$) aufgesteckt und leicht wieder weggenommen werden kann.

Fig. 1.

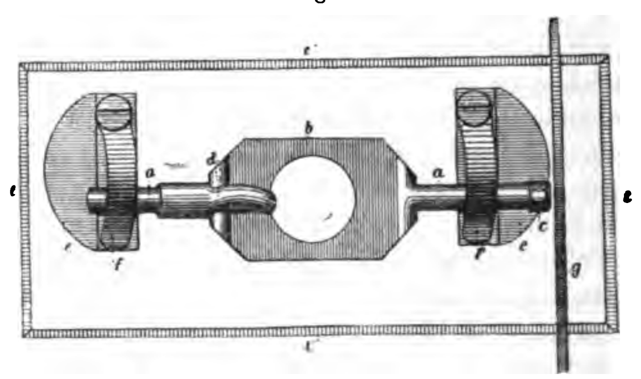
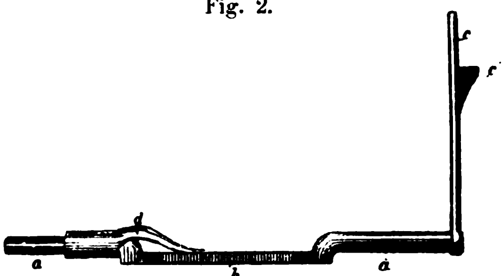


Fig. 2.



Objectträger für Drehungen um die Horizontalaxe. Fig. 1, Ansicht von oben. Fig. 2, drehbarer Stab nebst Platte, von der Seite gesehen.

Der Trog ist 75 Mm. lang, 35 Mm. breit und 18 Mm. tief. Der Boden des Troges wird von einer ebenen Glasplatte gebildet; die Seitenwände sind von Messing. Der ganze Apparat wird wie ein gewöhnlicher mikroskopischer Objectträger auf den Ring für Azimuthaldrehungen gelegt. Damit bei den Drehungen der durchbohrten Platte um die Horizontalaxe der Trog sich nicht verschiebe, genügt es vollständig, die Stellen, wo der Trog auf dem Ringe aufliegt, mit etwas Talg zu bestreichen.

Der Apparat gestattet Drehungen nach links und rechts bis zu 50°. Das Object wird zwischen zwei kleine Deckgläschen gebracht, die man dann, um das Präparat zu fixiren, an einer

oder zwei Stellen des Randes mit Canadabalsam verbindet. Die Stellung des Präparates zur Drehungsaxe geschieht aus freier Hand; ist die gewünschte Stellung erreicht, so dient eine kleine, an der Drehungsaxe verschiebbare Metallfeder (Fig. 1 u. 2, *d*), um die beiden Deckgläschen festzuhalten. Um die Übelstände, welche durch die starke Neigung der Deckgläschen beim Drehen verursacht werden, möglichst zu vermindern, wird der Trog des Apparates während der Beobachtung mit Wasser angefüllt, so dass dann das Object vollständig unter Flüssigkeit gedreht wird. Zu Beobachtungen während der Drehung um die Horizontalaxe kann man selbstverständlich nur Objective von grossem Focalabstand benützen. Das Objectiv *B* von Zeiss, welches bei einem Focalabstande von 7 Mm. eine scharfe 150fache Vergrösserung ergibt, leistete mir sehr gute Dienste.

Eine besondere Einrichtung musste noch getroffen werden, um eine Centrirung des zu beobachtenden Punktes für die Drehungen um die Horizontalaxe zu ermöglichen. Zu diesem Zwecke wurde die durchbohrte Messingplatte etwas unter die Axe des drehbaren Messingstabes gelegt, so dass das Präparat ziemlich genau in die Ebene der Drehungsaxe zu liegen kommt. (Vergleiche die Profilansicht von Stab (*a*) und Platte (*b*) in Fig. 2). Wäre die obere Fläche der Platte einfach die Tangirungsebene des Stabes, so würde dadurch die Beobachtung eines bestimmten Punktes während der Drehung sehr erschwert werden. Da nämlich jeder Punkt, der nicht in der Drehungsaxe selbst liegt, sich während der Drehung seitlich verschiebt, so muss dann diese Verschiebung durch Verrückung des ganzen Apparates in entgegengesetzter Richtung ausgeglichen werden.

Diese seitliche Verschiebung ist aber schon bei einer geringen Entfernung des beobachteten Punktes von der Drehungsaxe sehr merklich, da sie bei der mikroskopischen Beobachtung in demselben Masse vergrössert wird, wie das Präparat selbst. Mit der seitlichen Verschiebung geht, da ja jeder nicht in der Drehungsaxe liegende Punkt einen Bogen beschreibt, auch eine Verschiebung des Punktes in verticaler Richtung einher und es ist deshalb nothwendig, fortwährend die Einstellung des Mikroskopes bedeutend zu ändern. Wie man sieht, wäre unter solchen Umständen die Beobachtung äusserst unbequem. Die gerügten

Übelstände sind ohne Zweifel an dem von Valentin [1] und an dem von Nägeli und Schwendener [2] beschriebenen Apparate vorhanden. Für den ersteren glaube ich dies speciell nachweisen zu sollen, da Valentin, Nägeli und Schwendener gegenüber, so grosses Gewicht darauf legt, dass sein Apparat eine genaue Centrirung zulasse [3]. Die Centrirung am Apparate Valentin's hat aber nur für die Azimuthaldrehungen, nicht aber für die Drehung um die Horizontalaxe eine Bedeutung. Um die Richtigkeit dieser Behauptung zu beweisen, muss ich mich an die von Valentin gegebene Abbildung halten; den Apparat selbst besitze ich nicht.

Nehmen wir an, es sei ein Punkt des Präparates in der von Valentin beschriebenen Weise für die Verticalaxe des Mikroskopes centrirt, so befindet sich derselbe, wenn wir die Dicke des um die Horizontalaxe drehbaren Stiftes auf 2 Mm. und die des darüberliegenden drehbaren Metallringes auf nur 1 Mm. veranschlagen, mindestens 2 Mm. über der Drehungsaxe, wobei die Dicke des Objectträgers noch gar nicht gerechnet ist. Drehen wir nun den Stift um einen beliebigen Winkel, so rückt der centrirte Punkt, wie eine einfache Überlegung ergibt, in der Richtung senkrecht auf die Drehungsaxe um eine dem Sinus des Drehungswinkels proportionale Grösse nach seitwärts. Diese Grösse beträgt bei einem Winkel von $20\frac{1}{2}°$, den Radius von 2 Mm. zu Grunde gelegt, bereits 0·7 Mm. Geschieht nun die Beobachtung bei einer etwa 150maligen Vergrösserung, wobei der wirkliche Durchmesser des Gesichtsfeldes, ganz abgesehen von dem über dem Oculare befindlichen Nicol, kaum mehr als 1·4 Mm. betragen dürfte, so genügt die angeführte Drehung von $20\frac{1}{2}°$, um den ursprünglich centrirten Punkt ganz aus dem Gesichtsfelde zu verlieren. Da nun der drehbare Tisch von Valentin, einmal centrirt, eine seitliche Verschiebung nicht mehr gestattet, so ist es mit demselben, wenn man nicht das Präparat selbst verschiebt, nicht möglich, während ausgiebiger Drehun-

[1] L. c. p. 166.

[2] Das Mikroskop.

[3] Die physikalische Untersuchung der Gewebe. Leipzig und Heidelberg 1867. p. 316.

gen um die horizontale Axe einen bestimmten Punkt des Präparates zu beobachten.

Ich kann nun nicht behaupten, dass die besprochenen Übelstände bei meinem Apparate vollkommen eliminirt sind, doch ist immer so viel zu erreichen, dass der beobachtete Punkt bei Winkeldrehungen bis zu 50° bei 100—150maliger Vergrösserung nicht aus dem Gesichtsfelde verschwindet und dass wenige Drehungen an der Mikrometerschraube genügen, um die genaue Einstellung zu erhalten.

Als wesentlicher Vortheil meiner Vorrichtung ist noch hervorzuheben, dass dieselbe gestattet, das um einen bestimmten Winkel gegen die Horizontalebene gedrehte Object noch durch alle Azimuthe hindurch zu drehen, was für die richtige Beurtheilung der beim Drehen um die Horizontalaxe auftretenden Erscheinungen sehr wichtig ist. Der Apparat Valentin's ist so eingerichtet, dass die Horizontalaxe beim Drehen in einem bestimmten Azimuthe fixirt ist.

Zum Verständnisse der später folgenden Auseinandersetzungen sind noch einige Vorbemerkungen nothwendig.

Der Polarisator wurde stets so gestellt, dass seine Polarisationsebene mit der Reflexionsebene des Beleuchtungsspiegels zusammenfiel; das auffallende Licht wurde mittelst eines an der den Tubus des Mikroskopes aufnehmenden Hülse befestigten Schirmes möglichst sorgfältig abgehalten. Bei Bezeichnung der Azimuthalstellungen werde ich mich der Ausdrucksweise Valentin's [1] bedienen, wobei 0° nach vorne, +45° nach rechts, —45° nach links liegt. Die Polarisationsebene des Polarisators wurde, dem früher Bemerkten entsprechend, stets auf 0° eingestellt.

Sehr häufig benützte ich eine Gypsplatte, welche zwischen gekreuzten Nicols Roth I. Ordnung gibt. Die Lage des Hauptschnittes der Platte wurde nach der von Valentin [2] angegebenen Methode bestimmt, und derselbe stets unter +45° orientirt.

Wo gleichzeitig von Drehungen um die verticale und die horizontale Axe die Rede ist, sind die ersteren durch ein *V.*, die

[1] Die Untersuchung etc. p. 109.
[2] L. c. p. 143.

letzteren durch ein H. kenntlich gemacht. 50° H. unter +45° V. bedeutet z. B. eine Drehung von 50° um die Horizontalaxe im Azimuthe +45°.

Den Ausdruck „Elasticitätsellipsoid" werde ich in demselben (ungewöhnlichen) Sinne, wie Nägeli und Schwendener[1] gebrauchen; nämlich anknüpfend an das Ellipsoid des Glases, wie es durch Druck und Zug aus der Kugel entsteht. Das Elasticitätsellipsoid der negativ einaxigen Krystalle ist nach dieser Auffassung ein an den Polen abgeplattetes, das der positiv einaxigen Krystalle dagegen ein in der Richtung der optischen Axe verlängertes Rotationsellipsoid. Die Bestimmung der Lage des Elasticitätsellipsoides geschah nach den von Nägeli und Schwendener gegebenen Anleitungen, auf welche ich hiemit verweise[2].

Es sollen nun zunächst die Polarisationserscheinungen, welche man am Oberschenkel des Frosches beobachten kann, beschrieben werden.

Die Durchmesser der Knochenkörperchen ergaben für erwachsene Thiere folgende Zahlen: langer Durchmesser 34—60 μ, mittlerer Durchmesser 6—12 μ, kurzer Durchmesser 3·5—6 μ.

Ein Querschliff durch die Mitte des schwach S-förmig gekrümmten Knochens, senkrecht gegen die Axe geführt, zeigt einen compacten Knochenring, der gegen die Markhöhle hin von einer ziemlich regelmässigen Kreislinie begrenzt ist (Fig. 1). Der Ring ist 0·4—0·7 Mm. dick und zeigt zu innerst die Durchschnitte ziemlich regelmässig concentrisch gelagerter Lamellen; lässt dagegen in seinem grösseren äusseren Abschnitte nur undeutlich die lamellöse Structur erkennen, so dass es unmöglich ist die Lamellen zu zählen. Ein solcher Querschliff besteht sozusagen nur aus umfassenden Lamellen und zeigt ein ganz ähnliches Bild, wie der Querschnitt eines Havers'schen Kanales mit seinen Speciallamellen von einem complicirteren

---

[1] Das Mikroskop p. 310 und Beiträge zur wissenschaftlichen Botanik. III. Hft. Leipzig 1863. p. 12.

[2] L. c.

Röhrenknochen eines höheren Thieres. Dieses ziemlich einfache Bild ändert sich aber, wenn man die Querschliffe aus der unteren Hälfte des Knochens entnimmt. Hier finden sich nämlich Gefässe, welche die compacte Knochensubstanz durchsetzen, um in die Markhöhle einzudringen. Die Gefässkanäle sind mit Speciallamellen umgeben und stören so die regelmässige Anordnung der umfassenden Lamellen.

Untersucht man an den zuerst erwähnten, nur aus umfassenden Lamellen bestehenden Querschliffen die Knochenkörperchen, so findet man dieselben gewöhnlich in den innersten Lamellen stark verlängert, 26—40 μ. lang und es ist demnach kein Zweifel, dass die langen Durchmesser der Knochenkörperchen hier senkrecht oder fast senkrecht auf der Längenrichtung des Knochens stehen. Die Zahl dieser Lamellen mit tangential laufenden Knochenkörperchen ist stets eine geringe; nicht selten hatte ich Querschliffe vor mir, an welchen ich sie gänzlich vermisste. Am besten ausgebildet sind sie stets in der oberen Hälfte des Mittelstückes dort, wo sich die erste Krümmung des Knochens befindet.

Alle folgenden Knochenlagen zeigen nun Knochenkörperchen, welche nur 8—14 μ. (im Mittel 8·9 μ.) lang und 4—6 μ. breit erscheinen und es lässt sich daraus schliessen, dass in den äusseren Lamellen die langen Durchmesser der Knochenkörperchen der Knochenaxe parallel, oder nur wenig geneigt gegen dieselbe verlaufen. Zwischen diesen äusseren Knochenlagen und den inneren mit quergerichteten Knochenkörperchen ausgestatteten Lamellen findet sich meistens eine scharfe Trennungslinie, welche muthmasslich von einer Pause in der Knochenablagerung herrührt; andere mehr — weniger scharf ausgeprägte Trennungslinien finden sich in der äusseren Knochenlage. Manchmal erscheinen die innersten Lamellen theilweise zerstört und von Howship'schen Lacunen wie ausgenagt.

Die Lage der Knochenkörperchen lässt sich durch Untersuchung von Querschliffen allein nicht genau bestimmen; Längsschliffe müssen ebenfalls zu Rathe gezogen werden. Fertigt man einen radialen Längsschliff an, so scheint es, dass die Knochenkörperchen in den äusseren Lamellen alle genau einander und der Knochenaxe parallel laufen. Allein solche radiale Längs-

schliffe, an welchen die Lamellen senkrecht durchschnitten sind und die Knochenkörperchen sich sämmtlich im Profile zeigen, sind nicht massgebend. Sie lassen nur die früher schon als allgemein giltig hingestellte Thatsache erkennen, dass die erste Hauptebene des Knochengewebes den Lamellen parallel läuft; die Lage der zweiten Hauptebene lässt sich aber an einem radialen Längsschnitte nicht genau bestimmen, da geringe Neigungen der langen Durchmesser der Knochenkörperchen in der Verticalebene der Beobachtung vollständig entgehen.

Die Lage dieser zweiten Hauptebene des Knochengewebes kann nur an tangentialen Längsschliffen, welche wenigstens zum Theile den Lamellen parallel geführt sind, so dass man die Knochenkörperchen von der Fläche sieht, mit Sicherheit erkannt werden. An solchen Längsschliffen zeigt sich nun, dass die zweite Hauptebene in den äusseren Lamellen fast überall dieselbe Lage hat und der Knochenaxe parallel läuft; man findet wenigstens grosse Strecken an solchen Schliffen, in welchen die langen Durchmesser der Knochenkörperchen keine grösseren Winkel als höchstens von 4°—10° bilden. An manchen Stellen steigen diese Winkel aber allerdings bis auf 12° und 24°.

Die Lage der Knochenkörperchen in den innersten Lamellen lässt sich an den tangentialen Flächenschliffen ebenfalls sicherer erkennen, als am Querschliffe. Man findet, dass ein sehr grosser Theil der Knochenkörperchen mit dem langen Durchmesser senkrecht zur Längsrichtung des Knochens verläuft. Ausser diesen finden sich aber noch andere, die in allen möglichen Richtungen zwischen 0° und 90° orientirt sind; doch behalten in einer und derselben Lamelle die Knochenkörperchen ziemlich dieselbe Richtung bei.

Die gegebene Beschreibung des Froschoberschenkels ist nur giltig für die obere Hälfte des Mittelstückes. In der unteren Hälfte des Knochens, sowie gegen die Gelenkenden hin, sind die Verhältnisse etwas andere. Namentlich erscheinen die Lamellen nicht so regelmässig geschichtet und sind oft gruppenweise gegen einander verworfen, so dass sie weder unter sich, noch mit der Knochenaxe parallel laufen.

Wählen wir zur Untersuchung zunächst einen radialen Längsschliff, an welchem die Knochenkörperchen in regel-

mässiger Anordnung im Längsprofile zu sehen sind. An einem solchen Schliffe steht die erste Hauptebene des Knochengewebes der Verticalaxe des Mikroskopes parallel, während die zweite Hauptebene senkrecht oder auch schief gegen dieselbe gelagert sein kann. Bringt man den Schliff bei gekreuzten Nicols auf den drehbaren Ring, so überzeugt man sich mit grosser Sicherheit, dass derselbe, wenn er genau nach dem langen Durchmesser der Knochenkörperchen orientirt wird, bei 0° und 90° dunkel, bei $\pm 45°$ aber im Maximum hell erscheint.

Die Schlüsse, welche man aus dieser Thatsache mit Bestimmtheit ziehen kann, sind: 1. dass die Knochengrundsubstanz doppeltbrechend wirkt; 2. dass eine der drei Elasticitätsaxen in der ersten Hauptebene des Knochengewebes liegt. Es lässt sich aber noch nicht entscheiden, ob diese Elasticitätsaxe mit der Längsrichtung der Knochenkörperchen zusammenfällt (also auch in der zweiten Hauptebene liegt) oder mit dieser einen Winkel bildet. Darüber müssen tangentiale Längsschliffe Aufschluss geben. Man sucht solche Stellen auf, wo die Knochenkörperchen genau in der Flächenansicht zu sehen sind und mit ihren Längsdurchmessern möglichst parallel laufen. An solchen Stellen fällt die zweite Hauptebene des Knochengewebes mit der Verticalaxe des Mikroskopes zusammen.

Man überzeugt sich nun wiederum an jedem zur Untersuchung geeigneten Schliffe, dass bei Orientirung des langen Durchmessers der Knochenkörperchen unter 0° und 90° der Schliff dunkel, unter $\pm 45°$ dagegen im Maximum hell erscheint. Daraus folgt, dass eine Elasticitätsaxe in der zweiten Hauptebene des Knochengewebes liegt. Nachdem wir aber früher gefunden haben, dass der ersten Hauptebene ebenfalls eine Elasticitätsaxe angehört, so folgt weiter, dass die Richtung einer Elasticitätsaxe mit dem langen Durchmesser der Knochenkörperchen zusammenfallen muss, denn dieser Durchmesser ist die einzige Linie, welche sowohl der ersten als der zweiten Hauptebene, als Durchschnittslinie, angehört.

Eine weitere Bestätigung erhält dieser Schluss durch die Erfahrungen, welche man beim Drehen der eben besprochenen radialen und tangentialen Längsschliffe um die, dem langen Durchmesser der Knochenkörperchen parallel gerichtete Hori-

zontalaxe macht. Man überzeugt sich stets, dass bei Orientirung der Längsdurchmesser der Knochenkörper unter 0° und 90° V. der Schliff am dunkelsten, bei ±45° V. aber am hellsten erscheint, wenn man auch die Drehung um die Horizontalaxe bis auf 50° treibt.

Da die drei Elasticitätsaxen auf einander senkrecht stehen, so wissen wir nun auch durch die bisherigen Versuche, dass die beiden anderen Axen des Elasticitätsellipsoides in der dritten Hauptebene liegen müssen. Über die Lage dieser Axen in der dritten Hauptebene wissen wir aber noch ebensowenig, wie über die relativen Grössen der Durchmesser des Elasticitätsellipsoides. Die beschriebenen Drehungsversuche um die Horizontalaxe lassen nur noch den Schluss zu, dass keine der beiden in der dritten Hauptebene befindlichen Elasticitätsaxen der mit dem langen Durchmesser der Knochenkörperchen zusammenfallenden Axe gleich sei.

Es soll nun zunächst untersucht werden, welche relative Länge der einen, bereits räumlich bestimmten Axe des Elasticitätsellipsoides zukommt. Diese Aufgabe lässt sich dadurch lösen, dass einmal die erste und dann die zweite Hauptebene des Knochengewebes um die gegebene Elasticitätsaxe, respective um den Längsdurchmesser der Knochenkörperchen über der Gypsplatte Roth I. O. gedreht wird. Da der früher beschriebene Apparat Drehungen um die Horizontalaxe nach links und rechts bis zu Winkeln von mehr als 45° gestattet, so wird man, das einemal von der ersten, das zweitemal von der zweiten Hauptebene als Horizontalebene ausgehend, jede auf den langen Durchmesser der Knochenkörperchen senkrechte Richtung des Knochengewebes in jede beliebige Neigung zwichen 0° und 180° zur Horizontalebene bringen können. Es muss also auch möglich sein, sowohl die eine als die andere unbekannte Axe des Elasticitätsellipsoides, welche ja auf der bereits bekannten senkrecht stehen, gleichzeitig mit dieser letzteren in ihrer ganzen Länge in die wirksame Elasticitätsellipse[1] zu bringen.

---

[1] Unter wirksamer Elasticitätsellipse verstehen Nägeli und Schwendener (Mikroskop p. 313) den nach der jeweiligen Richtung der Axen verschiedenen Horizontaldurchschnitt des Elasticitätsellipsoides. Die

Um uns über die relative Länge der Axen der wirksamen Ellipse vor der Drehung zu unterrichten, orientiren wir die Gypsplatte Roth I. O. mit ihrem Hauptschnitte unter +45° V. Es liegt dann die lange Axe der wirksamen Elasticitätsellipse des Gypses unter +45°, die kurze unter —45°. Wird die lange Axe der wirksamen Elasticitätsellipse des Knochens mit der des Gypses gleich orientirt, so muss die Interferenzfarbe steigen; steht sie darauf senkrecht, so muss die Farbe sinken.

Man überzeugt sich leicht, dass sowohl Schliffe parallel der ersten als der zweiten Hauptebene des Knochengewebes constant ein ausgesprochenes Steigen der Farbe bedingen, wenn die Längsdurchmesser der Knochenkörperchen unter +45° orientirt sind, dagegen die Farbe sinken machen, wenn dieselben unter —45° dahin gehen.

Es ist also kein Zweifel, dass die lange Axe der wirksamen Elasticitätsellipse in beiden Ausgangsstellungen für die Drehung mit der bereits bekannten Axe des Elasticitätsellipsoides zusammenfällt. Ist nun eine der unbekannten Elasticitätsaxen der bekannten gleich oder grösser als dieselbe, so müsste man beim Drehen der Horizontalaxe im Azimuthe +45° unzweifelhaft ein Sinken der Interferenzfarbe, im Azimuthe —45° ein Steigen derselben beobachten. Die Versuche ergeben aber mit grosser Bestimmtheit stets das Gegentheil. Sowohl radiale als tangentiale Längsschliffe zeigen, wenn man die Knochenkörperchen mit dem langen Durchmesser unter +45° V. orientirt und nun den Schliff um die dem langen Durchmesser der Knochenkörperchen parallele Horizontalaxe des Apparates nach links und rechts bis zu 50° H. dreht, stets ein unzweifelhaftes Steigen der Farbe, wie es der durch das Drehen bedingten Verdickung der wirksamen Knochenschichte entspricht, man mag den Versuch so oft und an so vielen Stellen wiederholen, als man will. Ebenso constant sinkt die Farbe, wenn die Drehung um die Horizontalaxe im Azimuthe —45° erfolgt.

Lage und relative Länge der Axen dieser wirksamen Ellipse, die unter Umständen auch in einen Kreis übergehen kann, ist für die unter dem Polarisationsmikroskope zu beobachtenden Erscheinungen massgebend.

Aus diesen Versuchen geht unzweifelhaft hervor, dass **die in der Längsrichtung der Knochenkörperchen dahingehende Axe des Elasticitätsellipsoides die längste ist.**

Es handelt sich nun noch darum, die Lage und relative Länge der beiden kürzeren in der dritten Hauptebene befindlichen Elasticitätsaxen zu ermitteln, vorausgesetzt, dass in dieser Ebene überhaupt zwei Axen von verschiedener Länge vorhanden sind.

Untersucht man einen Querschnitt des Froschoberschenkels, wie solche früher beschrieben wurden, so darf man hoffen, in dem grössten Theile der äusseren Lamellen reine Querschliffe von Knochenkörperchen, mit anderen Worten die dritte Hauptebene in der Schliffebene zu haben. Überall kann dies allerdings nicht der Fall sein, da ja die langen Durchmesser der Körperchen, wie aus der früher gegebenen Beschreibung hervorgeht, nicht durchaus der Knochenaxe genau parallel laufen. Leider lässt sich am Querschliffe nicht mit Bestimmtheit entscheiden, ob an irgend einer, gerade ins Auge gefassten Stelle die Knochenkörperchen wirklich genau senkrecht zum langen Durchmesser durchschnitten sind. Dieser Umstand wird die Lösung der jetzt gestellten Aufgabe namentlich dann erschweren, wenn die beiden gesuchten Axen des Elasticitätsellipsoides nur wenig an Grösse verschieden sind. Es ist mir auch, wie ich gleich hier bemerken will, in der That nicht gelungen, mit Sicherheit zu entscheiden, ob in der dritten Hauptebene zwei verschiedene Elasticitätsaxen vorhanden sind oder nicht; mit anderen Worten, ob die Knochensubstanz optisch zweiaxig oder positiv einaxig ist.

Bringt man einen Querschliff zwischen gekreuzten Nicols auf den Drehring, so zeigt derselbe folgende Erscheinungen: Die innersten Lamellen des Knochenringes leuchten dort, wo die Tangente des Ringes unter $\pm 45°$ dahingeht, hell auf, erscheinen dagegen schwarz dort, wo die Tangente unter 0° und 90° orientirt ist. Dieser innerste Ring im Ganzen betrachtet zeigt also ein dunkles Kreuz auf hellem Grunde, dessen beide Arme, wenn der Ring genau kreisförmig ist, unter 0° und 90° orientirt sind. (Fig. 2.) Es erklärt sich dies einfach dadurch, dass in diesen innersten Lamellen, wo der lange Durchmesser der Knochen

körperchen tangential und senkrecht oder fast senkrecht zur Knochenaxe verläuft, auch die lange Axe des Elasticitätsellipsoides in derselben Richtung dahingeht. — Der äussere Theil des Knochenringes, wo die dritte Hauptebene des Knochengewebes in der Schliffebene liegt oder wenigstens an den meisten Stellen nur wenig gegen dieselbe geneigt ist, erscheint entweder fast gleichmässig dunkel oder zeigt dort, wo die Tangente des Knochenringes unter $\pm 45°$ orientirt ist, an einzelnen Stellen ein schwaches Aufleuchten. Beim Drehen des Schliffes um die Verticalaxe bleibt die Erscheinung im Allgemeinen dieselbe. Der äussere Theil des Ringes wirkt also grossentheils wie eine isotrope Substanz und verhält sich wie ein zur optischen Axe senkrecht geschliffenes, dünnes Plättchen eines einaxigen Krystalles. Dieser Versuch würde daher, mit Rücksicht auf den bereits gelieferten Nachweis, dass die längste Elasticitätsaxe jedenfalls parallel dem langen Durchmesser der Knochenkörperchen gerichtet ist, den Schluss gestatten, dass die Knochensubstanz positiv einaxig sei.

Allein die Probe zwischen gekreuzten Nicols bei dunklem Gesichtsfelde ist, wenn es sich um geringe Unterschiede der Helligkeit, um die niedrigsten Interferenzfarben I. O. handelt, nicht sehr empfindlich. Viel feinere Unterscheidungen sind nach dem Einschieben der Gypsplatte Roth I. O. möglich. Man findet dann in der Regel, wenn auch unbedeutende Farbenänderungen selbst an jenen Stellen des Schliffes, welche ohne Gypsplatte untersucht, unter allen Azimuthen fast gleichmässig dunkel erscheinen. Die inneren Lamellen des Knochenringes, in welchen die langen Durchmesser der Knochenkörperchen der Schliffebene parallel oder fast parallel laufen, erscheinen dort, wo diese Durchmesser (respective die Tangenten des Knochenringes) unter $+45°$ dahingehen, in Additionsfarben (Indigo II. O. bis Grün II. O.), wo sie dagegen unter $-45°$ orientirt sind, in Subtractionsfarben (Orange I. O. bis Weiss I. O.).

Jene Theile der inneren Lamellen, deren Knochenkörperchen mit ihren langen Durchmessern in den Azimuthen 0° und 90° verlaufen, erscheinen in der Farbe des Gypsgrundes. Dieser innere Theil des Ringes gibt also, im Ganzen betrachtet, nach der Ausdrucksweise Valentin's ein negatives Kreuz, indem

die beiden mit ihrer Halbirungslinie in der Richtung des Hauptschnittes der Gypsplatte orientirten Ringquadranten in sinkenden, die beiden mit ihrer Halbirungslinie senkrecht zum Hauptschnitte gestellten Quadranten dagegen in steigenden Interferenzfarben leuchten. Die Erklärung dieses Phänomens ergibt sich mit Leichtigkeit aus dem früheren, wenn man die Lage der wirksamen Elasticitätsellipsen in den innersten Knochenlamellen und in der Gypsplatte berücksichtigt.

Was nun den äusseren, grösseren Theil des Knochenringes anbelangt, so muss ich zunächst bemerken, dass ich niemals einen Schliff vor mir hatte, wo derselbe auf der Gypsplatte sich vollständig neutral verhielt. In der Regel gibt auch dieser Theil ein sogenanntes negatives Kreuz wie die innersten Lamellen, nur ist hier in diesem äusseren Ringabschnitte das Steigen und Sinken der Interferenzfarben so unbedeutend, dass es im Vergleiche zu den brillanten Farben des inneren Ringabschnittes kaum merklich ist. Das Purpurroth der Gypsplatte steigt zu Violett und sinkt zu Roth, nur an wenigen Stellen des Ringes bekommt man beim Drehen auch Indigo II. O. und Orange I. O. zu sehen. Bisweilen, obwohl seltener, bekommt man Querschliffe, die gerade entgegengesetzte Erscheinungen zeigen, nämlich ein schwach positiv gefärbtes Kreuz. Die Interferenzfarbe steigt nämlich ein wenig dort, wo der Durchmesser des Ringes mit dem Hauptschnitte des Gypses zusammenfällt, sinkt dagegen ein wenig, wo der Durchmesser senkrecht zu demselben gerichtet ist.

Untersucht man solche Querschliffe mit stärkeren Vergrösserungen (300—400mal), so überzeugt man sich, dass die Scheiden der Knochenkanälchen verhältnissmässig positiv wirken, während die übrige Knochengrundsubstanz ganz neutral zu sein scheint. Diese Knochenkanälchenscheiden erscheinen nämlich violett II. O. bis blau II. O., wenn die Knochenkanälchem dem Hauptschnitte des Gypses parallel unter +45° dahingehen, dagegen roth I. O. bis orange I. O., wenn sie unter —45° dahingehen. Es sind also in den Scheiden der Knochenkanälchen die doppeltbrechenden Elemente anders orientirt, als in der übrigen Knochengrundsubstanz, eine Thatsache, die zwar an und für sich sehr interessant ist, allein eine genauere Bestimmung der optischen Axe des Knochengewebes unmöglich macht, da wir nun-

mehr wissen, dass selbst in den kleinsten Schliffabschnitten, die noch mit dem Polarisationsmikroskope untersucht werden können, die Lage des Elasticitätsellipsoides innerhalb kurzer Strecken wechselt.

Es soll daher im Folgenden nicht der Versuch gemacht werden, den Beweis zu führen, dass die Knochengrundsubstanz optisch einaxig oder optisch zweiaxig sei; ich werde mich vielmehr begnügen darzuthun, dass die Annahme, das der Knochensubstanz zukommende Elasticitätsellipsoid sei ein an den Polen verlängertes Rotationsellipsoid, wie es den positiv einaxigen Krystallen entspricht, genügt, um alle am Knochen zu beobachtenden Polarisationserscheinungen vollkommen befriedigend zu erklären.

Ich stelle mir vor, dass in der Hauptmasse des Knochengewebes das Elasticitätsellipsoid mit seiner Rotationsaxe dem langen Durchmesser der Knochenkörperchen parallel gerichtet sei, und nur in einer dünnen Zone um die Knochenkanälchen herum (Scheiden der Knochenkanälchen) mit seiner Axe dem Verlaufe dieser Kanälchen folge. Diese Annahme erklärt zunächst die eigenthümliche discontinuirliche Vertheilung der Interferenzfarben am reinen Querschliffe, der vollkommen senkrecht zum langen Durchmesser der Knochenkörperchen geführt ist. Als solchen Querschliff betrachte ich denjenigen, der eben Interferenzfarben an den Scheiden der Knochenkanälchen zeigt. An solchen Schliffen wird die Hauptmasse des Knochengewebes unwirksam, wie ein isotroper Körper, und es können desshalb die wegen ihrer sehr geringen Dicke nur schwach doppeltbrechenden Scheiden der Knochenkanälchen, die ja grösstentheils radiär verlaufen, zur Wirkung kommen. Sind die Knochenkörperchen nicht genau parallel (und es ist, wie aus dem früheren hervorgeht, die Regel, dass die Knochenkörperchen in der Ebene der Lamellen etwas von der Richtung der Knochenaxe abweichen), so wird durch die Neigungen der optischen Axen in den vertical stehenden Lamellenebenen eine Doppeltbrechung eintreten, die wegen der relativ sehr grossen Dicke der wirksamen Schichte sehr rasch die schwache Doppeltbrechung der Knochenkanälchenscheiden überwiegen wird. Die Interferenzfarbe muss natürlich abhängen von der Richtung, in welcher die optische Axe geneigt

ist. Diese Richtung ist stets tangential und es steigt daher die Interferenzfarbe, wenn die Tangente des Knochenringes mit dem Hauptschnitte des Gypses gleichgerichtet ist, und sinkt im entgegengesetzten Falle. Der Fall, dass die beiden entgegengesetzten Wirkungen der Knochenkanälchenscheiden und geringer Neigungen der Knochenkörperchen gegen die Verticale in der ganzen Ausdehnung eines Schliffes sich vollständig gleichmässig compensiren, ist kaum denkbar; ich habe ihn auch in der That nie beobachtet.

Dreht man einen möglichst neutral wirkenden Knochenring über der Gypsplatte unter ±45° V. um die Horizontalaxe, so tritt bald ein Steigen oder Sinken der Interferenzfarbe ein, das zuerst einzelne Stellen des Schliffes, bald aber den ganzen Knochenring ziemlich gleichmässig betrifft. Ist die Drehungsaxe unter —45° V. orientirt, so erscheinen Additionsfarben; unter +45° V. dagegen Subtractionsfarben. An einer Reihe von Querschliffen des Froschoberschenkels musste die Drehung 15°—20° H. nach links oder rechts betragen, damit der ganze Schliff (abgesehen vom innersten Ringe) bei Orientirung der Drehungsaxe unter +45° V. ziemlich gleichmässig Rothorange bis Orange I. O., unter —45° V. ziemlich gleichmässig Violett bis Indigo II. O. zeigte. Dabei erwies es sich als ziemlich gleichgiltig, welcher Radius des Knochenringes in die Drehungsaxe gebracht wurde, wenigstens konnte ich keine constanten Unterschiede in den Winkelwerthen auffinden, je nachdem ich eine bestimmte Stelle des Knochenringes einmal um die radiale, ein zweitesmal um die tangentiale Richtung drehte. Doch kann natürlich ein so wenig empfindliches Verfahren keine sicheren Beweismittel weder für, noch gegen die optisch einaxige Beschaffenheit der Knochengrundsubstanz abgeben, ich muss mich wiederum begnügen, zu zeigen, dass sich die Erscheinungen beim Drehen um die Horizontalaxe durch die von mir gemachte Annahme vollständig erklären lassen.

Beim Drehen um die Horizontalaxe müssen, den vollständigen Parallelismus der optischen Axen in der ganzen Ausdehnung des Schliffes unter sich und zur Knochenaxe vorausgesetzt, in allen Punkten des Schliffes die optischen Axen sich im gleichen Sinne neigen und zwar in Verticalebenen, die senkrecht zur

Drehungsaxe gerichtet sind, so dass also wirksame Elasticitätsellipsen entstehen, deren lange Axen sämmtlich auf der Drehungsaxe senkrecht stehen. Fällt nun die Drehungsaxe mit der langen Axe der wirksamen Ellipse der Gypsplatte zusammen, so muss die Interferenzfarbe sinken, stehen aber diese beiden Richtungen senkrecht zu einander, so muss die Farbe steigen, wie dies in der That der Fall ist.

Man könnte nun vielleicht erwarten, dass an jenen Stellen des Ringes, an welchen die Tangentialrichtung der Drehungsaxe parallel läuft, die steigenden und sinkenden Farben bereits bei einem kleineren Drehungswinkel erreicht werden, als an jenen Stellen, an welchen der Radius des Knochenringes der Drehungsaxe entspricht. Denn in dem ersten Falle wirken die Scheiden der Knochenkanälchen in demselben, im zweiten Falle im entgegengesetzten Sinne, wie die Drehung an und für sich. Allein bei der Beobachtung lässt sich eine solche Wirkung nicht constatiren, da andere Momente, wie unvollständiger Parallelismus der Knochenkörperchen und ungleiche Dicke des Schliffes, Störungen der unregelmässigsten Art hervorrufen, welchen gegenüber die sehr schwache Wirkung der Scheiden der Knochenkanälchen gar nicht mehr zum Ausdruck kommen kann.

Es verdient nochmals hervorgehoben zu werden, dass die Erscheinungen am reinen Querschliffe, senkrecht zur Längsaxe der Knochenkörperchen, die optisch einaxige Beschaffenheit der Knochengrundsubstanz durchaus nicht zwingend beweisen. Die Erscheinungen würden vielmehr dieselben sein können, wenn in der dritten Hauptebene des Knochengewebes zwei verschiedene Elasticitätsaxen vorhanden wären, und es könnte die relative Grössendifferenz eine ganz erhebliche sein, ja ebenso bedeutend, wie man sie an exquisit zweiaxigen Krystallen findet. Da man neutrale Stellen vom Oberschenkel des Frosches nach links und rechts 15°—20° um die Horizontalaxe drehen kann, bis eine unzweifelhafte Änderung der anfangs neutralen Interferenzfarbe eintritt, so kann nur mit Sicherheit ausgeschlossen werden, dass, falls der Knochen optisch zweiaxig ist, die optischen Axen einen Winkel einschliessen, der 15°—20° übersteigt. Es könnten also die optischen Axen zum langen Durchmesser der Knochenkörperchen, respective zur langen Axe des Elasticitätsellipsoides unter

Winkeln von $7^1/_2{}^\circ$—10° geneigt sein. Es ist auch nicht zu leugnen, dass von vornherein die Wahrscheinlichkeit, der Knochen sei optisch zweiaxig, eine grosse ist. Wir finden nämlich in der dritten Hauptebene des Knochengewebes in zwei aufeinander senkrechten Richtungen die Structur verschieden. In der einen Richtung die kurzen Durchmesser der Knochenkörperchen und übereinander geschichtete Lamellen, in der zweiten Richtung die mittleren Durchmesser der Knochenkörperchen, welche in der Ebene der Lamellen verlaufen. Es ist nicht sehr wahrscheinlich, dass die Ätherdichtigkeit in diesen beiden Richtungen dieselbe sei, und ich ging auch in der Erwartung an die Untersuchung des Querschliffes, die Knochensubstanz optisch zweiaxig zu finden. Da sich aber alle Erscheinungen, die ich beobachten konnte, durch die Annahme, die Knochensubstanz sei positiv einaxig, ganz ungezwungen erklären lassen, so halte ich es für vollständig gerechtfertigt, wenn ich dieser einfacheren Voraussetzung den Vorzug gebe.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der Schrägschliffe. Schliffe, die nicht genau senkrecht zur Knochenaxe geführt sind, werden dieselben Erscheinungen zeigen müssen, wie um die horizontale Axe gedrehte Querschliffe. Man beobachtet auch in der That, dass jener Theil des Knochenringes, der am reinen Querschliffe neutral erscheint, an Schliffen, die unter Winkeln von 70°—75° gegen die Knochenaxe geneigt sind, bereits deutlich ein Steigen oder Sinken der Interferenzfarbe zeigt, je nachdem jene Normalebene des Schliffes, in welche die Knochenaxe fallen würde, unter +45° V. oder —45° V. über der Gypsplatte orientirt ist. Dabei erscheint die Farbe wieder über den ganzen Knochenring, der bei den angegebenen Schliffwinkeln noch nicht auffällig von der Kreisform abweicht, ziemlich gleichmässig ausgebreitet. Stärker geneigte Schrägschliffe zeigen das Steigen und Sinken der Interferenzfarben in den angegebenen Stellungen noch weit ausgesprochener.

Eine besondere Berücksichtigung verdienen noch die Erscheinungen, welche an Längsschliffen des Froschoberschenkels in der innersten, grösstentheils querliegende Knochenkörperchen enthaltenden, Knochenlage auftreten.

An radialen Längsschliffen werden die innersten Lamellen im Allgemeinen senkrecht zur Längsrichtung der Knochenkörperchen getroffen und es werden daher diese Lamellen die Farbe des Sehfeldes beim Drehen um die Verticalaxe nur wenig ändern; doch immerhin mehr als die äussere Knochenzone am Querschliffe, da die Knochenkörperchen in den innersten Lamellen zum Theil in sehr stark wechselnden Richtungen verlaufen. Die Beobachtung ergibt, diesen Voraussetzungen entsprechend, eine im Vergleiche zum Längsschliffe der äusseren Knochenzone nur schwach doppeltbrechende Wirkung dieser innersten Lamellen, wenn sie parallel zur Knochenaxe senkrecht durchschnitten sind.

An tangentialen Längsschliffen, in welchen die innersten Lamellen neben äusseren mehr weniger vollkommen mit ihrer Fläche in die Schliffebene fallen können, hat man mitunter Streifen von Knochensubstanz nebeneinander, in welchen die langen Durchmesser der Knochenkörperchen und daher nach meiner Annahme auch die optischen Axen senkrecht gegeneinander gerichtet sind. Die beiden Streifen müssen daher gerade entgegengesetzte Interferenzfarben zeigen. Man sieht auch in der That, wenn die Streifen unter $\pm 45°$ über der Gypsplatte orientirt sind, den einen in Additions-, den anderen in Subtractionsfarben und zwar immer denjenigen Streifen in der steigenden Farbe, dessen Knochenkörperchen mit ihren langen Durchmessern dem Hauptschnitte des Gypses gleich gerichtet sind. An tangentialen Längsschliffen kann aber auch eine Schichte Knochensubstanz mit querlaufenden Knochenkörperchen über oder unter einer Schichte Knochensubstanz mit längslaufenden Knochenkörperchen liegen. Sind diese Schichten gleich dick, so müssen sie sich in ihrer doppeltbrechenden Wirkung gegenseitig aufheben und der Schliff wird in allen Azimuthen neutral erscheinen. Dies lässt sich nun in der That beobachten, wenn auch immer nur an beschränkten Stellen, in deren Umgebung steigende und sinkende Interferenzfarben verschiedenster Art fleckenweise zu sehen sind. Diese Erscheinung muss unser Interesse besonders desshalb in Anspruch nehmen, weil Valentin auf ähnliche, begreiflicher Weise selten zu machende Beob-

achtungen [1] die Annahme gründete, die optische Axe der Knochengrundsubstanz stehe senkrecht auf den Lamellen. Allein da die im Vorhergehenden mitgetheilten Beobachtungen mit der Vorstellung Valentins nicht in Einklang zu bringen sind, so muss die Deutung, welche der genannte Forscher der in Rede stehenden Erscheinung gegeben hat, als gänzlich unzulässig bezeichnet werden. Man sucht bei Valentin vergeblich nach einer Erklärung der auch von ihm constatirten Thatsache, dass Querschnitte von Lamellensystemen unter Umständen nur ganz schwach doppeltbrechend oder geradezu neutral wirken. Valentin hat unter anderem auch den Oberschenkel des Frosches untersucht [2]. Er bezeichnet die von mir als innere Lamellen beschriebene Schichte als mittleres Ringband und unterscheidet nach innen von diesen Lamellen noch als besondere Lage die wellig begränzte Masse, die aus unregelmässig vertheilten spongiösen Knochenblättchen und Resten des Knochenmarkes besteht. In den äusseren Lamellen fand nun auch Valentin eine neutrale Wirkung an „vielen Stellen"! Die Erscheinungen, welche Valentin am Längsschliffe des Froschoberschenkels beschreibt, beziehen sich auf diese äusseren, die Hauptmasse des Knochens bildenden Lamellen. Valentin combinirt aber ungerechtfertigter Weise das, was er am Längsschliffe sieht, mit dem, was er am Querschliffe im Bereiche des ganz schmalen, nicht einmal constanten mittleren Ringbandes beobachtete und schenkt der breiten, am Querschliffe fast neutral wirkenden, äusseren Ringzone gar keine weitere Beachtung. Durch dieses Combiniren von Erscheinungen, die nicht aufeinander bezogen werden dürfen, musste Valentin begreiflicherweise zu ganz unrichtigen Schlussfolgerungen gelangen.

Die Resultate, welche sich bei der Untersuchung des Froschoberschenkels ergeben haben, können uns nun als Anhaltspunkt zur Erklärung der Erscheinungen dienen, welche man an complicirter gebauten Knochen beobachten kann.

---

[1] Die Untersuchung etc. p. 261.

[2] L. c. p. 256.

Ich werde im Folgenden, immer unmittelbar anknüpfend an die Beobachtung, dieselbe mit Hilfe meiner Annahme zu erklären suchen. Fassen wir zunächst die an einem möglichst senkrecht zur Knochenaxe geführten Querschliffe durch die Diaphyse eines menschlichen Röhrenknochen zahlreich zu beobachtenden Havers'schen Kanäle mit ihren Speciallamellen ins Auge, so fällt vor Allem das ziemlich wechselvolle Bild auf, das sowohl an einem und demselben Schliffe, namentlich aber bei der Untersuchung einer grösseren Reihe von Schliffen sich darbietet.

Einmal kommen Havers'sche Lamellensysteme vor, welche in ihrer ganzen Ausdehnung neutral oder fast neutral wirken und dieses Verhalten beim Drehen um die Verticalaxe nicht ändern. Es können ferner die Speciallamellensysteme in ihrer ganzen Ausdehnung ein schwach positives oder ein schwach negatives Kreuz geben, mit anderen Worten, es können das einemal jene Theile des Ringes, deren Radien dem Hauptschnitte der Gypsplatte gleichgerichtet sind, schwach steigende, das anderemal schwach sinkende Interferenzfarben zeigen. Alle diese Erscheinungen sind vollkommen jenen analog, welche man am äusseren Ringe des Froschoberschenkels beobachtet und erklären sich auch ganz in derselben Weise.

Speciell hervorzuheben dürfte sein, dass auch an menschlichen Knochen bei starken Vergrösserungen an hiezu geeigneten Präparaten die schwach doppeltbrechende Wirkung der Knochenkanälchenscheiden zu beobachten ist. Dreht man neutral wirkende Querschliffe Havers'scher Lamellen um die Horizontalaxe unter $\pm 45°$ V., so nehmen sie in ihrer ganzen Ausdehnung dieselbe steigende oder sinkende Interferenzfarbe an. Dabei ist zu bemerken, dass man nicht selten auch in ihrer ganzen Ausdehnung nahezu ganz gleichmässig neutral wirkende Havers'sche Lamellensysteme trifft, bei welchen eine Drehung von 10°—12° H. nach links und rechts genügt, um ein ziemlich gleichmässiges Violett II. O. (— 45° V.) oder Rothorange I. O. (+45° V.) zu erzielen. Dabei ist es ziemlich gleichgiltig, welcher Durchmesser des Havers'schen Ringsystemes in der Drehungsaxe liegt.

Wir haben es in den bisher betrachteten Fällen ohne Zweifel mit Speciallamellen zu thun, deren Knochenkörperchen mit

ihrem langen Durchmesser parallel oder nahezu parallel mit der Axe des Havers'schen Kanales verlaufen. Stellt man diese Untersuchungen an gut geglätteten trockenen Schliffen an, so überzeugt man sich leicht, dass die in der Schliffebene befindlichen Durchmesser der Knochenkörperchen in der That diejenigen Dimensionen zeigen, welche nach Messungen an Flächenschliffen dem mittleren und dem kurzen Durchmesser der Knochenkörperchen zukommen. So fand ich beispielsweise an neutral wirkenden Querschliffen Havers'scher Lamellen von einer menschlichen Tibia den Durchmesser der Knochenkörperchen 7·5 μ. bis 11 μ., im Mittel 9·2 μ. lang (Mittel aus vierzig Messungen). Die Bestimmung des mittleren Durchmessers der Knochenkörperchen an geeigneten Längsschliffen von derselben Tibia ergab 7·5 μ. bis 11·3 μ., im Mittel 9·7 μ. und es ist demnach kein Zweifel, dass die an den erwähnten neutral wirkenden Querschliffen vorliegenden Durchmesser der Knochenkörperchen in der That den mittleren Durchmessern der Knochenkörperchen entsprechen.

Mit Rücksicht auf die grosse Übereinstimmung der Zahlen lässt sich annehmen, dass an vielen solchen neutralen Querschliffen Havers'scher Lamellen der Parallelismus der langen Durchmesser der Knochenkörperchen unter sich und mit der Knochenaxe ein fast vollkommener sei.

Die Gleichmässigkeit, mit welcher solche Lamellen die Farbe des Gypsgrundes wiedergeben, ist dementsprechend eine ausgesprochenere, als am Oberschenkel des Frosches.

Wir wenden uns nun zu anderen Bildern. Manchmal findet man, meist mehr — weniger deutlich elliptische, Durchschnitte Havers'scher Lamellensysteme, welche mit der langen Axe der Ellipse unter +45° orientirt steigende, unter —45° sinkende Interferenzfarben zeigen und zwar Farben, die über die ganze Ellipse gleichmässig verbreitet sind. Diese Ellipsen, die man namentlich an Schrägschliffen von Röhrenknochen regelmässig zu sehen bekommt, zeigen also dieselbe Erscheinung, wie neutral wirkende Querschliffe Havers'scher Lamellen, welche um die Horizontalaxe gedreht werden und es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass es schief zum Verlaufe des Havers'schen Kanales durchschnittene Speciallamellen sind, in welchen die langen

Durchmesser der Knochenkörperchen dem Havers'schen Kanale parallel laufen. Eine kurze Überlegung zeigt, dass in einem solchen Schrägschliffe die optische Axe überall nach derselben Richtung hin geneigt sein muss, und dass daher über das ganze Speciallamellensystem beim Drehen über der Gypsplatte um die verticale Axe die wechselnden Interferenzfarben sich gleichmässig ausbreiten müssen. Der directe Beweis, dass die in der eben geschilderten Weise sich verhaltenden elliptischen Durchschnitte Havers'scher Lamellensysteme in der That schiefe Durchschnitte von Lamellen sind, die im reinen Querschnitte neutral wirken würden, wird durch Drehungsversuche um die Horizontalaxe geliefert.

Die Beschreibung eines solchen Versuches wird dies am besten klar machen. In einem Schrägschliffe von einer menschlichen Tibia, welcher beiläufig unter 45° gegen die Knochenaxe geneigt ist, fand sich ein elliptischer Durchschnitt eines Speciallamellensystemes, der in seiner ganzen Ausdehnung Blau II. O. oder Gelb I. O. zeigte oder aber neutral erschien, je nachdem die lange Axe der Ellipse unter +45° V. oder unter —45° V. oder endlich unter 0° und 90° V. orientirt wurde. Es wurde nun die kurze Axe der Ellipse in die horizontale Drehungsaxe gebracht, so dass der Schliff, wenn die Drehungsaxe unter 0° oder 90° V. eingestellt wurde, vollständig neutral erschien. Hierauf wurde die Drehungsaxe in das Azimuth +45° gebracht, so dass die Lamellen lebhaft gelb I. O. erschienen. Wurde nun um 50° H. nach rechts gedreht, so fiel die Farbe auf Weiss I. O., wurde dagegen um 50° H. nach links gedreht, so stieg die Farbe bis zu Roth I. O., der Farbe des Gypsgrundes, und behielt nun diese Farbe beim Drehen um die Verticale in allen Azimuthen. Wurde die Horizontalaxe unter —45° V. orientirt, so stieg die Farbe beim Drehen um 50° H. nach rechts bis auf Blaugrün II. O. und sank beim Drehen um 50° H. nach links bis zur Farbe des Gypsgrundes. Man konnte auch deutlich sehen, wie beim Drehen nach rechts die Knochenkörperchen länger wurden, während sie beim Drehen nach links sich verkürzten.

Die ausführliche Besprechung dieser Thatsachen halte ich desswegen für nothwendig, weil W. Müller sich irrigerweise

vorstellte[1], dass im reinen Querschliffe neutral wirkende Speciallamellensysteme, wenn sie etwas schräg durchschnitten werden, zur Entstehung von dunklen Kreuzen und Interferenzringen, wie sie an senkrecht zur optischen Axe geschliffenen einaxigen Krystallen auftreten, Anlass geben werden. Die theoretische Betrachtung lehrt, dass dies nicht möglich ist und die geschilderten Erscheinungen an neutralen Querschliffen, welche um die Horizontalaxe gedreht werden, sowie die damit übereinstimmenden Erscheinungen an den eben besprochenen Schrägschliffen, zeigen auch thatsächlich auf das Bestimmteste, dass eine gleichmässige Neigung der optischen Axe zur Verticalen, in einem Havers'schen Lamellensysteme immer nur eine gleichmässig ausgebreitete Interferenzfarbe hervorruft, mag nun die Neigung der Axen durch Drehung eines Querschliffes um die Horizontalaxe oder durch einen Schrägschliff bedingt sein.

Was hat es aber mit den Kreuzen für eine Bewandtniss, die man in der That gar nicht selten an Querschliffen Havers'scher Lamellensysteme zu sehen bekommt? Wir wollen sogleich die Erscheinungen ins Auge fassen, wie sie bei gekreuzten Nicols und eingelegter Gypsplatte auftreten. Manche fast kreisrunde Havers'sche Ringsysteme werden durch ein Kreuz, dessen Schenkel den Polarisationsebenen der Nicols entsprechen und das den rothen Gypsgrund wiedergibt, in vier Quadranten getheilt, von welchen die beiden unter —45° dahingehenden steigende, die beiden unter +45° dahingehenden aber sinkende Interferenzfarben zeigen; also dasselbe, was wir am inneren Ringe des Froschoberschenkels gesehen haben. Die Erscheinung lässt sich auch ganz auf dieselbe Weise erklären, wie dort. An Havers'schen Lamellen, welche ein solches ausgesprochenes negatives Kreuz zeigen, sind eben die Knochenkörperchen mit ihren langen Durchmessern tangential und senkrecht oder fast senkrecht gegen die Längsrichtung des Havers'schen Kanales gestellt und die optische Axe oder der wirksame Durchschnitt derselben läuft daher in diesem Falle tangential, ändert also in demselben Sinne, wie die Tangente des Kreises, von Punkt zu Punkt ihre Richtung. Wo also der längere Durchmesser der

[1] L. c. p. 188.

Knochenkörperchen dem Hauptschnitte des Gypses parallel geht, muss die Farbe steigen, wo er dagegen darauf senkrecht steht, muss die Farbe sinken und die Kreisfläche ist daher dort, wo ihr Radius unter +45° orientirt ist, mit den tiefsten Subtractionsfarben, dort aber, wo der Radius unter —45° dahingeht, mit den höchsten Additionsfarben gefärbt.

Zahlreiche Messungen haben mich von der Richtigkeit dieser Erklärung überzeugt. Die längeren, tangential laufenden Durchmesser der Knochenkörperchen an solchen, exquisite negative Kreuze zeigenden Havers'schen Ringsystemen betrugen 15—27 μ., im Mittel 20·3 μ. (Mittel aus siebenzig Messungen). Die langen Durchmesser der Knochenkörperchen derselben Tibia an Flächenschliffen betrugen 23—40 μ., im Mittel 32·2 μ. (Mittel aus vierzig Messungen). Daraus folgt, dass in diesen Ringsystemen jedenfalls kein Knochenkörperchen dem Havers'schen Kanale vollkommen parallel läuft, da schon die Minimalziffer des Durchmessers (15 μ.) die Maximalziffer des mittleren Durchmessers der Knochenkörperchen (11·3 μ., vergl. p. 132) merklich übersteigt. Dagegen sind vollkommen senkrecht zur Knochenaxe gerichtete Knochenkörperchen offenbar selten, da die Mittelzahl des längeren Durchmessers der Knochenkörperchen aus den in Rede stehenden Ringsystemen (20·3 μ.) ziemlich weit unter der an Längsschliffen sich ergebenden Mittelzahl des langen Durchmessers (32·2 μ.) zurückbleibt.

Ausser diesen regelmässigen Kreuzen, die sowohl von W. Müller, als von Valentin gesehen und, von jedem in einem anderen Sinne, unrichtig gedeutet wurden, kommen nun noch eine ganze Reihe verschiedenartiger Bilder an Havers'schen Ringsystemen vor, die theils Modificationen, theils Combinationen der beiden besprochenen typischen Polarisationsbilder (1. neutrale Ringe, 2. Kreuze) darstellen.

Sehr gewöhnlich finden sich Kreuze, deren beide Schenkel sich schiefwinkelig durchschneiden. Dies ist dann der Fall, wenn der Querschliff eines Havers'schen Lamellensystems nicht genau kreisförmig, sondern mehr weniger unregelmässig gestaltet ist. Man überzeugt sich jedoch auch an diesen Kreuzen, dass in den neutralen Kreuzesschenkeln die Richtungen der längeren Durchmesser der Knochenkörperchen mit einer der Polarisations-

ebenen der Nicols zusammenfallen, wie dies meiner Annahme gemäss der Fall sein muss.

Sehr oft, ja in der Mehrzahl der Fälle, hat ein Theil der Lamellen eines Havers'schen Ringsystemes Knochenkörperchen, welche der Kanalaxe nahezu parallel laufen, während in den übrigen Lamellen dieselben mehr weniger gegen die Richtung des Havers'schen Kanales geneigt sind. Häufig finden sich die tangential gerichteten Knochenkörperchen innen, wie am Oberschenkel des Frosches. Man sieht dann, wie dort, innen ein negatives Kreuz, das nach aussen von einer neutralen Ringzone umgeben ist. Seltener ist die neutrale Zone nach innen und das Kreuz nach aussen gelegen. Sind Havers'sche Räume *(Haversian spaces)* vorhanden, so markiren sich dieselben oft ungemein scharf, da gewöhnlich an solchen Stellen die Richtung der Knochenkörperchen sich plötzlich ändert. Eigenthümliche Bilder entstehen, wenn abwechselnd in unmittelbar aufeinander folgenden Ringlamellen die Knochenkörperchen verschiedene Richtungen einhalten. Es markiren sich dann die Lamellen ungemein deutlich, da sie abwechselnd verschiedene Interferenzfarben zeigen. An manchen Havers'schen Ringsystemen wechseln Lamellen mit senkrecht zum Längsdurchmesser durchschnittenen Knochenkörperchen mit Lamellen ab, in welchen die Knochenkörperchen mehr weniger der Länge nach durchschnitten sind. Man erhält dann ein System von abwechselnd neutralen und gefärbten Ringen, so dass man glauben könnte, es wechseln einfach- und doppeltbrechende Lamellen mit einander ab.

Vergleichende Messungen der Knochenkörperchen an solchen Ringsystemen sind mit einigen Schwierigkeiten verbunden, da oft in einer Ringlamelle nur Ein, manchmal auch gar kein Knochenkörperchen zu sehen ist. Nicht selten stehen die Knochenkörperchen an der Grenze zweier Lamellen und es frägt sich dann, welcher Lamelle sie zuzurechnen sind. Indessen habe ich doch an grösseren derartigen Ringsystemen eine Reihe von Messungen ausgeführt. Dieselben ergaben für den längeren Durchmesser der Knochenkörperchen in den neutral oder fast neutral wirkenden Lamellen 9—14 μ., im Mittel 11·3 μ., in den deutlich gefärbten Lamellen dagegen 19—30 μ., im Mittel

22·3 μ. (Die Mittelzahlen sind aus je 10 Messungen entnommen; das Präparat stammte von derselben Tibia, an der auch die früher p. 132 und 135 aufgezeichneten Messungen ausgeführt wurden.) Es zeigt sich also auch hier wieder, dass an den neutralen Stellen die Knochenkörperchen nahezu senkrecht zum Längsdurchmesser durchschnitten sind, während sie in den gefärbten Lamellen fast quer laufen.

Nach der ausführlichen Besprechung der Polarisationserscheinungen, welche an den Havers'schen Lamellen zu beobachten sind, kann ich mich nun bezüglich der Schalt- oder Grundlamellen, sowie der umfassenden Lamellen kurz fassen. (Vergl. Fig. 3 und 4.)

Senkrecht zu ihrer Fläche durchschnittene Lamellen erscheinen über der Gypsplatte Roth I. O. entweder neutral oder in Interferenzfarben. An neutralen Lamellensystemen überzeugt man sich wieder durch Messungen, dass die Knochenkörperchen senkrecht zu ihrem langen Durchmesser durchschnitten sind. Die doppelt brechend wirkenden Lamellensysteme zeigen Additionsfarben, wenn der längere Durchmesser der Knochenkörperchen mit dem Hauptschnitte der Gypsplatte zusammenfällt, dagegen Subtractionsfarben, wenn dieser Durchmesser senkrecht zum Hauptschnitte steht; und erscheinen endlich in der Farbe des Grundes, wenn dieser Durchmesser unter 0° und 90° orientirt ist. Diese Erscheinungen erklären sich wieder durch die mittelst Messungen leicht festzustellende Thatsache, dass in solchen Lamellen die langen Durchmesser der Knochenkörperchen mehr weniger vollkommen in der Schliffebene liegen. Sind in aufeinander folgenden Lamellen die Knochenkörperchen verschieden gerichtet, so sind auch die Interferenzfarben in den einzelnen Lamellen ungleich und es können unter Umständen auch hier wieder neutrale und doppelt brechende Lamellen mit einander abwechseln.

An Querschliffen trifft man bisweilen Lamellensysteme, die, abweichend von der Regel, sinkende Interferenzfarben zeigen, wenn sie, respective die längeren Dimensionen ihrer Knochenkörperchen, dem Hauptschnitte des Gypses parallel stehen, dagegen in steigenden Farben leuchten, wenn sie senkrecht zur genannten Richtung orientirt werden. Diese Erscheinung wird

begreiflich durch die Annahme, dass der Schliff ein Lamellensystem mit parallel gerichteten Knochenkörperchen schräg, jedoch parallel zum mittleren Durchmesser durchschnitten habe. Messungen zeigen auch in der That, dass die längere Dimension der Knochenkörperchen an solchen Lamellensystemen dem mittleren Durchmesser der Knochenkörperchen entspricht. Bisweilen findet man Durchschnitte von Lamellensystemen, die beim Drehen um die Verticale neutral erscheinen, wenn die Richtung der Lamellen nicht genau mit der Polarisationsebene eines Nicols zusammenfällt, sondern mit dieser einen Winkel bildet. Diese Erscheinung findet ihre vollständige Analogie in dem Verhalten neutral wirkender Havers'scher Ringsysteme, wenn man dieselben um die Horizontalaxe dreht. Wird ein solcher horizontal gedrehter Schliff noch um die Verticalaxe gedreht, so erscheint der ganze Schliff abwechselnd neutral und gefärbt. Da die Lamellen an einem solchen Schliffe in geschlossenen Curven verlaufen, so zeigt sich an demselben die neutrale Stellung ebenfalls unabhängig von der Orientirung der Lamellen zu den Polarisationsebenen des Nicols.

Indem ich mich nun zu den Längsschliffen wende, so darf ich mir wohl eine detaillirtere Schilderung und Erklärung aller zu beobachtenden Erscheinungen ersparen.

Die Versuche, welche an tangentialen und radialen Längsschliffen des Froschoberschenkels angestellt wurden, lassen sich auch an geeigneten Stellen von Längsschliffen complicirterer Röhrenknochen mit demselben Resultate wiederholen. Einer besonderen Besprechung will ich die den Lamellen parallel geführten Längsschliffe unterziehen, obwohl die hier zu beobachtenden Erscheinungen theilweise auch schon am Oberschenkel des Frosches beschrieben und erörtert wurden. In den complicirten Röhrenknochen der Säugethiere und des Menschen sind die Knochenkörperchen sehr oft in den aufeinander folgenden Blättern eines Lamellensystemes nicht parallel, sondern laufen in den verschiedensten Richtungen. Hat man nun einen Flächenschliff eines solchen Lamellensystemes, so wird die doppeltbrechende Wirkung der mit entgegengesetzt gerichteten Knochenkörperchen versehenen, übereinander liegenden Knochenlagen sich theils schwächen, theils ganz aufheben und es wird,

wenn der Schliff, wie gewöhnlich, weder durchwegs genau parallel den Lamellen ist, noch diese selbst genau in einer Ebene liegen, auf der Gypsplatte bald die Interferenzwirkung der einen, bald der anderen Lamellen vorherrschen, die eben je nach der Orientirung der Knochenkörperchen eine verschiedene sein muss. Solche Flächenschliffe zeigen sich nun auf der Gypsplatte als aus lauter kleinen Flecken zusammengesetzt, die theils in steigenden, theils in sinkenden Interferenzfarben, theilweise auch neutral erscheinen. Stellen von einiger Ausdehnung, die sich beim Drehen durch alle Azimuthe neutral verhalten, sind sehr selten; es ist dies auch begreiflich, da es nicht leicht zufällig geschehen wird, dass zwei genau gleich dicke Knochenlagen, deren optische Axen senkrecht zu einander stehen, übereinander liegen. Valentin hat unter mehreren hundert Knochenschliffen nur einen einzigen solchen Flächenschliff gefunden, der die rothe Farbe des Gypsgrundes in dem grössten Theile seiner Ausdehnung wiedergab [1]. Trotzdem vermuthet Valentin, die optische Axe der Knochengrundsubstanz stehe senkrecht zu den Lamellen. Wäre dies in der That der Fall, so könnte man schwer begreifen, warum es so ausserordentlich selten vorkommt, dass Flächenschliffe neutral wirken, während sich dies durch die von mir gemachte Annahme leicht erklärt.

Die im Vorhergehenden niedergelegten Thatsachen und Schlüsse beziehen sich zunächst auf zwei besonders sorgfältig untersuchte Objecte, nämlich den Oberschenkel des Frosches und die Tibia des Menschen. Damit soll aber nicht gesagt sein, dass ich meine Untersuchungen auf diese Objecte beschränkte, ich habe vielmehr noch an zahlreichen anderen Knochen von Amphibien, Vögeln, Säugethieren und vom Menschen Beobachtungen angestellt, ohne jedoch auf Erscheinungen zu stossen, deren Erklärung mir bei Zugrundelegung der am Froschoberschenkel gewonnenen Resultate irgendwelche Schwierigkeiten geboten hätte. Ausser Röhrenknochen wurden auch eine Reihe platter und kurzer Knochen untersucht. Manchmal wurde aller-

[1] L. c. p. 261.

dings eine Controle der Richtigkeit meiner Annahmen dadurch schwierig oder unmöglich gemacht, dass die Knochenkörperchen, in verschiedenen Richtungen fast gleichmässig entwickelt, drei Richtungen des Raumes nicht mit solcher Bestimmtheit unterscheiden liessen, wie dies an Röhrenknochen fast durchwegs der Fall ist.

Es erübrigt mir noch, die Resultate dieser Arbeit zusammenzufassen.

1. Die Erscheinungen, welche das Knochengewebe unter dem Polarisationsmikroskope zeigt, lassen sich unter folgender Annahme ganz genügend erklären: Die doppelt brechenden Elemente der Grundsubstanz sind positiv einaxig und in der Hauptmasse mit ihren optischen Axen den langen Durchmessern der Knochenkörperchen parallel gestellt. Nur in der unmittelbaren Umgebung der Knochenkanälchen (Kalkkanälchen) ist eine dünne Schichte Grundsubstanz, in welcher die optischen Axen der doppeltbrechenden Elemente diesen Kanälchen parallel gerichtet sind.

2. Es ist jedoch die Möglichkeit nicht auszuschliessen, dass die doppeltbrechenden Elemente der Knochengrundsubstanz optisch zweiaxig sind. In diesem Falle läge dann die lange Axe des Elasticitätsellipsoides in derselben Richtung, wie die Eine optische Axe im vorhergehenden Falle. Der Winkel, welchen die beiden optischen Axen möglicherweise einschliessen, und der durch die lange Axe des Elasticitätsellipsoides halbirt wird, könnte nach den Versuchen am Oberschenkel des Frosches 15° bis 20°, nach den Versuchen an der Tibia des Menschen 10° bis 12° betragen.

3. Die Voraussetzung, welche auf Grund unserer Kenntnisse über die Entwicklung des Knochengewebes gemacht werden muss, dass die doppeltbrechenden Elemente des Knochens in ihrer Orientirung von der Richtung und Lage der Knochenkörperchen abhängen werden, hat sich auf das Glänzendste bewährt. Der Grund, warum die Polarisationserscheinungen des Knochengewebes bisher nicht befriedigend erklärt werden konnten, liegt einzig darin, dass die sehr wechselvollen, vom Verlaufe der Gefässkanäle nicht direct abhängigen Lageverhältnisse der

Knochenkörperchen, welche von massgebender Bedeutung sind, nicht gehörig beachtet wurden.

4. Bei der innigen Beziehung, welche zwischen der Lage der Knochenkörperchen und der Orientirung der doppeltbrechenden Elemente in der Knochensubstanz nachweislich besteht, lassen sich nun umgekehrt aus den Polarisationserscheinungen Schlüsse auf Richtung und Lage der Knochenkörperchen machen. So kann man mit Bestimmtheit behaupten, dass Durchschnitte von Lamellen senkrecht zur Längsrichtung der Knochenkörperchen geführt sind, wenn diese Lamellen wie isotrope Körper sich verhalten. Wirken dagegen die Lamellen doppeltbrechend, so liegen die langen Durchmesser der Knochenkörperchen in der Schliffebene oder sind zu derselben mehr weniger geneigt. Über der Gypsplatte Roth I. O. bedeutet die grösste Lebhaftigkeit der Additionsfarbe, dass der lange Durchmesser der Knochenkörperchen mit dem Hauptschnitte der Platte zusammenfällt; die grösste Lebhaftigkeit der Subtractionsfarbe die darauf senkrechte Richtung. Zeigen aufeinander folgende Lamellen, gleiche Dicke des Schliffes vorausgesetzt, verschiedene Interferenzfarben, so sind in diesen Lamellen die Knochenkörperchen in verschiedener Richtung orientirt und je höher, beziehungsweise tiefer die Interferenzfarbe über der Gypsplatte ist, um so kleiner ist in den betreffenden Lamellen der Winkel, den die langen Durchmesser der Knochenkörperchen mit der Schliffebene bilden.

Erklärung der Tafel.

Die Tafel enthält Mikrophotographien von zwei Knochenschliffen in gewöhnlichem und in polarisirtem Lichte zwischen gekreuzten Nicols, welche Herr Dr. Arthur v. Heider, Assistent am hiesigen physiologischen Institute, anzufertigen die Güte hatte.

Die Photographien sind getreu nach der Natur, ohne jede Retouche, wiedergegeben und können daher nicht blos als Erläuterung, sondern theilweise auch als Belegstücke für einige wichtigere, im Texte besprochene Verhältnisse dienen. Die Knochenschliffe lagen während der photographischen Aufnahme in Wasser. Bei Anwendung des polarisirten Lichtes wurde der Polarisator an der gewöhnlichen Stelle angebracht, der Analysator aber (ein Kalkspathprisma von Hartnack u. Prazmovsky) beiläufig bis in die Mitte des Mikroskop-Tubus eingeschoben.

Fig. 1. Querschliff aus der oberen Hälfte eines Oberschenkels vom Frosche in gewöhnlichem Lichte. Vergrösserung 40. (Syst. A. von Zeiss).

a. Äusserer Knochenring mit meist quer durchschnittenen Knochenkörperchen.

b. Innerer Knochenring mit mehr der Länge nach durchschnittenen Knochenkörperchen. (Die Knochenkörperchen sind der geringen Vergrösserung wegen, welche angewendet werden musste, um den ganzen Schliff abzubilden, nur schlecht zu sehen).

Fig. 2. Derselbe Querschliff, wie in Fig. , zwischen gekreuzten Prismen.

PP. Richtung der Polarisationsebene des Polarisators.

AA. Richtung der Polarisationsebene des Analysators. Der innere Knochenring erscheint hell. Nur an vier, beiläufig um Winkel von je 90° voneinander entfernten Ringabschnitten, deren Tangenten den Polarisationsebenen parallel laufen, befinden sich schwarze Flecken. Der äussere Knochenring erscheint, einige Stellen in den beiden rechtsseitigen Quadranten ausgenommen, fast gleichmässig dunkel.

Fig. 3. Stück eines Querschliffes durch die inneren umfassenden Lamellen eines dritten Mittelhandknochens vom Menschen im gewöhnlichen Lichte. Vergrösserung 60. (Syst. B von Zeiss).



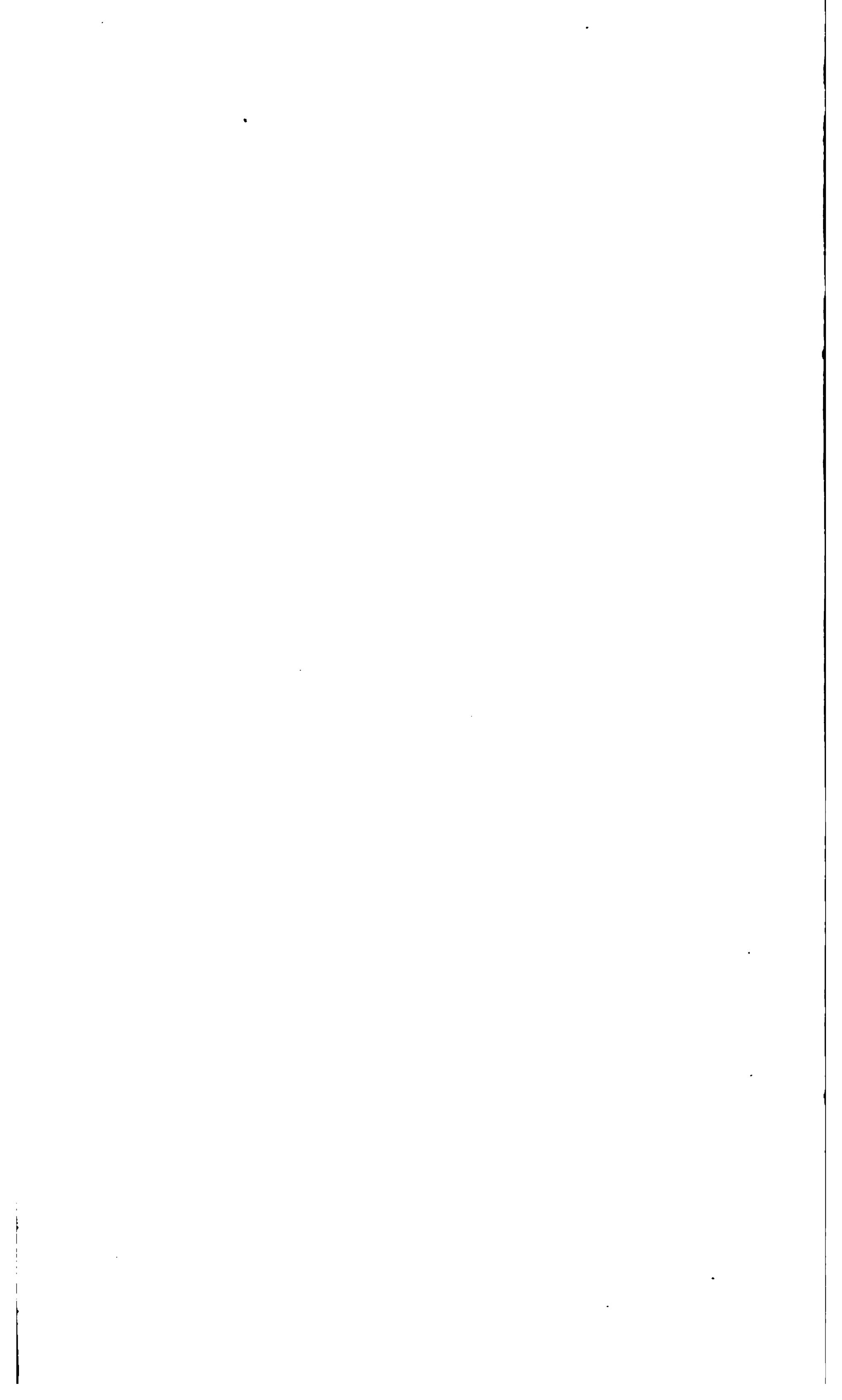
Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 2.

Phot. v. Dr A. v. Heider. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei



a. Lamellen mit grösstentheils deutlich verlängerten Knochenkörperchen, deren lange Durchmesser also in der Schliffebene liegen oder gegen dieselbe mehr weniger geneigt sind.

b. Lamellen mit kurzen, fast punktförmig erscheinenden Knochenkörperchen, die also grössentheils quer durchschnitten sind.

c. Abermals Lamellen, deren Knochenkörperchen mehr weniger verlängert erscheinen.

Fig. 4. Derselbe Schliff, wie Fig. 3, zwischen gekreuzten Polarisationsprismen.

PP. Polarisationsebene des Polarisators.

AA. Polarisationsebene des Analysators. Der Schliff ist so orientirt, dass die Lamellen, respective die langen Durchmesser der Knochenkörperchen im Azimuthe $+45°$ dahingehen. Man sieht, dass die Lamellenschichten *a* und *c* mit den verlängerten Knochenkörperchen hell sind, während die Lamellengruppe *b* mit den quer durchschnittenen Knochenkörperchen fast ganz dunkel erscheint.

Über das Verhalten der entnervten Muskeln gegen den constanten Strom.

Von dem w. M. **Ernst Brücke.**

Seitdem man weiss, dass Muskeln, welche von einem constanten Strome durchflossen werden, in einem je nach der Stärke des Stromes höheren oder geringeren Grade von Verkürzung verharren, und seitdem man gelernt hat, durch Curare die Wirkung der Nerven zu eliminiren, ist das Verhalten des entnervten Muskels gegen den constanten Strom mehrfach untersucht worden. Zuletzt hat sich nach den Untersuchungen von Engelmann die Ansicht der Physiologen wohl dahin festgestellt, dass während der Dauer des Stromes die Erregung ausschliesslich oder fast ausschliesslich von der negativen Electrode ausgehe. Es ist diess die Ansicht Engelmann's, und er führt sie weiter dahin aus, dass nur zu Anfang der Schliessung eine Contractionswelle von der Kathode aus über den Muskel ablaufe (Schliessungszuckung), und dass die dauernde Zusammenziehung ausschliesslich oder fast ausschliesslich an der Austrittsstelle des Stromes aus dem Muskel ihren Sitz habe.[1]

Er sagt diess auf Grund des folgenden Versuches (l. c. S. 316 ff.). Ein Sartorius von einem curarisirtem Frosch wird durch eine unbewegliche Klemme in zwei Theile getheilt, der eine ist an seinem freien Ende in Verbindung mit der Anode, der andere mit der Kathode. Beim Schliessen und nachherigen Öffnen der Kette zeigen beide Stücke Schliessungs- und Öffnungszuckungen, aber nur der mit der Kathode verbundene bleibt

---

[1] Beiträge zur allgemeinen Muskel- und Nervenphysiologie. Pflüger's Archiv, dritter Jahrgang (1870), S. 319.

während des Geschlossenseins dauernd verkürzt. In einem anderen Versuche wurde ein gleichfalls curarisirter Sartorius mit einem kleinen Gewichte belastet aufgehängt, am Aufhängepunkt die Anode, etwas weiter abwärts die Kathode angebracht. Die durch die dauernde Verkürzung hervorgebrachte Verdickung blieb auf die Umgebung der Kathode beschränkt.

Wenn man sich mit der dauernden Verkürzung im geschlossenen constanten Strome beschäftigt, muss man immer vor Augen behalten, dass der Muskel sich in einem ganz anderen Zustande befindet, als wenn er durch eine Reihe rasch hinter einander folgender Stromstösse in dauernde Zusammenziehung versetzt wird. In letzterem Falle folgen in allen Theilen des Muskels die Contractionsbestrebungen einander mit solcher Geschwindigkeit, dass der Muskel zwischen denselben nicht die Zeit findet, irgendwo zu erschlaffen; er ist gleichmässig contrahirt. Anders verhält es sich während des Hindurchfliessens eines constanten Stromes. Hier tauchen wellenförmige Contractionen auf, die die Fasern entlang ablaufen, aber nicht in allen gleichzeitig, sondern bald hier, bald dort und in steter Abwechslung. Es entsteht hiedurch der Anblick, als ob etwas in dem Muskel flösse, wie diess W. Kühne schon vor einer Reihe von Jahren auch am uncurarisirten Muskel beobachtete. Diese partiellen, die Muskelfasern entlang laufenden Contractionen lassen sich auch unter dem Mikroskope an dünnen Muskeln sehr gut verfolgen, namentlich unter dem Polarisationsmikroskope, wo die Erscheinung vielfarbig wird. Die Verkürzung nun ist der Ausdruck der summirten Wirkungen dieser Contractionen: sie wächst, die Erregbarkeit gleichgesetzt, mit wachsender Stromstärke, theils durch Vermehrung der Contractionswellen, theils durch Steigerung der einzelnen. Wenn man also den Erregungszustand eines Muskels beurtheilen will, der von einem constanten Strome durchflossen wird, so hat man auf zweierlei zu achten, auf seine Verkürzung und auf die partiellen Contractionen, die man an den Bewegungen seiner Oberfläche oder auch im durchfallenden Lichte an der Abwechslung von helleren und dunkleren Stellen wahrnimmt.

Ich stelle nun folgenden Versuch an: Ich durchschneide einen wohl curarisirten Frosch im Becken, enthäute die unteren

Extremitäten und nehme die Diaphysen der beiden Oberschenkelbeine sammt den Streckmuskeln des Oberschenkels heraus, so dass ich ein Präparat erhalte, welches aus den beiden Unterschenkeln und den durch das Sitz- und Schambein vereinigten Beugern der Oberschenkel besteht. Fasse ich nun die beiden Waden mit zwei Pincetten, die mit einer Kette von sechs bis zehn kleinen Daniel'schen Elementen leitend verbunden sind, so contrahiren sich und zeigen die erwähnte Wellenbewegung die Wadenmuskeln der Kathodenseite und die Beuger beider Oberschenkel. Die Wadenmuskeln der Anodenseite blieben in einigen Versuchen, abgesehen von der Schliessungszuckung, ruhig, in anderen wurden auch an ihnen durch einige Zeit die vorerwähnten wellenförmigen Contractionen beobachtet.

Ich habe diesen Versuch auch noch in anderer Weise angestellt. Ich habe ihn so angestellt, dass ich du Bois'sche unpolarisirbare Elektroden beiderseits auf die Wadenmuskeln aufsetzte, während das Präparat auf einer Glastafel lag, und die Pfoten fixirt wurden. Das Resultat war dasselbe.

Hier hatten von der Kathode keine Contractionswellen auf die Beuger der Oberschenkel ablaufen können. Man muss deshalb zugeben, dass sie sich unabhängig von jeder Kathodenwirkung contrahirten und lediglich, weil der Strom durch sie hindurchging; oder man müsste sich denn vorstellen, dass für die Oberschenkelmuskeln der Kathodenseite das Kniegelenk, für die der Anodenseite der Rest des Beckens als Kathode wirkt. Man muss sich aber doch fragen, worauf den die Elektrodenwirkung überhaupt beruhen kann. In erster Reihe beruht sie offenbar auf der Anhäufung von Jonen. Diese streben aber zunächst den Grenzen von feuchten und metallischen Leitern zu und häufen sich nur unter gewissen Umständen, die wesentlich in der Natur der mit einander verbundenenen feuchten Leiter begründet sind, im Verlaufe der Kette der feuchten Leiter an. In unserm Falle ist nicht zu erwarten, dass sich zwischen den Muskeln und den schlecht leitenden, durchfeuchteten Knochen oder in den Muskeln selbst Jonen in beträchtlichen Mengen anhäufen werden. Auch die plötzliche Änderung des Leitungswiderstandes, sofern sie als solche für die Elektrodenwirkung

in Betracht kommt, wird hier kaum die Ursache sein können. Um auch diese zu vermeiden, habe ich folgenden Versuch angestellt. Ich löse ein Bein eines curarisirten Frosches möglichst hoch oben am Becken aus, nachdem ich es zuvor enthäutet habe; dann entferne ich die Strecker des Oberschenkels und das Oberschenkelbein bis auf die untere Epiphyse. Jetzt mache ich einen Einschnitt in den unteren Theil der Masse der Beuger und präparire nach aufwärts gehend einen dicken Lappen, den ich oben mit der übrigen Masse der Beuger in Zusammenhang lasse. Diesen Lappen erfasse ich mit der Kathodenpincette, während ich mit derjenigen, die mit der Anode in Verbindung steht, die Wade des Beines ergreife. Jetzt ziehen sich wieder die Beuger dauernd zusammen, obgleich doch der Strom aus ihnen in Muskelfleisch übertritt, ohne dass eine Contractionswelle von der Kathode aus über sie ablaufen könnte; denn diese konnte nur ablaufen in den Fasern des Lappens, die dem Reste der Beuger seitlich angelagert waren, aber in ihm keine Fortsetzung fanden. Ich habe diesen Versuch noch dahin abgeändert, dass ich die Beuger entfernte und die Strecker stehen liess und aus ihnen den Lappen bildete. Das Resultat war dasselbe, nur drängte es sich dem Auge durch die Wulstung am Rande der gemeinsamen Strecksehne noch mehr auf.

Nach diesen Versuchen muss ich mich der älteren Ansicht wieder zuwenden, dass der constante Strom im Muskel auf der ganzen Strecke, welche er durchläuft contractionerregend wirke, und wenn die sichtbare Wirkung der Erregung in der Nähe der Anode bald früher bald später nach dem Schliessen der Kette, aber allgemein früher als in der Nähe der Kathode, aufhört, so muss ich dies mit von Bezold einer Herabsetzung der Erregbarkeit zuschreiben, welche sich hier ähnlich wie beim Nerven von der Anode aus verbreitet.

Ich setze natürlich nicht den geringsten Zweifel in die Richtigkeit von Engelmann's Fundamentalversuch. Wenn nicht schon sein Name für dieselbe bürgte, so würden es die sehr deutlich sprechenden Myographioncurven thun, welche er abbildet. Ich habe diesen Versuch aber auf etwas andere Weise angestellt, und dann gab er ein anderes Resultat.

Meine Klemme bestand in zwei kurzen, dünnen Glasstäben, welche an einem Ende durch ein enges Kautschukrohr zusammengehalten wurden. Nachdem der Sartorius zwischen sie gebracht worden war, wurde auf dem anderen Ende mittelst einer Pincette ein ähnliches Stück Kautschukrohr hinübergeschoben. Als Elektroden dienten mir wieder zwei Sperrpincetten. Sie erfassten nicht den Sartorius selbst; ich hatte diesen so präparirt, dass ich auf der einen Seite den Unterschenkel daran gelassen hatte, auf der andern Seite entweder das Becken, oder nur einen Theil des Beckens mit dem nun nach aufwärts geschlagenen oberen Theile des Oberschenkels. Diese Theile, und nicht der Sartorius, waren es, welche in die Pincetten eingeklemmt wurden, und es war in der Regel die Kathode am Beckenende, die Anode an der Wade. Es contrahirte sich bei dieser Anordnung auch das Stück des Sartorius, das zwischen Klemme und Anode lag, und ich habe, indem ich es im durchfallenden Lichte beobachtete, die wellenförmigen Contractionen darin bis 34 Secunden lang verfolgen können, während ich in einem Versuche, in dem ich Anode und Kathode vertauscht hatte, in demselben Theile des Sartorius, der nun zwischen Klemme und Kathode lag, diese Contractionen durch $1\frac{1}{2}$ Minuten beobachtete. In einem anderen Versuche, in dem auch die Anode am Becken und die Kathode an der Wade angebracht war, konnte ich die Contractionen des zwischen Klemme und Anode liegenden Theiles des Muskels durch 28 Secunden verfolgen.

Wenn ich mich nach der Ursache des Unterschiedes meiner Resultate und der von Engelmann frage, so glaube ich zunächst eine wesentliche in der verschiedenen Stromstärke zu finden. Engelmann scheint mit keinen stärkeren Strömen gearbeitet zu haben, als denen, welche er von zwei Daniel'schen Elementen erhielt, während ich sechs bis zehn anwendete.

Waren auch vielleicht seine Elemente grösser als die meinigen, so war doch meine Stromstärke sicher grösser; denn bei dem grossen ausserwesentlichen Widerstande in unseren Versuchen konnte der grössere Widerstand der Kette gegenüber der Vermehrung der Elemente auf das Drei- bis Fünffache nur wenig in Betracht kommen.

Ein zweiter, wenn auch weniger massgebender Grund liegt wohl darin, dass Engelmann die Anode an den Muskel selbst legte. Ich muss überdies noch bemerken, dass für Untersuchungen dieser Art das Myographion vielleicht nicht das feinste Reagens ist. Die wellenförmigen partiellen Contractionen zerren, wie man unter dem Mikroskope sieht, den augenblicklich nicht in Contraction begriffenen Theil der Muskelfaser aus. Die Contraction kann deshalb an sich lebhaft und doch die Gesammtverkürzung eine sehr geringe sein. Erst wenn die Contractionswellen sich mehr und mehr häufen und eine hinter der anderen herjagen, wird die Gesammtverkürzung eine bedeutendere.

Geringe dauernde Verkürzung scheint auch Engelmann in einigen Versuchen beobachtet zu haben, denn er sagt (l. c. p. 317): „Der Hebel kehrt aber sogleich ganz oder fast ganz in seine Anfangslage zurück" und später heisst es nach Beschreibung der oben erwähnten zweiten Versuchsanordnung: „Diese Versuche beweisen also, dass die dauernde Zusammenziehung ausschliesslich oder fast ausschliesslich an der Austrittsstelle des Stromes aus dem Muskel ihren Sitz hat".

Ich muss schliesslich noch im Vorhinein den Einwand zurückweisen, dass sich bei meinen Versuchen Nervenwirkungen eingemischt hätten, dass meine Frösche nicht hinreichend gut curarisirt gewesen wären. Wenn ich ihnen den Oberkiefer aufhob, so hing der Unterkiefer schlaff herab, ihr Blut floss schwarzbraun aus den Gefässen, und vom herauspräparirten Ischiadicus aus liessen sich keine Zuckungen, auch nicht die schwächsten, erzielen.

Engelmann's zweiten Versuch glaube ich auf eine einfache Weise erklären zu können. Hier waren beide Elektroden am Muskel selbst und in verhältnissmässig geringer Entfernung von einander angebracht. Auf der intrapolaren Strecke war die Zusammenziehung, wie zu erwarten, am stärksten an der Kathode; gegen die Anode hin musste sie wegen der dort stattfindenden Depression der Erregbarkeit bei den schwachen Strömen, mit denen Engelmann arbeitete, rasch abnehmen, zumal der Muskel, wenn auch nur mit geringem Gewichte, belastet war, also unter dem Einflusse einer, wenn auch schwachen, Zerrung stand. In der extrapolaren Strecke, die, da die

Anode am Ende angebracht war, nur an der Kathode existirte, konnte sich der Strom nur durch Schleifen verbreiten, deren Wirkung rasch abnehmen musste, wenn man sich von der Kathode entfernte. Die sichtbare Verdickung musste sich also auf die Region der Kathode concentriren, und so entstand die Gestalt des gereizten Muskels, wie sie Engelmann beobachtete und abbildete.

Kleine Mittheilungen physiologischen Inhaltes.

Von Dr. **Sigm. Exner,**

Privatdocenten und Assistenten am physiologischen Institute zu Wien

(Mit 1 Tafel.)

Ein Versuch über Trochleariskreuzung.

Während Stilling und Meynert die Ansicht vertreten, dass sich die Fasern des Nervus trochlearis im Velum medullare kreuzen, hält Schroeder van der Kolk diese sogenannte Kreuzung nur für eine Commissur und lässt die Trochlearisfasern auf derselben Seite in den Nerven eintreten, auf welcher sie entsprungen sind.

Haben die beiden ersten Autoren Recht, dann nimmt der Trochlearis eine Ausnahmsstellung unter allen motorischen Gehirn- und Rückenmarksnerven ein. Die Sache ist also von principieller Bedeutung. Die mikroskopische Untersuchung dieses Gegenstandes hat überaus grosse Schwierigkeiten[1]; ich versuchte also, ob die Frage nicht dem physiologischen Experimente zugänglich sei.

Mein Plan war dabei folgender: Lege ich zwei ungefähr 1 Mm. von einander abstehende Electroden so auf die betreffende Stelle des Velum medullare, dass die eine Electrode in der Medianlinie oder doch hart neben derselben aufliegt, und die andere lateralwärts derselben, und reize ich nun electrisch, so kann ich entweder auf beiden Augen Trochlearisbewegung erhalten, dann würde dies wegen der Anordnung der Trochlearisfasern im Velum und wegen aller mit Stromschleifen verbundenen Verdachtsgründe wenig beweisen, und die Frage müsste unentschieden bleiben; oder es bewegt sich nur das Auge der gereizten

---

[1] s. E. Brücke, Vorlesungen über Physiologie, Bd. II, S. 74.

Seite, dann kann man mit Bestimmtheit sagen, die Trochleariskreuzung finde nicht statt, denn dann wäre unbegreiflich, warum sich, wenn Kreuzung da wäre, nicht beide Augen bewegten. Die Versuche haben ergeben, dass der zweite Fall statt hat, dass also eine Trochleariskreuzung nicht existirt.

Die Anordnung derselben war folgende: Dem passend aufgespannten Kaninchen wird der Schädel freigelegt, vorne bis gegen das Nasenbein, hinten bis an das Hinterhauptbein, und seitlich wird der Ohrknorpel halb durchschnitten, so dass die Ohren herabhängen. Dann werden dem Thiere sämmtliche sechs Augenlieder weggeschnitten, und in die Bulbi je eine Nähnadel, die, um die Bewegungen deutlicher zu machen, mit Marken versehen ist, so eingesteckt, dass sie radiär zur Iris steht, also Raddrehungen des Auges erkennen lässt. Sie muss natürlich ganz frei stehen, nicht an die Haare streifen etc. Jetzt wird das Schädeldach weggenommen, die Dura entfernt, die Grosshemisphären zum Theil abgetragen, dann vorsichtig das kleine Gehirn, ohne zu zerren, mit dem Messer weggenommen, bis das Velum frei liegt. Nun werden sogleich die Electroden aufgesetzt und gereizt, während ein Assistent die Augenbewegungen beobachtet.

Als Electroden benütze ich zwei Platindrähte in ein Stäbchen von Bein eingelassen. Durch dieselben gehen die Ströme eines sehr kleinen Schlittenapparates, der durch ein Daniel in Gang gesetzt ist. Der Rollenabstand, bei welchem durchschnittlich Bewegung erzielt wird, beträgt ungefähr 12 Ctm.

Bei sämmtlichen (circa zwanzig) Versuchen, die ich angestellt habe, beobachtete ich, wenn ich nicht ausserordentlich weit über die Stromstärken stieg, bei welchen ich gleichseitige Augenbewegung erhielt, niemals beiderseitige oder gekreuzte Augenbewegung. Nimmt man zu starke Ströme, so dass eine Menge anderer Muskeln mit erregt wird, dann erhält man natürlich auch beiderseitige Trochlearisbewegung, die dann freilich wegen anderer störender Bewegungen kaum mehr als solche zu erkennen ist.

Um dieses Resultat noch zu bekräftigen, wurde dieser Versuch folgendermassen modificirt. Ich nahm directe Reizung des Trochleariskerns im unteren Zweihügel vor, nachdem ich mit einem scharfen Messer in der Medianlinie Zweihügel, Medulla

oblongata sammt Velum gespalten hatte. Zwischen die Schnittflächen schob ich, um das Übergreifen von Stromschleifen auf die andere Seite zu vermeiden, ein Glimmerblättchen. Existirt eine Trochleariskreuzung nicht, dann müssen unter diesen Verhältnissen gleichseitige Augenbewegungen eintreten. Diese traten in der That ein. Doch scheint mir dieser Versuch nicht beweisend wegen der Nähe des Trochlearisstammes, der sich ja um die Basis des Zweihügels herumschlingt. Es ist nicht unwahrscheinlich, dass Stromesantheile die Fasern des austretenden Trochlearis direct reizten, welche Fasern ihren Ursprung doch jenseits der Schnittfläche haben könnten. Besser scheint mir folgende weitere Modification des Versuches. Der Medianschnitt trennt vollkommen die Zweihügel, lässt aber das Velum intact. Er reicht bis hart an den angewachsenen Rand desselben. Die Trochleariskerne sind wieder durch Glimmer von einander getrennt. Auch jetzt erhält man auf Reizung des Kerns nur gleichseitige Trochlearisbewegung, obwohl nun zu erwarten steht, dass, wenn Stromschleifen in das Velum vordringen, diese auf der gereizten Seite die Fasern vor der Kreuzung — wenn solche existiren — ebenso in Erregung versetzen, als die Fasern nach der Kreuzung. Dieser letzte Versuch, sowie die Versuche der ersten Anordnung, scheinen mir demnach in ihrem Ergebnisse unvereinbar mit der Ansicht von einer Trochleariskreuzung.

Ich brauche schliesslich kaum zu erwähnen, dass bei Anstellung dieser Versuche alles darauf ankommt, die betreffenden Gehirnpartien erstens ohne Zerrung, zweitens so schnell freizulegen, dass man die Nerven noch in erregbarem Zustande vorfindet. Ich operirte so weit es möglich war im Blute, und reinigte die Gehirntheile, wenn es nothwendig wurde, mit Schwämmchen, die mit 1% Kochsalzlösung befeuchtet waren.

Menière'sche Krankheit bei Kaninchen.

Von den Autoren, welche in jüngster Zeit über die Bogengänge als Gleichgewichtsorgan geschrieben haben, neigen zwei, Böttcher und Cyon, der Ansicht zu, dass Gleichgewichtsstörungen, welche nach Durchschneidung der Bogengänge auftreten nicht direct von diesen herrühren, sondern indirect durch Zer-

störung des Kleinhirns zu Stande kommen. Mit Rücksicht auf diese Meinungsverschiedenheit erlaube ich mir, von drei Krankheitsfällen Mittheilung zu machen, welche ich unter der Kaninchenzucht des Laboratoriums im Laufe von etwa $1^1/_2$ Jahren zu sehen bekam. Alle drei Kaninchen zeigten dieselben Erscheinungen, die sich kurz folgendermassen zusammenfassen lassen.

Die Thiere fielen unter den anderen zunächst durch ein Schiefhalten des Kopfes auf, das allmälig von Woche zu Woche zunahm. Dabei waren sie im übrigen ganz munter. Allmälig nahm die Drehung des Kopfes zu bis sie circa 90° betrug. Nebst dieser Schiefstellung des Kopfes, war auch die Stellung des Bulbus in der Augenhöhle nicht normal. Die Bewegungen wurden immer unbehilflicher, das Fressen war erschwert, und wenn man die Thiere in diesem Zustande irgendwie reizte, so dass sie Fluchtversuche machten, fielen sie nach der Seite, nach welcher der Kopf geneigt war und wälzten sich nun so lange, natürlich immer in derselben Richtung, um die Längsaxe ihres Körpers, bis man sie fest hielt, oder bis sie irgendwo anstiessen und dadurch einen Halt bekamen. Die ganze Sache machte den Eindruck, als hätte man es mit einem Analogon zu den Tauben mit durchschnittenen Bogengängen zu thun. Dass hier wirklich Schwindelgefühle mit im Spiele waren, erhellte am deutlichsten daraus, dass die Thiere, wenn man sie in ihrem Rollen plötzlich aufhielt, den heftigsten Nistagmus zeigten. Die Erscheinungen konnten, wie bei operirten Thieren, nach Willkür und mit voller Sicherheit durch geringe Reize hervorgerufen werden, so dass ich zwei der Thiere öffentlich demonstriren konnte.

Eines dieser 3 Thiere liess ich leben bis es zu Grunde ging. Die beiden anderen tödtete ich, um bei der Section keine secundären Veränderungen vorzufinden, auf der Höhe ihrer Krankheit, in einem Stadium in welchem sie noch fressen konnten. In allen drei Fällen fand sich beiderseits vollkommene Vereiterung der Paukenhöhle und der Cellulae mastoideae mit totaler oder theilweiser Vernichtung des Trommelfells. Die Höhlungen waren mit eingedicktem Eiter vollkommen ausgefüllt. Die Eiterung in der Umgebung machte eine genaue Ermittlung über das Verhalten des Labyrinthes, insoweit es noch existirte, unmöglich; nur ein-

mal erkannte ich noch Vorhof und Schnecke und fand in beiden Blutgerinsel; in keinem Falle war das Kleinhirn, auch nicht der hart am Gehörorgan anliegende Lappen desselben sichtlich afficirt, nur in einem Falle war die Pia dieser Stelle auf einer Seite geröthet.[1]

Was die Aetiologie dieser Krankheit bei den Kaninchen anbelangt, so fiel mir auf, dass diese drei Kaninchen krätzig waren, während doch sonst in unserer Zucht Krätze eine nicht allzu häufige Krankheit ist. Ich habe also den Verdacht, dass den Thieren Krätzmilben auf das Trommelfell kamen und da Entzündung erzeugten, die sich weiter in das Innere des Ohres fortsetzte. Es ist dies übrigens ziemlich gleichgiltig; von Wichtigkeit scheint mir zu sein, dass eine Krankheit, die zweifellos vom Ohre ausgeht, Erscheinungen erzeugen kann, wie die, welche die Durchschneidung der Bogengänge hervorruft, und dass dabei die Section ein vollkommen gesundes Kleinhirn ergibt.

Ein Schulversuch aus der Muskelphysiologie.

Um die verschiedene Wirkungsweise parallelgefaserter und gefiederter Muskeln zu zeigen, bediene ich mich folgenden einfachen Apparates. Ein Gastrocnemius und einer von den parallelgefaserten Muskeln vom Oberschenkel des Frosches (die Adductoren sind dem M. sartorius vorzuziehen, da dieser zu rasch abstirbt) werden auf je einem Galgen aufgehängt, wie das Fig. 1 zeigt. Contrahiren sich die Muskeln *v* und *g* so heben sie erstens je ein Gewicht *p*, das sie auf einer Schale tragen, zweitens je einen Fühlhebel *(F)*. Diese Hebel sind aus Stroh und mit verschiedenfarbigen Scheiben versehen; sie zeigen die Höhe der Contraction an. Werden die beiden Muskeln tetanisirt und sind sie hinlänglich wenig belastet (beide tragen natürlich gleiche Gewichte), so hebt der M. adductor, wie der Fühlhebel anzeigt, sein Gewicht viel höher als der Gastrocnemius.

---

[1] Leider kann ich nicht mit Bestimmtheit sagen, ob dies der am weitesten vorgeschrittene Fall war.

Steigt man mit der Belastung über eine gewisse Grenze. so hebt der erste Muskel sein Gewicht gar nicht mehr, während der zweite sein Gewicht noch eben so hoch hebt wie früher.

Die beiden Muskeln werden durch denselben Strom tetanisirt, dessen Leitung durch das erste Quecksilbernäpfchen *q* geht, durch dieses in einen Draht, der unten in dasselbe eintaucht und oben im Muskel festgehakt ist, und der das Gewichtsschälchen trägt, ferner durch den ersten Muskel und den Draht, an welchem derselbe hängt. Dann geht der Strom durch einen Verbindungsdraht (*d*) auf den anderen Galgen über und macht hier denselben Weg in umgekehrter Richtung wieder zum Schlittenapparat zurück. Bei *s* sind Stellschrauben, mittels welcher den beiden Fühlhebeln vor dem Versuch die gleiche Stellung ertheilt wird.

Der Versuch gelingt natürlich jedesmal; ich pflege ihn so anzustellen, dass ich erst kleine Gewichte auflege, so dass der parallel gefaserte Muskel höher hebt, als der Gastrocnemius, dann mit den Gewichten steige, bis der erstere nicht mehr heben kann. Man muss sich hüten, den leicht ermüdenden Adductor zu sehr zu erschöpfen, sonst gelingt es nicht, nachträglich wieder die Hubfähigkeit desselben für kleine Gewichte zu zeigen.

Über die Lymphwege des Ovariums

zum Theil nach Untersuchungen

von Dr. A. Buckel aus Boston.

Die Lymphgefässe der inneren weiblichen Genitalien wurden erst in neuester Zeit Gegenstand genauerer Untersuchungen. Jüngst erschienen zwei Arbeiten eine „über die Lymphgefässe des schwangeren Uterus“ von Fridolin [1] und eine über die „des normalen nicht schwangeren Uterus von Leopold. [2] Diese bestimmten uns, Frau Dr. Buckel und mich, die wir uns eben mit dem Studium der Lymphgefässe der weiblichen Genitalien befassten, diesen Gegenstand nicht weiter zu verfolgen, da wir ihn zum grossen Theil in den genannten Arbeiten in guter

---

[1] Dissert. St. Petersburg 1872, russisch.

[2] Arch. f. Gynäkologie Bd. VI.

Übereinstimmung mit unseren Befunden dargestellt fanden. Insbesondere stimmen unsere Erfahrungen mit Leopolds Beschreibung, so dass wir dieselben, so weit es sich um Thatsächliches handelt, bestätigen können.

Unsere Studien erstreckten sich nicht nur auf schwangeren und nicht schwangeren Uterus, sondern auch auf das Ovarium, und was wir da fanden, möge hier in aller Kürze als gelegentliche Beobachtung — nicht als eingehende Abhandlung — mitgetheilt sein, da so viel uns bekannt ist, seit His' Abhandlung[1] über die Lymphwege des Ovariums nichts mehr geschrieben wurde und sich diese nur mit den grösseren Lymphgefässen, nicht mit den Anfängen derselben beschäftigt.

Es scheint umsomehr gerechtfertigt, wenn auch nur in Form einer Notiz, der Lymphwege des Ovariums zu gedenken, da dieses ein ganz besonders geeignetes Object zum Studium der ersten Lymphbahnen abgibt, und eben jetzt so viel über das Verhältniss derselben zum Bindegewebe gearbeitet wird.

Es ist bekannt, dass es bei Hunden und Kaninchen ein Leichtes ist, vom Hoden aus durch Einstich die Lymphgefässe bis in den *Ductus thoracicus* zu injiciren. Dasselbe geht beim Kaninchen sehr leicht, beim neugeborenen Menschen bisweilen, vom Ovarium aus. Wir pflegten bei diesen Injectionen die Nadel der Pravar'schen Spritze in der Längsrichtung des Ovariums einzustechen und circa bis in die Hälfte der Länge desselben vorzuschieben. Als Injectionsmasse gebrauchten wir entweder lösliches Berlinerblau allein, oder eine Mischung desselben mit so wenig Leim, dass sie bei Zimmertemperatur eben gelatinirte. Es füllen sich beim Einspritzen gleichzeitig die zahlreichen Lymphgefässe, welche vom Ovarium gegen die grossen Lymphstämme ziehen, und die Lymphwege, welche sich im Innern des Ovariums befinden. Indem das Ovarium blau wird, markiren sich sehr scharf die weiss bleibenden *Corpora lutea*, welche beim Kaninchen bekanntlich in grosser Anzahl vorhanden zu sein pflegen.

Härtet man nun ein solches Ovarium und fertigt mikroskopische Schnitte an, so gewahrt man eine Vertheilung der Injec-

---

[1] Max Schultze's Archiv, I.

tionsmasse, wie selbe in Fig. 2 dargestellt ist. Diese Abbildung zeigt bei schwacher Vergrösserung den Querschnitt eines Kaninchenovariums dessen Blutgefässe mit Karminleim, und dessen Lymphwege mit Berlinerblau injicirt sind. Die kleineren und grösseren Stellen bei *a* sind Corpora lutea[1] in welche die blaue Injectionsmasse, wie gesagt, nicht vordringt, bei *b* sind zwei Graaf'sche Follikel. Die Lymph- und Blutbahnen streben gegen die Axe des Ovariums, um längs derselben dem Hilus zuzulaufen. Bleiben wir zunächst beim Ovarium des Kaninchens stehen und verfolgen mit stärkerer Vergrösserung die Wege der Injectionsmasse, so ist zu erkennen, dass die Masse bis in die Zwischenräume zwischen den kubischen oder spindelförmigen Zellen vorgedrungen ist, aus welchen das Stroma des Ovariums zum grossen Theil besteht.

Ich habe dieses Verhalten genau nach der Natur in Fig. 3 abgebildet. Die feinen Fäden von Injectionsmasse vereinigen sich zu dickeren Stämmchen *(b)*, welche sich wieder vereinigen u. s. w.

Diese Stämmchen sind aber durchaus nicht Gefässe im gewöhnlichen Sinne, sie sind vielmehr durch die Injectionsmasse blau gewordene Bindegewebsbündel; auch da wo die Injectionsmasse in grösserer Menge vereinigt ist, läuft sie immer noch im Bindegewebe, und erst in der nächsten Nähe des Hilus treten wirkliche Lumina auf. So findet sich in dem Präparate, das der Fig. 2 zu Grunde liegt, kein Lymphgefäss. Ich habe das Verhalten der Injectionsmasse zum Bindegewebe in Fig. 3 möglichst getreu wiederzugeben gesucht. Wie man sieht, fliesst die Injectionsmasse nicht wie in der Sehne, dem Nabelstrang etc. zwischen den derberen Bindegewebsbündeln, sie hüllt vielmehr jede einzelne der feinsten Fäserchen ein, so dass das Bindegewebe wie blau gefärbt erscheint und nur die Kerne weiss geblieben sind. Man sieht letzteres in dem grösseren Bündel *h*. An Querschnitten solcher Bündel ist es ein Leichtes, sich davon zu überzeugen, dass hier in der That von einem Lumen nicht die

---

[1] Man kann an denselben, beiläufig gesagt, sehr schön die Neubildung von Ovarialsubstanz verfolgen.

Rede sein kann, dass vielmehr die Injectionsmasse im Bindegewebe vorwärts dringt wie das Oel im Dochte der Lampe.

Die Wege der Injectionsmasse sind, so weit sie in ihren ersten Anfängen zwischen die genannten Stromazellen fallen, unabhängig vom Verlaufe der dieses Gebiet durchziehenden Blutcapillaren; die grösseren Lymphbahnen scheinen eine Neigung zu haben dem Verlauf der grösseren Blutgefässe zu folgen, doch rührt dies nur daher, dass die Blutgefässe eben im Bindegewebe liegen. In die eigentlichen Wandungen derselben tritt die Injectionsmasse niemals ein (Fig. 3 *a*), doch füllt sich das lockere Bindegewebe um die Gefässe.

Ich bin nicht im Stande anzugeben, wo die Spalträume, welche am Hilus im Bindegewebe auftreten und die Injectionsmasse aufnehmen, zu eigentlichen Lymphgefässen werden, d. h. wo zuerst Endothelzellen in denselben auftreten. Da ich es für die Physiologie eines Organes für nicht sehr wesentlich erachte, ob die Lymphe einen Millimeter früher oder später in solchen Spalträumen verläuft, welche bereits mit einem Endothel ausgekleidet sind, so habe ich auf die Entscheidung dieser Frage weiter kein Gewicht gelegt.

Es frägt sich wodurch ich mich berechtigt fühle, von den Bahnen, auf welchen wir die Injectionsmasse vorfinden, vorauszusetzen, dass es die Lymphbahnen sind.

Heutzutage, wo auf der einen Seite noch die Ansicht vertreten ist, dass die Lymphgefässe ein in sich abgeschlossenes Netz mit Wandung versehener Capillaren bilden, und dass die sogenannten Saftcanälchen ein drittes, wie von den Blutcapillaren so auch von den Lymphcapillaren geschiedenes Canalsystem vorstellen und wo andererseits in der Histologie die Tendenz fühlbar ist, alle lockeren und widerstandslosen Räume der verschiedenen Organe speciell als Lymphräume zu beschreiben und in ihnen ein Endothel nachzuweisen, heutzutage, sage ich, ist es wohl erlaubt, einen oft auseinandergesetzten Standpunkt nochmals zu fixiren.

Die Lymphe ist die Flüssigkeit, welche aus den Blutgefässen austritt und durch den fortgepflanzten Blutdruck so wie durch andere accessorische Kräfte fortgetrieben wird. Sie nimmt, wie dies anders nicht denkbar ist, stets ihren Weg nach dem *locus minoris*

resistentiae. In unserem Falle haben wir uns überzeugt, dass die Injectionsmasse, welche im wesentlichen unter denselben Bedingungen fliesst, zwischen die Stromazellen des Ovariums eindringt und nicht in die Zellen selbst. Daher ist zu schliessen, dass die letzteren einer Flüssigkeit ein relatives Hinderniss in den Weg setzen, dass also die Lymphe, welche aus den zwischen den Zellen laufenden Capillargefässen ausgetreten ist, auch zwischen den Zellen verlaufen wird. Wir sehen ferner, dass von allen Wegen, welche die Injectionsmasse weiter einschlagen kann, der Weg durch die Bindegewebsbündel mit den geringsten Hindernissen verbunden ist und sind daher genöthigt — wollen wir nicht gewagte und unbegründete Hypothesen aufstellen — anzunehmen, dass auch die Lymphe durch die Bindegewebsbündel fliessen wird. Und so sehen wir schliesslich die Injectionsmasse dahin gelangen, wo die Lymphe notorisch fliesst, nämlich in die eigentlichen Lymphgefässe.

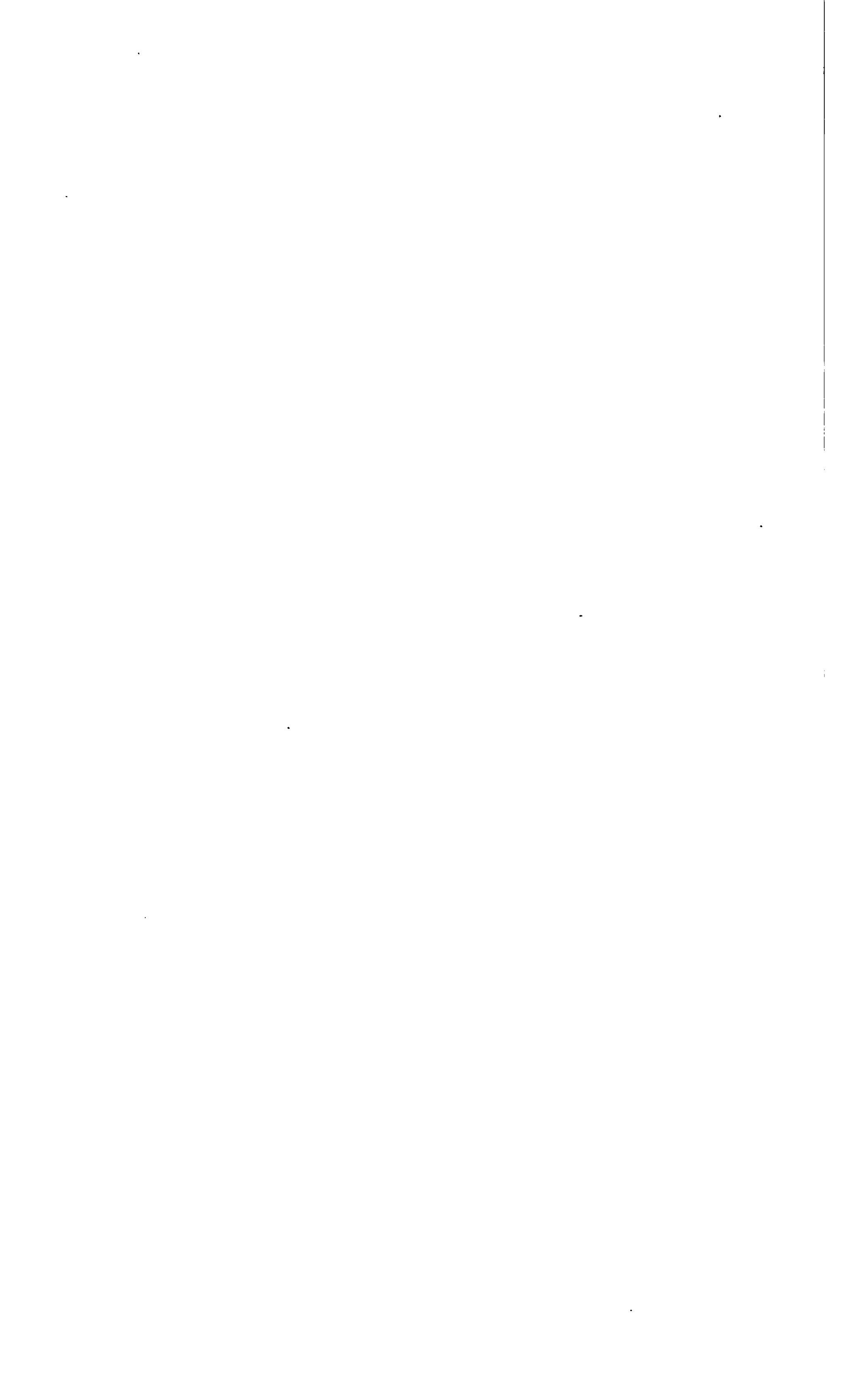
Dies ist meines Erachtens der Gedankengang, durch welchen man sich bei Beurtheilung von Lymphbahninjectionen leiten lassen muss.

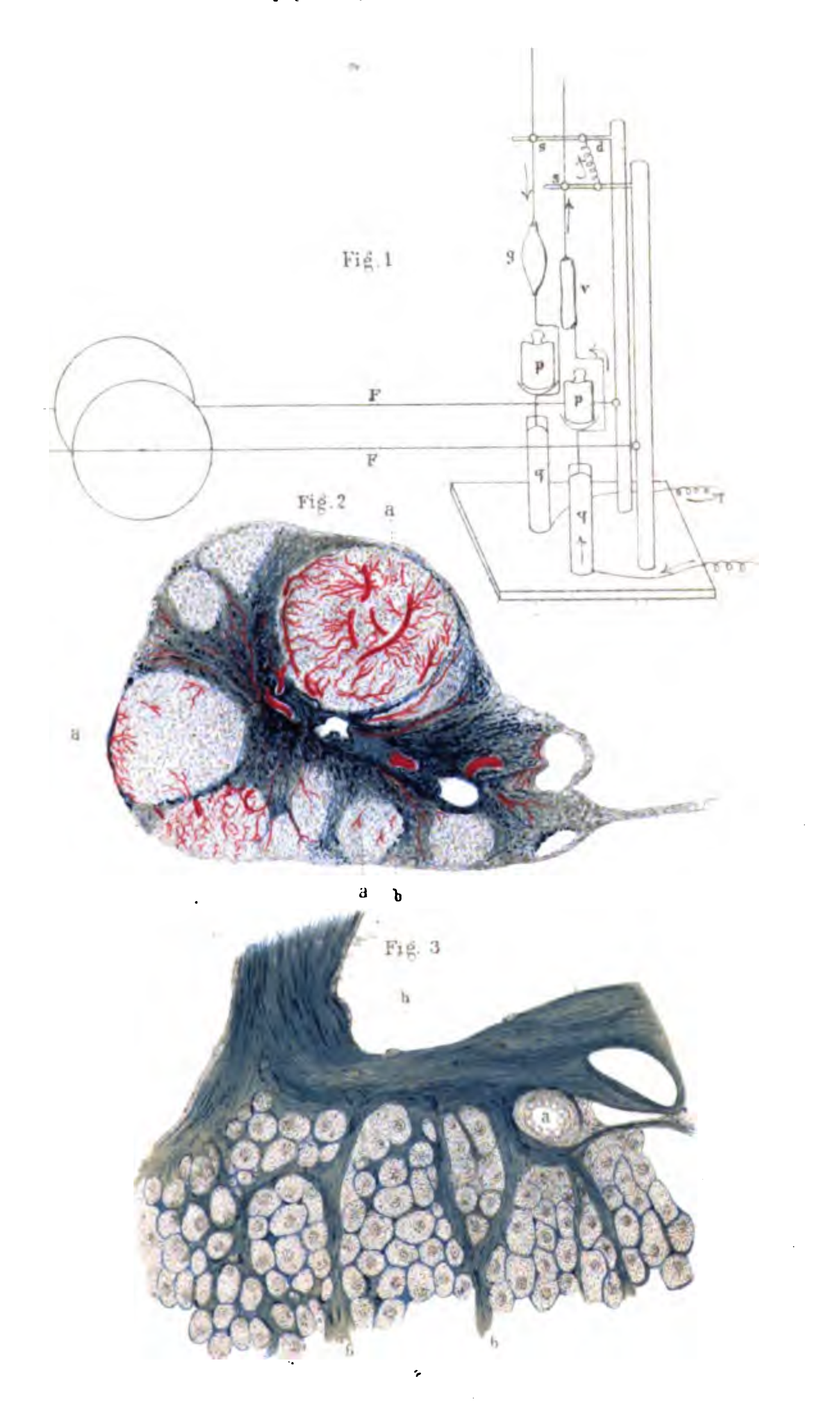
Ich habe oben gesagt, dass mir die Frage nach dem Ort des Auftretens der ersten Endothelzellen keine principielle zu sein scheint, denn erstens fliesst die Lymphe im grössten Theil des Ovariums zweifellos in Bahnen, die nicht von Endothelien ausgekleidet sind, also in unmittelbarer Berührung mit diversen Gewebselementen den Stromazellen und den Bindegewebsfibrillen: es wird wohl niemand behaupten wollen, dass bei den uns vorliegenden Bindegewebsbündeln jede Fibrille von ihrer Nachbarfibrille durch Endothelzellen oder einen Antheil einer solchen getrennt sei. Zweitens fliesst die Lymphe in jedem Organ unmittelbar nach ihrem Austritt aus dem Blutgefässlumen, also zum mindesten in der Blutgefässwand, in endothellosen Räumen.

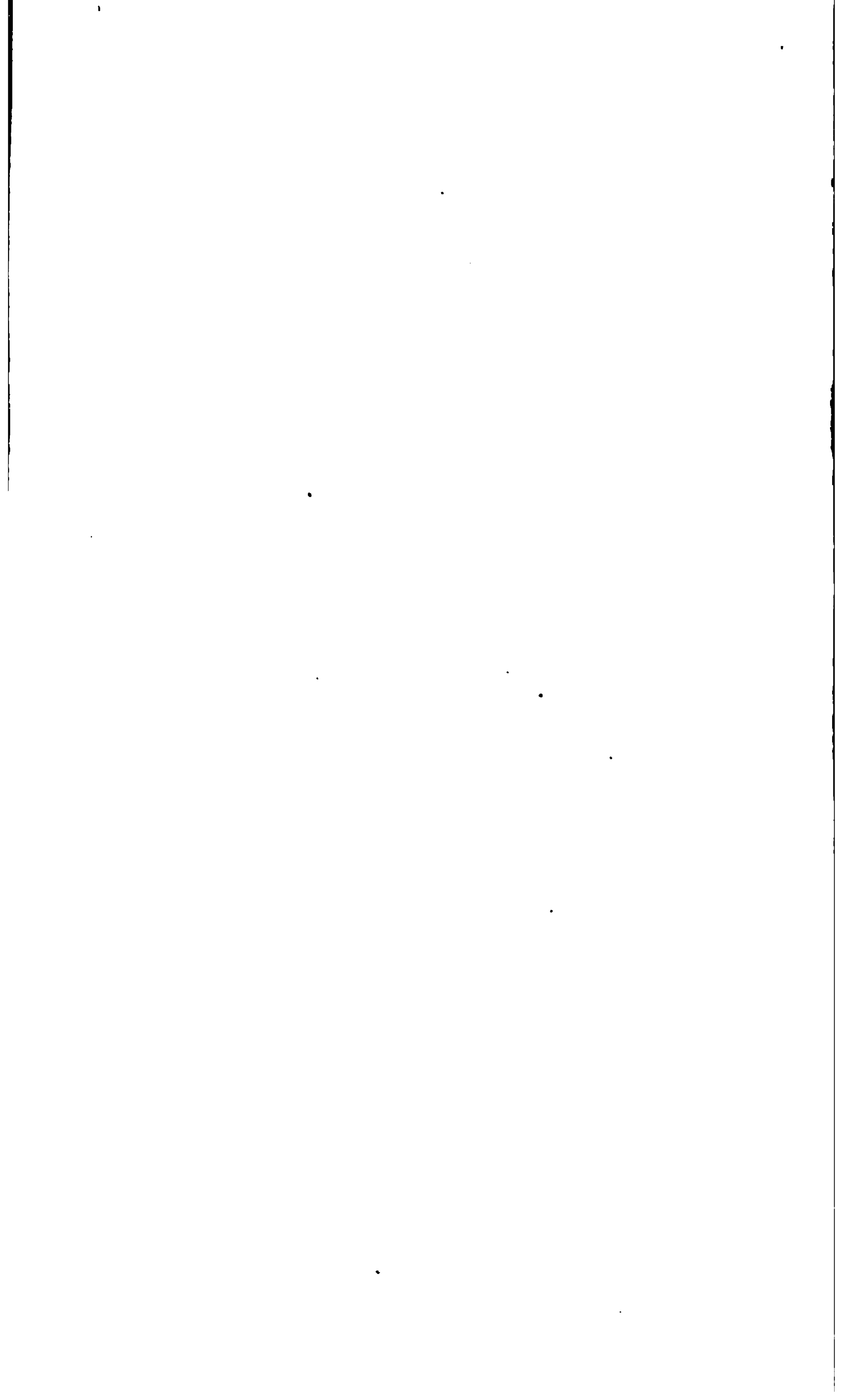
Wesentlich ebenso wie dies hier vom Kaninchenovarium auseinandergesetzt wurde, verhalten sich die Dinge beim Ovarium des neugeborenen Menschen; nur das Überwiegen des Bindegewebes über die Stromazellen gibt der Vertheilung der Lymphbahnen beim Menschen einen etwas anderen Charakter. Auch erkennt man hier besser als beim Kaninchen das Anschliessen der

grösseren Lymphbahnen an die Blutgefässe, mit andern Worten die Function der Adventitia als Lymphbahn. Nur selten sieht man am Querschnitt eines Gefässes den Lymphraum sich um das ganze Gefäss erstrecken, er reicht vielmehr gewöhnlich nur um einen Theil und zwar um mehr als um die Hälfte des Umfanges des Gefässes.

Während endlich beim Kaninchen — man kann fast sagen — überall wo Bindegewebe im Ovarium ist, auch leicht Injectionsmasse fliesst, so ist beim Menschen ein derberes Bindegewebe, dessen Bündel die Injectionsmasse nicht führen, zu unterscheiden von einem dazwischenliegenden lockeren, in welchem die Injectionsmasse ihren Weg findet, wie diess in ähnlicher Weise in der Sehne u. dgl. der Fall ist. Diess letztere bezieht sich natürlich nur auf die bindegewebsreicheren Regionen des Ovariums in der Nähe des Hilus.




Fig. 1
s
d
s
g
v
p
p
F
F
q
q
Fig. 2
a
a
a b
Fig. 3
b
a
b
b



Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und von dieser eine erhöhte Auflage in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der math.-naturw. Classe werden daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen** erscheinen, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

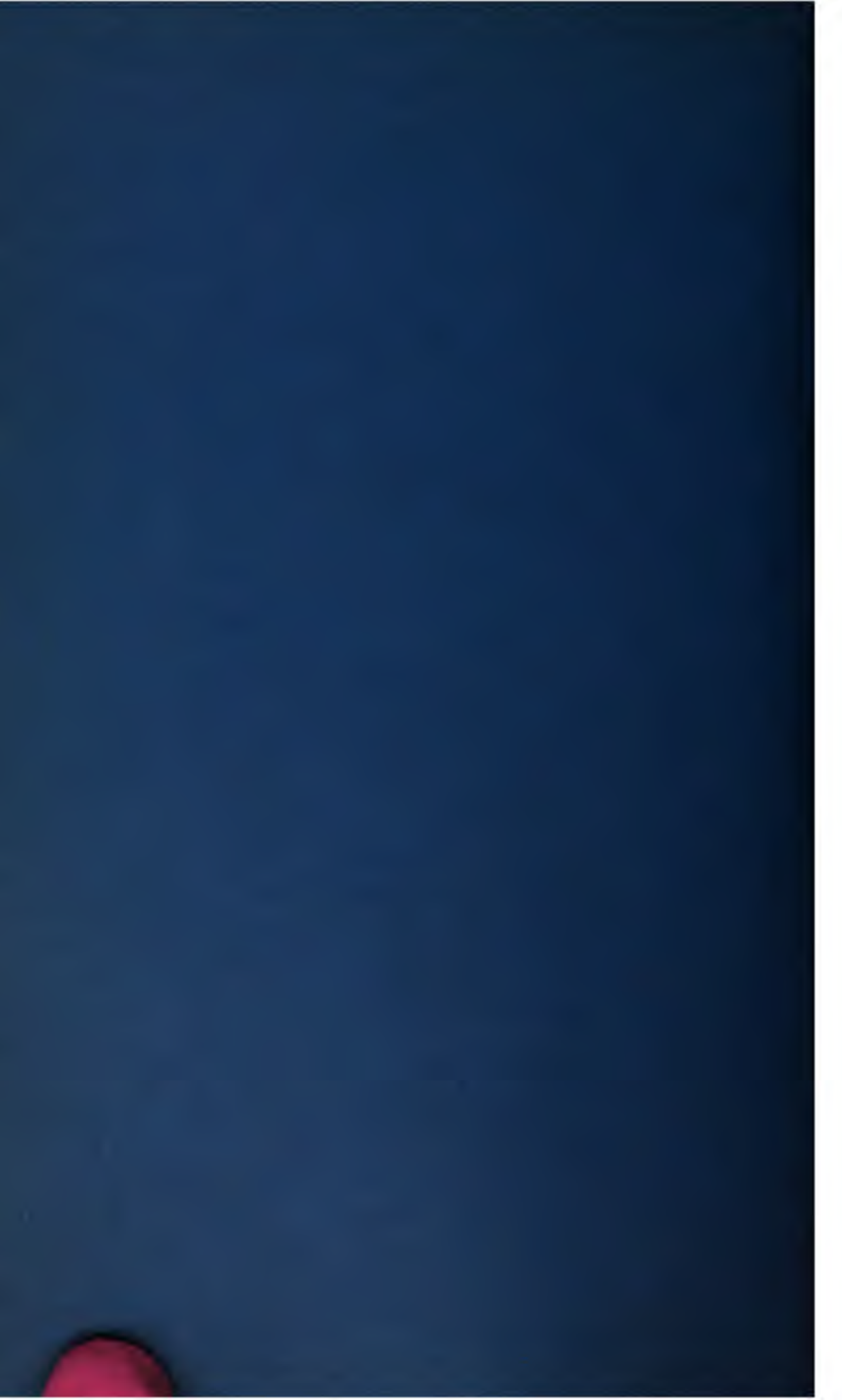
Von der I. und II. Abtheilung werden jährlich 5—7 und von der III. 3—4 Hefte erscheinen.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Der Preis des ganzen Jahrganges sämmtlicher drei Abtheilungen beträgt 24 fl.

Von allen in den Sitzungsberichten erscheinenden Abhandlungen kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) bezogen werden.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlung enthält, wird wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. BAND. III., IV. und V. HEFT.

Jahrgang 1874. — October, November u. December.

(Mit 3 Tafeln.)

DRITTE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,
BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1875.

INHALT

des 3., 4. und 5. Heftes (October, November und December 1874) des 70. Bandes, III. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 50 kr. = 1 Thlr.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. Band.

DRITTE ABTHEILUNG.

8.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

XXI. SITZUNG VOM 8. OCTOBER 1874.

Der Präsident gibt Nachricht von dem am 21. September zu Paris erfolgten Ableben des ausländischen correspondirenden Mitgliedes, Herrn Léonce Elie de Beaumont.

Sämmtliche Anwesenden gegen ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Der Secretär legt Dankschreiben vor von dem General Sir Edward Sabine in London für seine Wahl zum ausländischen Ehrenmitgliede der Classe; dann von den Herren Professoren Dr. A. Toepler in Graz, J. V. Carus in Leipzig, Max v. Pettenkofer in München und dem Sternwarte-Director G. V. Schiaparelli in Mailand für ihre Wahl zu correspondirenden Mitgliedern.

Herr Dr. L. J. Fitzinger dankt, mit Schreiben vom 1. August, für die ihm zur Vornahme von Untersuchungen über die Bastardirung der Fische in den oberösterreichischen Seen bewilligte Subvention von 250 fl.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt, mit Noten vom 22. Juli und 29. August, die graphischen Darstellungen der Eisverhältnisse der Donau und March in Niederösterreich und der Donau in Oberösterreich während des Winters 1873/4.

Das Curatorium der Franz Josephs-Universität in Agram ladet, mit Zuschrift vom 1. September, die Akademie zur Theilnahme an der am 19. October stattfindenden feierlichen Eröffnung dieser Hochschule ein.

Herr Regierungsrath Dr. E. Mach in Prag übersendet eine für den „Anzeiger“ bestimmte Notiz „über den Gleichgewichtssinn“ IV. Reihe.

Herr Dr. J. Dienger, vorm. Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe, übermittelt eine Abhandlung, betitelt: „Die La-

place'sche Methode der Ausgleichung von Beobachtungsfehlern bei zahlreichen Beobachtungen."

Herr Regierungsrath Dr. K. v. Littrow berichtet über zwei neue Entdeckungen teleskopischer Kometen, wovon die eine durch Herrn A. Borelly in Marseille am 25. Juli, und die andere durch Herrn J. Coggia ebendaselbst am 19. August gemacht worden ist.

Herr Dr. Fr. Steindachner überreicht eine Abhandlung: „Über eine neue Gattung und Art aus der Familie der Pleuronectiden und über eine neue Thymallus-Art."

Herr Professor Dr. L. Boltzmann legt folgende fünf Abhandlungen vor: 1. „Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. I. Aufsuchung des mathematischen Ausdruckes für die elastische Nachwirkung." — 2. „Über einige an meinen Versuchen über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper anzubringende Correctionen." — 3. „Über die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante des krystallisirten Schwefels nach verschiedenen Richtungen." — 4. „Experimentaluntersuchung über die Fernwirkung dielektrischer Körper", von den Herren Romich und Fajdiga. — 5. „Experimentaluntersuchung dielektrischer Körper in Bezug auf ihre dielektrische Nachwirkung" von den Herren Romich und Nowak. Die letztgenannten beiden Arbeiten wurden im physikalischen Institute der Grazer Universität unter der Leitung Boltzmann's ausgeführt.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, Kgl. Preuss., zu Berlin: Abhandlungen. Aus dem Jahre 1873. Berlin, 1874; 4°. — Monatsbericht. Mai, Juni, Juli 1874. Berlin; 8°. — Verzeichniss der Bibliothek. Berlin 1874; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 22—28. Wien, 1874; 8°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 2003—2009 (Bd. 84. 11—17.) Kiel, 1874; 4°.

Bericht des k. k. Krankenhauses Wieden vom Solarjahre 1872 und 1873. Wien, 1874; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nrs. 2—12. Paris, 1874; 4°.

Gesellschaft, Deutsche geologische: Zeitschrift. XXVI. Band, 2. Heft. Berlin, 1874; 8°.

— naturforschende, zu Freiburg i. Br.: Berichte über die Verhandlungen. Band VI., Heft 2 und 3. Freiburg i. Br., 1873; 8°.

— k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XVII. (neuer Folge VII.), Nr. 7—8. Wien, 1874; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 15—19. Wien, 1874; 8°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 30—40. Wien, 1874; 4°.

Göttingen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1873. 4° und 8°.

Kasan, Universität: Bulletin et Mémoires. Tome XLI. 1874, Nrs. 1—2. Kasan; 8°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 15—20. Graz, 1874; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1874. Nr. 11—12. Wien; 4°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administrat. Militär-Comité. Jahrgang 1874, 7.—9. Heft. Wien; 8°.

— Mineralogische, von G. Tschermak. Jahrgang 1874. Heft 2. Wien; 4°.

Moniteur scientifique du D^teur^ Quesneville. 392e & 394e Livraisons. Paris, 1874; 4°.

Nature. Nrs. 247, 249, 251—257, Vol. X. London, 1874; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Abhandlungen. Band VII, Heft Nr. 1—2. Wien, 1874; Folio. — Jahrbuch. Jahrgang 1874. XXIV. Band, Nr. 2. Wien; 4°. — Verhandlungen. Jahrgang 1874, Nr. 11—12. Wien; 4°.

Reichsforstverein, österr: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXIV. Band, 1874. August- und Septemberheft. Wien; 8°.

„Revue politique et littéraire", et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". IV• année, 2• Série, Nrs. 4—14. Paris, 1874; 4°.

Rostock, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1873/4. Fol., 4° und 8°.

Studenten-Kalender, Fromme's Österreichischer, für das Studienjahr 1874. XI. Jahrgang. Wien; 12°.

Vaughan, D., Physics of the Internal Earth. Cincinnati, O., 1874; (1 Blatt) 4°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 30—39. Wien, 1874; 4°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang, 11.—13. Heft. Wien, 1874; 4°.

Zur Lehre vom Lichtsinne.

Sechste Mittheilung.

Grundzüge einer Theorie des Farbensinnes.

Von **Ewald Hering**,
Professor der Physiologie in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Mai 1874.)

§. 38.

Das natürliche System der Farbenempfindungen.

Der Grundsatz, dass die Mannichfaltigkeit der Licht- und Farbenempfindungen zunächst nur auf Grund ihrer innern Verwandtschaft zu ordnen sei, führte (vgl. meine IV. Mittheil.) zur Einordnung aller farblosen Gesichtsempfindungen in eine Reihe, welche ich nach ihren beiden Endgliedern als die schwarzweisse bezeichnet habe. In analoger Weise lassen sich nun auch die farbigen Empfindungen in Reihen ordnen. Wie wir nämlich im Grau, trotz seiner besonderen Qualität, doch eine offenbare nahe Verwandtschaft zum Schwarz und Weiss bemerken und gleichsam beide zugleich darin sehen, so sehen wir auch z. B. im Violett Roth und Blau zugleich, nur keines voll entwickelt, was sich auch dadurch verräth, dass wir es unbedenklich als Blauroth oder Rothblau bezeichnen.

Alle Farben nun, welche zugleich Roth und Blau, wenn auch in den verschiedensten Verhältnissen, zu enthalten scheinen, lassen sich in eine Reihe ordnen, deren beide Endglieder einerseits das reinste Roth, anderseits das reinste Blau sind. Analoges gilt von allen blaugrünen, gelbrothen und gelbgrünen Farben.

Denken wir uns eine Farbenreihe, welche in stetiger Folge erstens alle Übergänge vom Gelb zum Grün und weiterhin vom Grün zum Blau enthält und also dem zwischen Gelb und Blau gelegenen Theile des Spectrums entspricht, so haben alle Glieder dieser Reihe mit Ausnahme der Endglieder (Gelb und Blau) etwas Gemeinsames darin, dass sie sämmtlich Grün enthalten. Das reine Grün aber bildet einen ausgezeichneten Punkt in der Reihe insofern, als es sich von allen Farben der einen Seite dadurch unterscheidet, dass es kein Gelb, von den Farben der anderen Seite dadurch, dass es kein Blau enthält. Es entspricht demnach der Stelle in der Reihe, wo die Beimischung von Gelb eben ganz aufgehört, aber die Beimischung von Blau noch nicht erkennbar begonnen hat. Für diese Empfindung also, welche weder Blau noch Gelb (noch Roth) enthält, haben wir deshalb auch einen besonderen Namen; denn Gelbblau oder Blaugelb könnten wir sie nicht nennen, weil wir eben in ihr nicht diese beiden Farben zugleich, sondern keine von beiden sehen. Die relative Einfachheit dieser grünen Empfindung verglichen mit der Zweifarbigkeit ihrer Nachbarn, verschafft ihr eine ausgezeichnete Stelle in der genannten Farbenreihe.

Man könnte meinen, dass diese Eigenthümlichkeit nur dem Grün des Spectrums zukomme, dass es aber sonstwo ein Grün geben könne, welches, wenn es auch vorherrschend grün sei, doch zugleich ins Blaue und Gelbe spiele. Aber dies ist bekanntlich nicht der Fall. Man betrachte irgend ein beliebiges Grün, und man wird es entweder für reines Grün nehmen, oder man wird finden, dass es e n t w e d e r ins Blaue sticht o d e r ins Gelbe, nie aber in beide Farben zugleich. Die sogenannten Schillerfarben machen von dieser Regel selbstverständlich nur eine scheinbare Ausnahme. Wenn man ein Grün, das man für reines genommen hat, neben Blau hält, so wird es vielleicht einen Stich ins Gelbe annehmen, wenn man es neben Gelb hält, einen Stich ins Blaue; legt man es aber zwischen Blau und Gelb, so wird es wieder rein erscheinen, oder, wenn dies nicht der Fall ist, entweder ins Gelbe oder ins Blaue spielen und wieder nicht n beide Farben zugleich.

Solche Farben, die gleichsam ohne jeden Beigeschmack einer anderen Farbe vorkommen können, oder wenn sie einen

solchen deutlich erkennbar haben, doch nur in eine, nie aber in zwei andere zugleich spielen können, gibt es ausser dem Grün nur noch drei, nämlich Roth,[1] Blau und Gelb. Gelb kann ins Rothe oder ins Grüne, nicht aber ins Blaue, Blau nur entweder ins Rothe oder ins Grüne, Roth nur entweder ins Gelbe oder ins Blaue spielen. Diese vier Farben kann man also mit vollem Rechte, wie dies schon Leonardo da Vinci that, als einfache oder Grundfarben bezeichnen. Deshalb hat auch die Sprache für sie einfache und nicht von farbigen Naturkörpern entlehnte Bezeichungen, mögen dieselben ursprünglich entlehnt worden sein oder nicht.

Alle übrigen Farben können wir insofern zusammengesetzte oder Mischfarben nennen, als sich immer zwei Farben in ihnen zugleich erkennen lassen. Mehr als zwei einfache Farben aber lassen sich aus keiner zusammengesetzten Farbe herausempfinden.

Anders ausgedrückt heisst dies, dass einerseits Roth und Grün, andererseits Gelb und Blau nie gleichzeitig in einer Farbe deutlich bemerkbar sind.

Warum sich dies so verhält, ist von vornherein nicht einzusehen, aber es ist so. Es kann Einer einen bereits hochentwickelten Farbensinn haben, ohne dass er sich diese merkwürdige Thatsache schon zum Bewusstsein gebracht hat. So gut es Farben gibt, in denen man zugleich Roth und Gelb sieht, so gut sollte es doch auch Farben geben können, in denen man zugleich Roth und Grün sieht. Denn die rothe Empfindung zeigt doch (abgesehen von den physikalischen und physiologischen Bedingungen, unter denen sie entsteht) zur grünen soviel und so wenig einen Gegensatz wie zur gelben. Und wenn wir auch zwischen Roth und Grün einen besonderen Gegensatz bemerken könnten, was aber durchaus nicht der Fall ist, so wäre dies doch noch immer kein hinreichender Grund, die gleichzeitige Anwesenheit beider Farben in einer Mischfarbe auszuschliessen. Weiss und Schwarz, ebenfalls zwei einfache oder Grundempfindungen des Sehorganes, fassen wir gern als gegensätzlich auf,

---

[1] Dieses reine Roth entspricht nicht dem Spectralroth, welches gelblich ist.

und doch glauben wir beide zugleich im Grau zu empfinden. Warum soll es also keine Farbe geben, die zugleich Roth und Grün, oder Gelb und Blau zu enthalten scheint? Eine Antwort ist vorerst unmöglich.

In den Lehrbüchern der Pkysik ist freilich zu lesen, dass Roth und Grün, wie auch Gelb und Blau zusammen Weiss geben. Aber dies hat nur Sinn, wenn man unter Roth und Grün nicht Empfindungen, sondern Aetherschwingungen versteht. Denn zu sagen, im Weiss werde gleichzeitig Roth und Grün, oder Gelb und Blau so empfunden, wie man im Violett gleichzeitig Roth und Blau empfindet, wäre doch paradox.

Es muss irgendwie in der Natur unseres Sehorgans begründet sein, dass das Vorhandensein einer deutlich rothen Empfindung die deutlich grüne an derselben Stelle ausschliesst, das Vorhandensein der blauen die gelbe und umgekehrt. Denn logisch lässt sich die Thatsache nicht begründen, und vorerst ist es ganz gut denkbar, dass es noch einmal gelingt, Bedingungen herzustellen, unter welchen uns eine z. B. aus Roth und Grün gemischte Empfindung entsteht, oder dass es Wesen gibt, welche eine solche Empfindung öfter haben.

Um einen kurzen Ausdruck für die sich gegenseitig ausschliessenden Grundfarben zu haben, will ich sie wegen ihres sozusagen feindseligen Verhaltens zu einander Gegenfarben nennen.

Von einer Farbe zu ihrer Gegenfarbe lässt sich keine stetige Reihe von farbigen Uebergängen bilden, wenn man nicht eine dritte Grundfarbe zu Hilfe nimmt. Vom Roth zum Blau oder Gelb lässt sich eine stetige Reihe von Uebergangsfarben herstellen, zum Grün aber nur dann, wenn man z. B. das Roth erst ins Blau und dieses wieder ins Grüne übergehen lässt. Statt des Blau könnte man aber auch das Gelb benützen.

Im sogenannten Farbencirkel wird dies Alles unmittelbar anschaulich. Man erhält einen solchen bekanntlich, wenn man einen Kreis in seine Quadranten theilt, an jeden Theilpunkt eine der vier Grundfarben derart anbringt, dass zwei Gegenfarben sich diametral gegenüber liegen, und dann auf jeden Quadranten in stetiger Reihe die Uebergangsfarben derjenigen beiden Grundfarben aufträgt, welche an seinen Endpunkten

liegen. Ein solcher Farbenkreis enthält alle überhaupt vorkommenden Farben oder Farbentöne.

Jede einfache Farbe hat nur eine, jede Mischfarbe zwei Gegenfarben.

§. 39.

Von den Farbennuancen.

Jeder beliebige Farbenton kann in sehr verschiedener Reinheit auftreten. Man nennt im gewöhnlichen Leben die möglichst rein erscheinende Farbe wohl auch gesättigt. Wir könnten also die verschiedenen Grade der Reinheit auch als Grade der Sättigung bezeichnen; nur müssten wir bedenken, dass wir dann auch mit demselben Rechte von gesättigtem Weiss und Schwarz sprechen könnten. Auf die einseitige Verwendung des Begriffs der Sättigung in der modernen Farbenlehre komme ich anderwärts zurück. Jedenfalls drückt das Wort Reinheit das, worauf es ankommt, treffender aus, als das Wort Sättigung.

Die Beimischungen, durch welche die Reinheit eines empfundenen Farbentones beeinträchtigt wird, sind nur die schwarzweissen Empfindungen, denn jede Beimischung einer anderen Farbenempfindung würde den Ton, nicht die Reinheit der gegebenen Farbe ändern. Eine Grundfarbe kann allerdings eigentlich auch durch eine andere verunreinigt werden, aber das pflegt man eben eine Aenderung des Tones zu nennen. Wie eine absolut reine Farbenempfindung sein würde, wissen wir nicht, denn alle wirklich vorkommenden Farbenempfindungen sind mehr oder weniger unrein.

Die Verunreinigung einer Farbe kann durch jedes beliebige Glied der schwarzweissen Empfindungsreihe stattfinden. Mischt sich einer Farbe eine dem Weiss naheliegende Empfindung dieser Reihe bei, so wird die Farbe weisslich, Beimischung einer sehr dunklen schwarzweissen Empfindung macht die Farbe schwärzlich, Beimischung einer dem mittlen Grau naheliegenden Empfindung lässt die Farbe ins Graue spielen.

Alle diese Uebergänge zwischen einer ideal reinen Farbe einerseits und einem beliebigen Gliede der schwarzweissen Empfindungsreihe anderseits will ich, um einen bereits üblichen

Ausdruck zu benutzen, als **Nuancen** der Farbe bezeichnen. Wir haben also schwarze, weisse, hellgraue, dunkelgraue, mittelgraue etc. Nuancen jeder Farbe zu unterscheiden.

Denkt man sich ein gleichseitiges Dreieck, an dessen einer Ecke eine absolut rein gedachte einfache oder zusammengesetzte Farbe, an dessen beiden anderen Ecken das ideale Weiss einerseits, das ideale Schwarz anderseits liegt, so lassen sich auf der Fläche dieses Dreiecks alle überhaupt denkbaren Nuancen der gewählten Farbe, z. B. des Grün in stetigen Uebergängen untergebracht denken. Auf jeder der schwarzweissen Seite parallelen Geraden, die ich in das Dreieck lege, kann ich alle Nuancen von gleich grosser Reinheit oder Unreinheit untergebracht denken. auf jeder zur grünschwarzen Seite parallelen Linie alle Nuancen von gleicher Weisslichkeit, auf jeder zur grünweissen Seite parallelen Linie alle Nuancen von gleicher Schwärzlichkeit.

In jedem Punkte dieses Nuancirungsdreiecks ist dann die Reinheit oder Sättigung der entsprechenden farbigen Empfindung dem Abstande von der schwarzweissen Seite, die Weisslichkeit dem Abstande von der grünschwarzen Seite, die Schwärzlichkeit dem Abstande von der grünweissen Seite proportional.

Soviel Farbentöne, soviel Nuancirungsdreiecke sind möglich.

Mit den möglichst reinen Farben des Farbenkreises und den Übergängen jeder einzelnen Farbe zu jedem beliebigen Gliede der schwarzweissen Reihe, also **mit den Farbentönen und allen ihren Nuancen sind, praktisch genommen, alle überhaupt vorkommenden farbigen Empfindungen erschöpft.**

Denn möge sich nun eine Farbenempfindung ändern wie sie wolle, so kann sie nur entweder ihren Ton oder ihre Reinheit ändern, und letzteren Falls kann sie nur entweder mehr oder minder schwärzlich oder weisslich oder graulich werden.

Ich sagte, dass mit den Farbentönen und ihren Nuancen alle farbigen Empfindungen praktisch genommen erschöpft sind; theoretisch genommen sind sie es nicht, weil, wie schon gesagt wurde, a priori nicht einzusehen ist, warum es nicht auch Empfindungen geben soll, in denen zwei Gegenfarben zugleich enthalten sind, obwohl uns in Wirklichkeit kein solcher

Fall sicher bekannt ist. Man muss bedenken, dass wir in einem Empfindungsgemische — und jede wirklich vorkommende Gesichtsempfindung ist ein solches — immer nur die besonders hervorstechenden einfachen Empfindungen auch besonders bemerken, dass aber mancherlei darin enthalten sein kann, was deutlich zu unterscheiden uns nicht möglich ist, obwohl es doch zum Gesammtcharakter des Empfindungsgemisches, d. h. zu dessen Qualität einen gewissen Beitrag liefern kann. So scheint es mir von vornherein fraglich, ob im sogenannten reinen, d. h. farblosen Grau wirklich nur Weiss und Schwarz enthalten ist, wenn es auch an keine Farbe deutlich erinnert und ich eben nur jene beiden einfachen Empfindungen herausfinden kann. Gesetzten Falls, die vier andern einfachen Gesichtsempfindungen, d. h. die vier Grundfarben wären mit darin enthalten, aber äusserst schwach und wären daher gleichsam unter der Schwelle, so würde ich sie doch nicht herausempfinden können. In der That macht mir reines Grau den Eindruck einer gewissen Farbigkeit, obwohl ich neben dem Schwarz und Weiss keine einzige Farbe deutlich darin zu bemerken vermag.

Auf solche möglicherweise vorhandene, aber unter der Schwelle befindliche Beimischungen ist im Obigen nicht Rücksicht genommen.

Eine Kritik dessen, was man jetzt unter Lichtstärke (Helmholtz) oder Intensität (Aubert), Sättigung (Helmholtz) und Nuance (Aubert) einer Farbe versteht, werde ich später ausführlich geben und die Widersprüche aufdecken, in welche man dadurch gerathen ist, dass man immer wieder die Empfindung mit ihren physikalischen Ursachen vermengte.

§. 40.

Von der Helligkeit und Dunkelheit der farbigen Empfindungen.

Jede wirklich vorkommende farbige Empfindung, sei sie nun durch homogenes Licht oder durch Pigmente oder sonstwie entstanden, hat etwas Schwärzliches und Weissliches in sich und erscheint deshalb dem Schwarz und Weiss verwandt, bald mehr dem einen, bald mehr dem andern, bald beiden gleichviel. Diese beiden Empfindungen sind eben jeder Farbenempfindung beigemischt, wenn auch in sehr verschiedenem Verhältniss.

Gäbe es absolut reine Farbenempfindungen, was nicht der Fall ist, so würden uns diese dem reinen Weiss eben so wenig verwandt erscheinen als dem reinen Schwarz; vom letzteren würden sie sich ebenso lebhaft unterscheiden wie das Weiss, und vom Weiss eben so sehr wie das Schwarz. Dies ist eine logische Nothwendigkeit. Denn Empfindungen, die gar nichts Gemein-

sames hätten, wären an sich incommensurabel. Zwei absolut reine Grundempfindungen aber würden, abgesehen von ihren zeitlichen und räumlichen Eigenschaften wirklich nichts Gemeinsames haben. Dem absolut reinen Roth stände das absolut reine Blau oder Grün ebenso unähnlich gegenüber wie das absolut reine Weiss. Darauf, dass die absolut reinen Farben ebenso wie das Weiss sämmtlich gar keine Spur von Schwarz enthalten würden, liesse sich kein Verwandtschaftsverhältniss dieser ganz schwarzlosen Empfindungen gründen, denn Süss und Sauer enthalten auch keine Spur von Schwarz. Ebenso könnte daraus, dass die absolut reinen Farben gleich dem idealen Schwarz gar kein Weiss enthalten würden, keine Verwandtschaft dieser absolut weisslosen Farben untereinander abgeleitet werden.

Aber allerdings kann man die Begriffe der Helligkeit und Dunkelheit, die bei den farblosen Empfindungen identisch sind mit der Weisslichkeit und Schwärzlichkeit, dahin erweitern, dass man alle Gesichtsempfindungen, mit Ausnahme des absoluten Schwarz, mehr oder minder hell nennt, und alle, mit Ausnahme des absoluten Weiss, mehr oder minder dunkel. Eine absolut reine Farbenempfindung wäre hienach hell und dunkel zugleich oder gleich hell wie dunkel und zwar deshalb, weil sie eben so wenig eine Spur vom Schwarz als vom Weiss enthalten würde. Demnach wäre die absolut reine Farbe in Bezug auf Helligkeit und Dunkelheit gleichwerthig mit dem neutralen oder mittlen Grau, welches ebenfalls gleich hell wie dunkel ist, nur mit dem Unterschiede, dass die reine Farbe deshalb gleich hell wie dunkel ist, weil sie vom Weiss so wenig enthält wie vom Schwarz, nämlich gar nichts, während das neutrale Grau deshalb gleich hell wie dunkel ist, weil es gleich viel Weiss wie Schwarz enthält.

Wir können demnach sagen, dass die absolut reinen Farben, gleich dem mittlen Grau, Empfindungen von gleich grosser Helligkeit wie Dunkelheit, oder von mittler Helligkeit oder Dunkelheit sein würden.

Diese Überlegung gestattet nun, ganz bestimmt anzugeben, wovon das abhängt, was man im gemeinen Leben die Helligkeit einer Farbenempfindung nennt.

Eine farbige Empfindung wird bei gleichbleibender Reinheit oder Sättigung heller, wenn sich das Verhältniss des gleichzeitig

in ihr empfundenen Weiss und Schwarz zu Gunsten des Weiss ändert, dunkler, wenn es sich zu Gunsten des Schwarz ändert; anders gesagt, wenn die der Farbenempfindung beigemischte schwarzweisse Empfindung, ohne ihr Verhältniss zur ersteren zu ändern, weisslicher oder schwärzlicher wird.

Mindert eine farbige Empfindung ihre Reinheit oder Sättigung dadurch, dass die ihr beigemischte schwarzweisse Empfindung, ohne aber dabei ihre Helligkeit (Weisslichkeit und Schwärzlichkeit) zu ändern, stärker hervortritt; so kann dabei die Farbe heller oder dunkler werden, oder auch gleich hell bleiben. Letzteres dann, wenn die beigemischte schwarzweisse Empfindung das mittlere Grau ist; heller wird sie, wenn die beigemischte Empfindung weisslicher ist als mittles Grau, dunkler, wenn sie schwärzlicher ist, als mittles Grau.

Mehrt sich die Sättigung oder Reinheit einer Farbe dadurch, dass die beigemischte farblose Empfindung, ohne ihre Helligkeit zu ändern, mehr zurücktritt, so ändert sich die Helligkeit der farbigen Empfindung gar nicht, wenn die Beimischung mittelgrau; die Helligkeit wird kleiner, wenn die Beimischung weisslicher, sie wird grösser, wenn die Beimischung schwärzlicher ist, als das mittle Grau.

Aus dem Gesagten lässt sich nun auch leicht ableiten, ob und wie eine farbige Empfindung ihre Helligkeit ändert, wenn sich nicht nur ihre Reinheit, sondern zugleich auch die Helligkeit der ihr beigemischten farblosen Empfindung ändert. In dem oben beschriebenen Nuancirungsdreiecke liegen alle Nuancen der betreffenden Farbe, die gleichhell wie dunkel oder mittelhell und mitteldunkel sind, auf einer Geraden, welche die farbige Ecke des Dreiecks mit dem Mittelpunkte der schwarzweissen Seite verbindet, und auf jeder Geraden, welche ich parallel zu dieser Linie in das Dreieck gelegt denke, befinden sich Nuancen von gleicher Helligkeit, und zwar ist die Helligkeit jeder beliebigen Nuance proportional dem Abstande der Helligkeitslinie, auf der sie liegt, von der schwarzen Ecke des Dreiecks.

Es kann also eine Farbe, während sie reiner oder gesättigter wird, das einemal heller, das anderemal dunkler werden und anderseits kann sie ohne Änderung ihrer Reinheit heller oder dunkler werden.

Da man somit unter dem Hellerwerden einer farbigen Empfindung eine Zunahme bald der Weisslichkeit, bald der Reinheit versteht, unter dem Dunklerwerden eine Zunahme bald der Schwärzlichkeit, bald der Reinheit, so taugt dieser Doppelsinnigkeit wegen der Begriff der Helligkeit oder Dunkelheit nicht zu präcisen Bezeichnungen.

Meiner Behauptung, dass die absolut reinen Farben alle gleich hell und gleich dunkel sein würden, scheint der Umstand zu widersprechen, dass die Spectralfarben, welche sich den absolut reinen mit am meisten nähern, eine so verschiedene Helligkeit zeigen. So ist beispielsweise das Gelb im Spectrum des zerstreuten Tageslichtes viel heller als das Blau. Dies hat aber seinen Grund darin, dass dieses Gelb viel mehr Weiss enthält als das Blau, wie man dies auch sofort erkennt. Da nun das Gelb oder das Blau der Pigmente eben auch nichts weiter ist, als zurückgeworfenes Spectralgelb oder Spectralblau, nur noch stark versetzt mit gemischtem farblosen Lichte, so ist begreiflich, dass auch die gelben Pigmente durchschnittlich heller erscheinen als die blauen. Daher kann das Vorurtheil entstehen, dass auch die absolut reinen Farben verschiedene Helligkeit besitzen würden. Eine später zu gebende physiologische Analyse des Spectrums wird dies näher zu erörtern haben.

§. 41.

Von der numerischen Bezeichnung der farbigen Empfindungen.

Dasselbe Princip, nach welchem im §. 22 die einzelnen schwarzweissen Empfindungen bezeichnet wurden, lässt sich auch auf die farbigen Empfindungen anwenden.

Keine der vier Grundfarben kommt, auch wenn sie im Tone ganz rein wäre, jemals wirklich rein zur Empfindung, sondern hat immer einen Zusatz von Schwarzweiss, d. h. also jede Empfindung vom Tone einer Grundfarbe ist ternär zusammengesetzt. Ihre Qualität lässt sich daher ausdrücken durch ein dreigliedriges numerisches Verhältniss, welches dem Verhältnisse der Deutlickkeit der drei gemischten einfachen Empfindungen entspricht. So bedeutet die Gleichung

Blau : Weiss : Schwarz = 1 : 1 : 1

eine Empfindung, welche aus zwei Theilen mittlem Grau (1 Schwarz + 1 Weiss) und einem Theile Blau, oder aus gleichen Theilen Weiss, Schwarz und Blau gemischt ist, an alle

drei gleich stark erinnert, mit allen dreien gleich sehr verwandt ist.

Die Reinheit einer Grundfarbe ergibt sich schon aus dem Verhältnisse, in welchem das der Farbe entsprechende Glied des dreigliedrigen Verhältnisses zur Summe der beiden anderen Glieder steht. Dies Verhältniss wäre für die oben erwähnte Farbe Blau : (Weiss + Schwarz) = 1 : 2. Da es überhaupt nur auf Verhältnisse ankommt, und man deshalb die Gesammtempfindung immer = 1 setzen kann, so lässt sich die Reinheit der Farbe, in unserm Falle ihre Bläue ausdrücken durch das Verhältniss, in welchem das blaue Glied zur Summe aller drei Glieder steht, also durch $1/3 = 0{,}33$.

Wenn man will, kann man die so bestimmte Reinheit der Farbe auch ihre Intensität nennen. Es ist dies eben ein Ausdruck, der für die Empfindung nur Sinn hat in Beziehung auf die neben der Farbe empfundene schwarzweisse Beimischung.

Die Helligkeit einer farbigen Empfindung vom Tone einer Grundfarbe findet man, wenn man das der Grundfarbe entsprechende Glied hälftet und die eine Hälfte zum schwarzen, die andere zum weissen Gliede des Verhältnisses addirt; das Verhältniss des so vermehrten Weiss zum vermehrten Schwarz weist der ganzen Empfindung diejenige Helligkeit zu, welche die entsprechende schwarzweisse Empfindung haben würde. Wir erhalten also in unserm Falle

$$(W + 1/2\ \text{Blau}) : (S + 1/2\ \text{Blau}) = 1{,}5 : 1{,}5$$

das ist dasselbe Verhältniss zwischen Weiss und Schwarz, wie es im mittlen Grau besteht, dessen Helligkeit = 0,5 ist.

Die Helligkeit eines absolut reinen Blau würde hienach auch = 0,5 sein, seine Reinheit aber nach dem oben Gesagten = 1.

Enthält die farbige Empfindung nicht blos eine Grundfarbe, sondern ein Gemisch zweier Grundfarben, und ist sie demnach quaternär zusammengesetzt, so wird sie durch ein viergliedriges Verhältniss bezeichnet, wie z. B.

$$\text{Roth} : \text{Blau} : \text{Weiss} : \text{Schwarz} = 4 : 4 : 1 : 3,$$

dies ist also eine dunkle Nuance des Violett. Addirt man hier die beiden farbigen Glieder, so bekommt man Rothblau = 8, und kann nun mit diesen 8 Rothblau ganz ebenso verfahren, als wäre

dies Rothblau eine Grundfarbe. Die Reinheit der Farbe ergibt sich dann aus dem Verhältniss

$$(\text{Roth} + \text{Blau}) : (\text{Schwarz} + \text{Weiss}) = 8 : 4$$

und ist $= \frac{8}{8 + 4} = 0{,}666\ldots$

Die Helligkeit aber ergiebt sich aus dem Verhältniss

$$\left(\text{Weiss} + \frac{\text{Rothblau}}{2}\right) : \left(\text{Schwarz} + \frac{\text{Rothblau}}{2}\right) = 5 : 7$$

und ist $= \frac{5}{5 + 7} = 0{,}41666\ldots$

Auch die Schwerpunktconstruction, welche im Übrigen viel Verwirrung in der Farbenlehre verschuldet hat, lässt sich anwenden, um diese Verhältnisse anschaulich zu machen. Man denke sich die drei Ecken des oben beschriebenen Nuancirungsdreieckes der gegebenen Grund- oder Mischfarbe belastet mit den drei Gliedern des Verhältnisses

Farbe: Weiss : Schwarz,

und construire den Schwerpunkt des im Übrigen schwerlosen Dreiecks: die Lage dieses Punktes im Dreieck gestattet nach §. 39 die Reinheit, nach §. 40 die Helligkeit der gegebenen Farbennuance zu finden.

§. 42.

Hauptsätze einer neuen Theorie des Farbensinnes.

Wir sind durch eine meiner Ansicht nach ganz vorurtheilsfreie Analyse der Gesichtsempfindungen zur Annahme von sechs einfachen oder Grundempfindungen gelangt, von welchen zwei, nämlich Weiss und Schwarz, bereits früher erörtert wurden. Es gilt jetzt, die dort entwickelte Theorie der schwarzweissen oder farblosen Gesichtsempfindungen durch eine Theorie der farbigen zu ergänzen. Ich theile hier sofort die Hauptsätze derselben mit.

Die sechs Grundempfindungen der Sehsubstanz ordnen sich zu drei Paaren: Schwarz und Weiss, Blau und Gelb, Grün und Roth.

Jedem dieser drei Paare entspricht ein Dissimilirungs- und Assimilirungsprocess besonderer Qualität, so dass also die Sehsubstanz in dreifach verschiedener Weise der chemischen Veränderung oder des Stoffwechsels fähig ist.

Die Richtigkeit dieser Vordersätze vorausgesetzt, eröffnen sich nunmehr zwei Möglichkeiten. Entweder die drei Arten des Stoffwechsels stehen zu einander in gegenseitiger Abhängigkeit, oder jede derselben verläuft unabhängig von der anderen. Die letztere Möglichkeit ist nicht nur die einfachere, sondern stimmt auch, so weit ich bis jetzt sehe, mit den Thatsachen. Deshalb kann ich auch die Sehsubstanz gleichsam als ein Gemisch dreier chemisch verschiedener Substanzen ansehen, deren jede (wenigstens innerhalb der hier in Betracht kommenden Grenzen) unabhängig von den beiden andern zu dissimiliren und zu assimiliren vermag. Diese Auffassung vereinfacht die Darstellung wesentlich, und nur deshalb ziehe ich sie der andern und im Grunde vielleicht richtigeren Auffassung vor, nach welcher die Sehsubstanz eine ganz homogene Substanz darstellt, die jedoch dreier verschiedener Arten der Dissimilirung und Assimilirung fähig ist.

Unter diesem Vorbehalte kann ich *drei verschiedene Bestandtheile der Sehsubstanz* unterscheiden, welche ich als die *schwarzweiss empfindende*, die *blaugelb empfindende* und die *rothgrün empfindende Substanz* bezeichnen will.

So gut man aber im übertragenen Sinne von rothen, gelben etc. Strahlen spricht, kann man auch die drei Substanzen kurzweg als die schwarzweisse, blaugelbe und rothgrüne unterscheiden und erstere als die *farblose* den beiden andern als den *farbigen* entgegensetzen.

Für die schwarzweisse Sehsubstanz, welche also jetzt an die Stelle der in der fünften Mittheilung als Sehsubstanz überhaupt bezeichneten Substanz tritt, habe ich angenommen, dass ihre Dissimilirung dem Weiss, ihre Assimilirung dem Schwarz entspricht; *für die blaugelbe und rothgrüne Substanz lasse ich vorerst ausdrücklich dahin gestellt sein, welche Farbe die D-Farbe und welche die A-Farbe ist. Die drei Substanzen setzen nicht zu gleichen*

Theilen die Sehsubstanz zusammen, vielmehr i die schwarzweisse Substanz viel reichlicher im Se organ enthalten als die beiden anderen, und auc diese beiden sind unter sich nicht gleich.

Wie in der schwarzweissen Substanz fortwährend gleic zeitig Dissimilirung und Assimilirung stattfindet, so auch den beiden anderen Substanzen. Aber entsprechend der verschi denen Quantität der drei Substanzen ist im Allgemeine auch die Dissimilirung und Assimilirung der schwarzweissen Su stanz viel bedeutender als die der beiden farbigen Substanzen, u daher auch das Gewicht der immer gleichzeitig vorhanden sechs Grundempfindungen ein sehr verschiedenes: relativ gro das der schwarzen und weissen, sehr klein das der vier farbig Grundempfindungen.

Daher treten die farbigen Empfindungen nur unter besonde günstigen Umständen über die Schwelle, im Übrigen werden s von der gleichzeitigen schwarzweissen Empfindung übertönt.

Alle Strahlen des sichtbaren Spectrums wirke dissimilirend auf die schwarzweisse Substanz, abe die verschiedenen Strahlen in verschiedenem Grad Auf die blaugelbe oder die grünrothe Substanz da gegen wirken nur gewisse Strahlen dissimiliren gewisse andere assimilirend und gewisse Strahle gar nicht. Jede der drei Substanzen sieht also sozusagen i besonderes Spectrum; im wirklichen Spectrum liegen diese dr Partialspectren gleichsam über- oder ineinander. Das Spectru der schwarzweissen Substanz ist am weissesten oder hellsten i „Gelb“, und nimmt nach beiden Seiten an Helligkeit ab. Da Spectrum der blaugelben Substanz zerfällt in zwei Theile, eine gelben und einen blauen; beide Theile sind geschieden durc eine Stelle, welche für die blaugelbe Substanz lichtlos ist, da ist die Stelle des reinen „Grün“. Das Spectrum der grünrothe Substanz zerfällt in drei Theile, einen mittleren grünen und zwe rothe Endtheile. Dem entsprechend enthält es zwei Stelle welche für die grünrothe Substanz lichtlos sind, d. h. die Stell des reinen „Gelb“ und des reinen „Blau“. Das Totalspectru der Sehsubstanz hat also drei physiologisch ausgezeichnet Punkte, d. s. diejenigen, wo ausser dem Weiss nur eine Grund

farbe sichtbar ist, nämlich das reine Gelb, Grün und Blau. Das eigentliche Roth ist im Spectrum äusserst schmal, denn das Spectralroth enthält viel Gelb.

Der erste Theil des Spectrums vom Roth bis zum reinen Gelb ist also (wenn wir vom Schwarz und den unter der Schwelle befindlichen Gegenfarben der sichtbaren Farben absehen) gemischt aus Weiss, Roth und Gelb; der zweite Theil vom reinen Gelb bis zum Grün ist gemischt aus Weiss, Gelb und Grün, der dritte Theil von Grün bis Blau aus Weiss, Grün und Blau, der vierte endlich aus Weiss, Blau und Roth. Im reinen Gelb, Grün und Blau erscheint ausser der entsprechenden Grundfarbe nur noch Weiss.

Gemischtes Licht erscheint farblos, wenn es sowohl für die blaugelbe als für die rothgrüne Substanz ein gleichstarkes Dissimilirungs- wie Assimilirungsmoment setzt, weil dann beide Momente sich gegenseitig aufheben, und die Wirkung auf die schwarzweisse Substanz rein hervortritt.

Zwei objective Lichtarten, welche zusammen Weiss geben, sind also nicht als „complementäre“, sondern als antagonistische Lichtarten zu bezeichnen, denn sie ergänzen sich nicht zu Weiss, sondern lassen dieses nur rein hervortreten, weil sie als Antagonisten sich gegenseitig ihre Wirkung unmöglich machen.

Da die Grösse der Dissimilirung oder Assimilirung, welche durch einen Lichtreiz in einer der drei Substanzen bedingt wird, ebensowohl von der Intensität des Reizes als von der Erregbarkeit abhängt, so haben wir entsprechend den drei Substanzen oder Qualitäten des Stoffwechsels in der Sehsubstanz auch drei verschiedene Arten der *D*-Erregbarkeit sowie der *A*-Erregbarkeit, also im Ganzen sechs verschiedene Arten der Erregbarkeit zu unterscheiden, die wir kurzweg als die schwarze, weisse, grüne, rothe, blaue und gelbe Erregbarkeit unterscheiden können.

Jede dieser sechs Erregbarkeiten ist eine variable Grösse und insbesondere ist eine *D*-Erregbarkeit keineswegs immer gleichgross wie die entsprechende *A*-Erregbarkeit, vielmehr kann das Verhältniss beider ein sehr verschiedenes sein.

Daher kann auch ein und dasselbe objective Lichtgemisch nicht nur bald heller und bald dunkler, sondern auch bald irgendwie farbig und bald farblos erscheinen, je nach den Verhältnissen der eben vorhandenen sechs Erregbarkeiten, welche das bedingen, was ich die Stimmung des Sehorgans nennen will.

§. 43.

Vom Gewichte der Farbenempfindungen.

Wenn, wie oben angegeben wurde, die farbigen Sehsubstanzen von der farblosen an Masse übertroffen werden, so folgt, dass auch die Grösse ihrer Assimilirung und Dissimilirung und entsprechend das Gewicht der zugehörigen Empfindungen im Allgemeinen kleiner sein wird als die Grösse der farblosen Assimilirung und Dissimilirung, beziehentlich das Gewicht der entsprechenden schwarzweissen Empfindung. Nehmen wir an, das Sehorgan sei lange verdunkelt gewesen, und es habe sich ein Zustand desselben hergestellt, bei welchem die Dissimilirung nicht blos in der farblosen Substanz (vgl. §. 31), sondern auch in jeder farbigen eben so gross wie die Assimilirung, und also das Sehorgan gleichsam in neutraler Stimmung ist, so werden jetzt in der Gesammtempfindung des Sehorgans je zwei Gegenfarben gleich stark enthalten sein, aber das Weiss und Schwarz stärker als die vier Grundfarben.

Die Empfindung, welche diesem Zustande des Sehorgans entspricht, habe ich als das mittle Grau bezeichnet und dasselbe zunächst als eine nur binär, nämlich aus Schwarz und Weiss gemischte Empfindung angesehen. Aber genau genommen ist dies nicht richtig; denn es sind in dieser Mischempfindung auch die vier Grundfarben enthalten, jedoch so schwach, dass sie nicht über die Schwelle, d. h. nicht deutlich erkennbar hervortreten, und nur die Verwandtschaft dieses Grau mit dem Schwarz und Weiss offenbar ist (vgl. §. 39).

Dass wir nun Roth und Grün oder Gelb und Blau nie gleichzeitig in einer Mischfarbe enthalten sehen, wie etwa im Violett das Roth und Blau, hat seinen Grund darin, dass durch sogenanntes farbiges Licht immer nur einer von zwei Gegen-

farben zu einem relativ starken Gewichte verholfen werden kann. Denn wenn wir zu einem eben wirkenden farbigen Lichte solches Licht in mässiger Menge beimischen, welches für sich allein die Gegenfarbe erwirken würde, so schwächen wir damit wegen der antagonistischen Wirkungen beider Lichtarten zunächst die Wirkung des ersten Lichtes, mindern also das Gewicht der ersten Farbe ohne die Gegenfarbe zu verstärken und erreichen somit das Gegentheil von dem, was wir beabsichtigten. Enthielte das gemischte Sonnenlicht auch Strahlen, welche assimilirend auf die schwarzweisse Substanz wirkten, könnten diese Strahlen bis zur Netzhaut gelangen und wäre ihre assimilirende Wirkung eben so stark wie die dissimilirende der wirklichen Sonnenstrahlen, so würden wir solches Sonnenlicht auch nicht mittelst der schwarzweissen Substanz und also gar nicht sehen; wie wir ja auch das im passenden Verhältnisse gemischte blaue und gelbe Licht mittels der blaugelben Sehsubstanz nicht sehen.

Lassen wir das Licht von einem der drei ausgezeichneten Punkte des Spectrums, also z. B. das rein grün erscheinende Licht auf das neutral gestimmte Sehorgan wirken, so verstärkt es die schon vorhandene schwache grüne Empfindung, zugleich aber auch die weisse. Mit dem Hervortreten der grünen Empfindung ist also zugleich eine Verstärkung der weissen gegeben und es entsteht eine Mischempfindung, in welcher ausser dem Grün auch das Weiss gewichtig und nebstdem auch noch das Schwarz als die Assimilirungsfarbe der schwarzweissen Substanz mehr oder minder deutlich erkennbar ist (vgl. §. 39), während die rothe, gelbe und blaue Empfindung unter der Schwelle bleiben. So kommt es, dass selbst die Spectralfarben durchaus nicht rein, sondern immer sehr merklich mit einer schwarzweissen Empfindung versetzt sind. Denn was von den grünen Strahlen gesagt wurde, lässt sich auf jeden andern Theil des Spectrums übertragen, gleichviel ob seine Strahlen nur eine oder beide farbige Sehsubstanzen erregen.

Noch unreiner erscheinen die Pigmentfarben, weil sie gemischtes Licht zurückwerfen, in welchem nur gewisse Lichtarten mehr oder minder geschwächt sind. Zu der farbigen Wirkung derjenigen Strahlen, welche hiebei nicht durch antago-

nistische Strahlen neutralisirt sind, kommt also nicht nur die Wirkung eben jener Strahlen auf die schwarzweisse Substanz, sondern auch noch die Wirkung des ganzen übrigen neutralgemischten und daher nur die schwarzweisse Substanz erregenden Lichtes.

Gemischtes Licht, welches uns einen schönen farbigen Eindruck macht, wird gleichwohl durch einen Zusatz von farblosem Lichte leicht fast oder ganz farblos, weil die farbige Empfindung schon von vornherein stark mit einer farblosen versetzt ist.

Sehr instructiv ist in dieser Beziehung der folgende leicht herzustellende Versuch. Man lege auf einen Tisch, der vor einem Fenster steht, ein Stück schwarzen Sammtes und darauf ein kleines Stück weissen Papiers. Zwischen letzterem und dem Fenster stelle man eine farbige Glastafel senkrecht auf den Tisch, so dass das Papier deutlich in der Farbe des Glases, z. B. schön blau erscheint. Dann wird dieses Papier theils von dem blauen Lichte beleuchtet, welches durch das Glas gegangen ist, theils von dem farblosen Lichte, welches von den Wänden des Zimmers etc. zurückgeworfen wird. Nimmt man dann einen kleinen Spiegel zur Hand und richtet ihn so, dass ein Theil des weissen Lichtes vom bewölkten Himmel auf das Papier reflectirt wird, so erscheint dieses plötzlich fast oder ganz weiss. Durch diesen Zusatz farblosen Lichtes wird die weisse, nicht aber zugleich auch die blaue Empfindung verstärkt, und das Verhältniss des Gewichtes der letzteren zum Gewichte der Gesammtempfindung so ungünstig, dass das Blau fast oder ganz unter die Schwelle gedrängt wird.

Selbst die Spectralfarben verbleichen rasch und werden sehr weisslich, wenn man eine Linie des Spectrums fest fixirt. Denn die Erregbarkeit der farbigen Substanzen sinkt, wie in §. 46 weiter erörtert wird, unter dem gleichsam concentrirt wirkenden Reize sehr rasch, während die gleichzeitig erregte schwarzweisse Substanz immer noch eine relativ starke weisse Empfindung bedingt.

Auch die schwarze Empfindung, wie sie in gar nicht oder sehr schwach beleuchteten Theilen des Sehorgans durch Contrast mit dem Weiss der Umgebung erzeugt wird, hat im Vergleich zu schwachen farbigen Empfindungen ein sehr in Betracht kommendes Gewicht. Daher kann man unter passenden Umständen eine schwache Farbenempfindung unter die Schwelle drängen, wenn man an derselben Stelle die schwarze Empfindung durch Contrast verstärkt.

Man nehme z. B. eine mattgeschliffene Glastafel und halte sie, mit der mattgeschliffenen Seite nach oben, zunächst horizontal über einen Tisch, der mit schwarzem Sammt belegt ist. Auf diese Glasplatte lege man ein 2—3 Cm. breites Quadrat von sehr dunkelfarbigem und ganz undurchsichtigem Papier, dessen bezeichneten Mittelpunkt man fixirt. Durch eine entsprechende Neigung der Glasplatte wird man die (einseitig vorausgesetzte) Beleuchtung dieses Quadrates so abschwächen können, dass man die Farbe desselben nur eben noch deutlich erkennt. Schiebt man jetzt ein weisses Papier zwischen Glasplatte und Tisch, so erhellt sich die matte Glastafel, das Papierquadrat aber wird viel dunkler oder schwärzer und seine Farbe unsichtbar. Man braucht nun das weisse Papier nur bald wieder zu entfernen, um die Farbe sofort wieder sichtbar zu machen. Durch die Erhellung der Umgebung des farbigen Quadrates wird an der ihm entsprechenden Stelle des Sehorgans die Empfindung des Schwarzen erheblich verstärkt (vergl. §. 32), die ohnehin schwache Farbenempfindung kommt dadurch in ein noch ungünstigeres Verhältniss zur jetzt gewichtiger gewordenen Gesammtempfindung und sinkt demnach unter die Schwelle.

Lässt man das weisse Papier zu lange zwischen Glas und Tisch oder macht man den Versuch mehrmals rasch hintereinander, so mischt sich successiv inducirtes Licht an der Stelle des Papierquadrates störend ein.

Im Allgemeinen sind also die Bedingungen für das deutliche Hervortreten der Farben beim gewöhnlichen Sehen sehr ungünstig, denn immer wird an den hellen wie an den dunklen Stellen die Farbenempfindung durch die schwarzweissen Empfindungen stark verunreinigt und oft ganz unter die Schwelle gedrückt. Gegenfarben können an einer und derselben Stelle gar nicht gleichzeitig über die Schwelle treten, sondern entweder nur eine Grundfarbe oder ein Gemisch zweier, welche nicht Gegenfarben sind.

Günstiger gestalten sich schon die Verhältnisse im verdunkelten Auge, weil hier die schwarzweissen Empfindungen kein so grosses Gewicht haben als im offenen. Ist daher eine farbige Sehsubstanz in Folge innerer Ursachen oder durch vorhergegangene Reizung mittels äussern Lichtes erheblich aus der neutralen Stimmung herausgebracht worden, so kann die dadurch begünstigte Farbe leichter über die Schwelle treten. Die Nachbilder im verdunkelten Auge zeigen daher häufig deutliche Farben.

Am günstigsten sind die Umstände, wenn die schwarzweisse Substanz zuvor intensiv erregt wurde und nun nicht nur ihre *D*-Erregbarkeit, sondern auch durch indirecte Wirkung die

A-Erregbarkeit herabgesetzt und die spontane Dissimilirung und Assimilirung sehr schwach geworden ist. Die dann im verdunkelten Auge erscheinenden Blendungsbilder zeigen bisweilen so gesättigte schöne Farben, wie kaum das Sonnenspectrum. Da nämlich in dem zuvor gesehenen sehr hellen Lichte, wenn es auch wegen des starken Übergewichtes der farblosen Empfindung weiss erschien, doch die antagonistischen Strahlen sich fast nie vollständig neutralisiren, so wurde auch die farbige Sehsubstanz dadurch mehr oder weniger, wenn auch verhältnissmässig schwach erregt, und im nachher verdunkelten Auge verräth sich die nicht neutrale Stimmung der farbigen Substanzen durch Farbenempfindungen, die, obwohl an sich von kleinem Gewichte, doch im Vergleich zu der jetzt sehr schwachen schwarzweissen Empfindung erheblich sind und daher deutlich hervortreten können.

Bei solchen Beobachtungen ist es mir übrigens öfters vorgekommen, als ob man bei gewissen Phasen des Blendungsbildes wirklich zwei Gegenfarben zugleich sähe, und ich finde auch bei andern Beobachtern dahin zu deutende Bemerkungen. Indessen traut man bei einer so ungewöhnlichen Erscheinung seinen eigenen Augen nicht, und es besteht auch die Möglichkeit, dass hiebei beide Farben in einem und demselben Bezirke des Sehfeldes zwar sichtbar sind, aber doch nicht eigentlich in einander, sondern neben einander, so dass beide in kleinen Raumintervallen miteinander abwechseln.

Immer ist festzuhalten, dass jede Gesichtsempfindung, sie sehe aus wie sie wolle, ein Gemisch der sechs Grundempfindungen ist. Diejenige Grundempfindung, welche das relativ stärkste Gewicht hat, gibt der Gesammtempfindung hauptsächlich Charakter und Namen. Ist eine Grundempfindung so stark im Übergewichte über alle anderen, dass letztere gar nicht bemerkbar hervortreten, so nähert sie sich dem Ideal der Reinheit, welches aber in Wirklichkeit nie realisirt sein kann.

§. 44.

Von der Umstimmung der durch farbiges Licht gereizten Theile des Sehorgans.

Wenn das Sehorgan längere Zeit vor äusseren Reizen geschützt bleibt, so nimmt es mehr oder minder vollständig jene

neutrale Stimmung an, bei welcher in allen drei Substanzen die Assimilirung und Dissimilirung gleich gross, und wie wir ergänzend annehmen wollen, auch jede *D*-Erregbarkeit ebenso gross ist wie die entsprechende *A*-Erregbarkeit.*

* Die hiebei stattfindende Dissimilirung ist, ganz theoretisch genommen, das Product zweier Factoren, nämlich der eben vorhandenen *D*-Erregbarkeit und der innern *D*-Reize. Ebenso ist die Assimilirung das Product aus der *A*-Erregbarkeit und den *A*-Reizen. Aus der Gleichheit von Dissimilirung und Assimilirung folgt also nicht nothwendig die Gleichheit der *D*- und *A*-Erregbarkeit. Indessen will ich, da es gegenüber den äusseren Reizen vielmehr auf die Erregbarkeiten als auf die schon vorhandenen inneren Reize ankommt, für die neutrale Stimmung auch gleichgrosse *D*- und *A*-Erregbarkeit jeder Substanz annehmen. Ich darf diess um so eher, als wir über die sogenaunten inneren Reize eigentlich gar nichts wissen und es vielleicht unrichtig ist, sie mit den äusseren zu parallelisiren. Man kann wenigstens vorläufig die Sache auch so auffassen, als sei es in der Natur der erregbaren Substanz begründet, auch dann, wenn sie keinem äusseren oder inneren Reize unterworfen ist, immer in schwachem Grade zu dissimiliren und zu assimiliren.

Die Grösse dieser spontanen Dissimilirung und Assimilirung wäre dann zugleich ein Maass für die Disposition der erregbaren Substanz zu der unter dem Einflusse äusserer Reize stattfindenden Dissimilirung oder Assimilirung, d. h. ein Maass der *D*- und *A*-Erregbarkeit.

Damit das zunächst in neutraler Stimmung gedachte Sehorgan ein gemischtes Licht als farblos empfinde, ist nöthig, dass dieses Licht sowohl für die rothgrüne als für die blaugelbe Substanz ein annähernd gleich grosses Assimilirungs- wie Dissimilirungsmoment setze, wobei ich das Moment dem Product aus Reiz und Erregbarkeit gleichsetze.

Solches gemischtes Licht nun, welches dem neutral gestimmten Sehorgane farblos erscheint, will ich objectiv farblos oder kurz farbloses Licht nennen.

Eben dasselbe Licht aber wird z. B. grünlich erscheinen können, wenn die rothgrüne Substanz nicht mehr neutral gestimmt, sondern ihre grüne Erregbarkeit grösser ist als die rothe. Denn in Folge dessen würden Assimilirungs- und Dissimilirungsmoment nicht mehr gleich gross sein, und ein kleines Moment, welches gleich der Differenz beider Momente ist, wird nun zu Gunsten des Grün zur Wirkung kommen.

Wenn irgend ein Theil des zuvor neutral gestimmten Sehorgans durch farbig erscheinendes Licht nicht übermässig gereizt wird, so wird die Stimmung dieses Theiles immer derart geändert, dass die Erregbarkeit für die eben empfundene Farbe abnimmt und nach Schluss der Reizung kleiner ist, als die Erregbarkeit für die Gegenfarbe. Jedes gemischte Licht, welches vorher farblos empfunden worden wäre, wird jetzt mit einer Beimischung dieser Gegenfarbe, oder, wenn zuvor ein Gemisch zweier Grundfarben gesehen wurde, mit einer Beimischung beider Gegenfarben gesehen. Hiebei aber ist keineswegs nöthig, dass diese beiden subjectiven Gegenfarben jetzt in demselben Verhältnisse gemischt erscheinen, wie in der zuvor gesehenen Mischfarbe die beiden objectiven Farben. Denn jenes Verhältniss der subjectiven Gegenfarben hängt ganz von den eingetretenen Erregbarkeitsänderungen der beiden farbigen Substanzen ab, welche nur zufällig genau in einem solchen Verhältnisse stattfinden könnten, dass die subjectiven Gegenfarben wieder dasselbe Mischungsverhältniss hätten.

Schon aus diesem Grunde ist die Farbe, welche das objective Weiss und Grau im successiven Contraste zu einer zuvor gesehenen Farbe annimmt, nicht immer genau das, was man die Complementärfarbe der letzteren zu nennen pflegt. Grössere Abweichungen treten nothwendig dann ein, wenn die farbigen Sehsubstanzen des ganzen Sehorgans unter dem Einflusse der herrschenden Beleuchtung eine so zu sagen künstliche Stimmung angenommen haben, wie diess sowohl bei natürlicher als künstlicher Beleuchtung immer mehr oder minder der Fall ist. (Siehe §. 46 über die Adaptation.)

Ist durch mässige Einwirkung z. B. grünen Lichtes auf einen Theil des Sehorganes die Stimmung dieses Theils verändert worden und blickt man nun auf eine blaue oder gelbe Fläche, so mischt sich an der umgestimmten Stelle die Gegenfarbe des Grün subjectiv bei, und das Gelb oder Blau erscheint röthlich. Denn das von einem Pigmente zerstreute Licht ist gemischtes Licht, und diesem gegenüber verhält sich der umgestimmte Theil des Sehorgans analog wie gegenüber farblosem gemischten Lichte.

Zur Erklärung der Thatsache, dass nach farbiger Reizung der gereizte Theil für die Gegenfarbe erregbarer ist, als für die Reizfarbe, bietet meine Theorie mehrere Wege. Obwohl ich nun auch hier der zu-

künftigen eingehenden Untersuchung keineswegs vorgreifen will, so erscheint es mir doch zweckmässig, in ähnlicher Weise, wie ich diess in der vorigen Mittheilung gethan habe, zu zeigen, wie sich die Erscheinungen des successiven Contrastes leicht der Erklärung aus meiner Theorie unterwerfen lassen. Denn ich bekomme dadurch Gelegenheit zu zeigen, einen wie tiefen Einblick in alle Phasen des Stoffwechsels der Sehsubstanz wir erwarten dürfen, wenn wir aus den Gesichtspunkten, welche die Theorie bietet, an die feinere Untersuchung der Einzelerscheinung gehen.

Wird die zuvor neutral gestimmte rothgrüne Substanz durch solche Strahlen gereizt, welche ihre Dissimilirung steigern, so wird während der Dauer der entsprechenden Empfindung die rothgrüne Substanz abnehmen, und folglich nach Schluss der Reizung die Erregbarkeit des gereizten Theiles für diese Farbe vermindert sein. Hierüber kann kein Zweifel sein, wenn die Vordersätze der Theorie richtig sind, und diess würde schon genügen, um die Art oder Richtung der Umstimmung des gereizten Theiles zu erklären, wenn wir nur annehmen, dass die *A*-Erregbarkeit während der Reizung unverändert bleibe. Wenn sich aber auch die *A*-Erregbarkeit unter dem indirecten Einflusse des Reizes ändert, so bleiben zwei Möglichkeiten; erstens die, dass sie ebenfalls abgenommen hat, aber viel weniger als die *D*-Erregbarkeit, oder aber zweitens, dass sie sogar zugenommen hat. Diess lasse ich hier dahingestellt sein, weil es nur untersucht werden kann, wenn zugleich die Stärke und räumliche Ausbreitung des Reizes und der Zustand der Umgebung der gereizten Stelle mit berücksichtigt wird.

Wird umgekehrt die zuvor neutral gestimmte rothgrüne Substanz durch farbiges Licht gereizt, welches ihre Assimilirung steigert, so wird dadurch die erregbare Substanz vermehrt und zugleich die *D*-Erregbarkeit gesteigert. Diess reicht hin, um zu erklären, warum nach Schluss der Reizung die *D*-Erregbarkeit, also die Erregbarkeit für die Gegenfarbe grösser ist als die *A*-Erregbarkeit. Hätte sich zugleich in Folge des rascheren Verbrauchs von Assimilirungsmaterial die *A*-Erregbarkeit etwas vermindert, so würde diess eine noch grössere Differenz der beiden Erregbarkeiten nach Schluss der Reizung bedingen.

§. 45.

Von der Umstimmung des ganzen Sehorgans bei theilweiser Reizung durch farbiges Licht.

In meinen früheren Mittheilungen habe ich den Beweis geführt, dass bei partieller Reizung des Sehorgans nicht blos im gereizten Theile und unter der directen Wirkung des Reizes, sondern auch im übrigen Sehorgane und insbesondere in der

nächsten Umgebung der direct gereizten Stelle Veränderungen unter der indirecten Wirkung des Reizes eintreten, durch welche die Erscheinungen des simultanen Contrastes sowie der simultanen und successiven Lichtinduction bedingt sind. Während ich aber bisher die Contrast- und Inductionserscheinungen nur in Bezug auf die schwarzweisse Sehsubstanz erörtert habe, gilt es nun auch die beiden andern Sehsubstanzen zu berücksichtigen, den simultenen Farbencontrast und die Farbeninduction zu erklären.

Wir sahen früher, dass bei nicht übermässiger Beleuchtung einer Stelle des Sehorgans das übrige Sehorgan und besonders die nächste Nachbarschaft der gereizten Stelle sich in Folge indirecter Wirkung des Reizes mehr oder minder verdunkelt. Wie hiebei in der Umgebung der durch farbloses Licht gereizten Stelle das Schwarz deutlicher hervortritt, so wird bei Reizung durch farbiges Licht in der Umgebung des gereizten Theiles die Empfindung der Gegenfarbe verstärkt und unter günstigen Umständen auch über die Schwelle gehoben.

Infolge dessen ändern sich dann auch die Erregbarkeitsverhältnisse der Umgebung der gereizten Stelle, denn die Empfindung einer beliebigen Grundfarbe bedeutet nach unserer Theorie auch eine Änderung des Verhältnisses der Erregbarkeiten zu Ungunsten der empfundenen Farbe und zu Gunsten ihrer Gegenfarbe. Nach Schluss der Reizung und der beschriebenen Contrastwirkung wird also an der direct gereizten Stelle die Erregbarkeit für die Reizfarbe kleiner sein als die Erregbarkeit für ihre Gegenfarbe, in der Umgebung der direct gereizten Stelle aber wird das Gegentheil der Fall sein.

Lassen wir jetzt auf die ganze Netzhaut Licht fallen, welches bei neutraler Stimmung des Sehorgans farblos erscheinen würde, so erscheint es nun farbig, und zwar an der zuvor gereizten Stelle in der Gegenfarbe (successiver Contrast), während es im Übrigen und besonders in der nächsten Umgebung in die zuvor während der Reizung empfundene Farbe spielt (successive Induction). Was hier von einer Grundfarbe gilt, das gilt auch von den Gemischen zweier.

Auf Grund des hier Gesagten lassen sich nun alle Erscheinungen des simultanen und successiven Farben-Contrastes erklären.

Ist die unter dem directen Einflusse des Reizes empfundene Farbe eine D-Farbe, so lässt sich das Hervortreten der Gegenfarbe in der Umgebung auf ganz analoge Weisse für die farbigen Substanzen erklären, wie diess früher für die farblose Sehsubstanz geschehen ist, insbesondere also daraus, dass die Steigerung der Dissimilirung an der gereizten Stelle eine Steigerung der Assimilirung in der Umgebung bedingt. Die in schwachem Maasse immer vorhandene Empfindung der zugehörigen A-Farbe gewinnt dadurch an Gewicht und tritt unter günstigen Umständen über die Schwelle.

Meine Theorie gestattet aber auch eine andere Frklärung,, die jedoch zweckmässig erst bei Gelegenheit der ausführlichen Untersuchung der Contrasterscheinungen erwogen wird. Es könnte nämlich die Erscheinung der Contrastfarbe auch auf eine Minderung der Dissimilirung, oder auf gleichzeitige Steigerung der Assimilirung und Herabsetzung der Dissimilirung zurückgeführt werden (vergl. §. 32).

Jedenfalls aber würde, und das ist mir hier die Hauptsache, die entsprechende farbige Sehsubstanz und also auch die D-Erregbarkeit in der Umgebung des direct gereizten Theiles zunehmen und die D-Erregbarkeit nach Schluss der Reizung grösser sein müssen als die A-Erregbarkeit.

Ist umgekehrt die Farbe, welche die Contrastwirkung hervorbringt, eine A-Farbe, so tritt ein Fall ein, welcher bei den farblosen Empfindungen insofern nicht möglich ist, als für die schwarzweisse Substanz das Licht nur einen D-Reiz bildet. Am einfachsten erscheint die Annahme, dass in der Umgebung der farbig gereizten Stelle die Dissimilirung derselben farbigen Substanz etwas gesteigert wird, deren Assimilirung unter der directen Einwirkung des Lichtreizes gesteigert ist, und dass dadurch die entsprechende D-Farbe sichtbar wird. Aber auch durch eine Minderung oder Hemmung der Assimilirung in der Nachbarschaft der gereizten Stelle liesse sich das Auftreten der Gegenfarbe allenfalls erklären. Im einen wie im andern Falle würde durch die Contrastwirkung in der Umgebung der farbig gereizten Stelle die betroffene Substanz und damit zugleich ihre D-Erregbarkeit gemindert werden und nach Schluss der Reizung die Erregbarkeit für die A-Farbe grösser sein als für die D-Farbe.

Der Nachweis, dass der simultane Farbencontrast und die Farbeninduction wirklich auf einer Wechselwirkung der einzelnen Theile des Sehorgans beruhen, lässt sich in ganz ähnlicher Weise führen, wie diess in Betreff der farblosen Lichtempfindungen in meinen früheren Mittheilungen geschehen ist. Alle dort angeführten Versuche lassen sich gleichsam ins Farbige übersetzen. Nur muss man dabei Sorge tragen, dass man den Contrast und die Induction zwischen hell und dunkel möglichst ausschliesst, weil sonst schwache Farbenempfindungen durch die farblosen

unter die Schwelle gedrückt werden. Objective Gegenfarben, mit denen man gleichzeitig arbeitet, müssen ungefähr gleich hell sein, und ebenso müssen farblose Felder oder farbloser Grund etwa von derselben Helligkeit sein, wie die Farben, nämlich grau, nicht weiss oder schwarz. Zu Versuchen über simultanen Contrast eignen sich die möglichst reinen Farben weniger als stark nuancirte, weil bei Anwendung der ersteren der simultane Contrast oft sehr rasch in die simultane Induction umschlägt oder die Zerstreuung des farbigen Lichtes über das eigentlich farbige Bild hinaus so stark ist, dass die subjective Contrastfarbe gar nicht dagegen aufkommen kann. Günstig sind demzufolge für die Erscheinung der Contrastfarben auch jene Versuchsbedingungen, welche man zur Erzeugung der subjectiv farbigen Schatten herzustellen pflegt.

§. 46.

Über die grosse Vergänglichkeit der farbigen Empfindungen im Vergleich zu den farblosen.

Aus dem, was im §. 43 über das Gewicht der Farbenempfindungen und in den beiden letzten §§. über die Erregbarkeitsänderung der farbigen Sehsubstanzen gesagt wurde, erklärt sich, dass die Farbenempfindungen so sehr vergänglich sind, genauer gesagt, dass sie so leicht unter die Schwelle kommen. Ein kleines farbiges Quadrat auf ungefähr gleich hellem farblosen Grunde verliert bei fester Fixirung eines Punktes sehr bald an Reinheit der Farbe und verschwimmt endlich unterschiedslos mit dem Grunde, wobei dieser gewöhnlich unterdessen (durch simultane Induction) etwas von der Farbe des Quadrats angenommen hat, und somit Quadrat und Grund in gleichem Tone schwach gefärbt erscheinen. Am schnellsten tritt dieses Verschwinden kleiner farbiger Felder beim indirecten Sehen ein, später beim directen. Übrigens aber blitzen die Ränder des farbigen Feldes und des Grundes in Folge kleiner Blickschwankungen immer wieder in der Farbe des Quadrates, beziehentlich in der Gegenfarbe auf.

Sehr belehrend sind in dieser Beziehung folgende Versuche: Man lege ein kleines farbiges Feld auf einen etwa gleich hellen grauen Grund und fixire fest einen Punkt des ersteren. Von Zeit

zu Zeit beschatte man vorübergehend das farbige Feld in mässigem Grade dadurch, dass man zwischen dasselbe und die Hauptlichtquelle des Zimmers einen undurchsichtigen Schirm oder auch nur die Hand schiebt. Man wird dann schon nach kurzer Fixirung im Momente der Beschattung die Farbe des farbigen Feldes auffallend unrein werden und auch oft den Farbenton ändern sehen. Jetzt entferne man den Schirm wieder, fixire aber fort. Bei nochmaliger Beschattung kann das farbige Feld unsichtbar werden, weil es unterschiedslos mit dem Grunde zusammenfliesst; bei der dritten Beschattung kann es farblos erscheinen, bei der vierten schon in einer ganz andern Färbung, in welcher immer die Gegenfarbe der ursprünglichen Farbe deutlich oder ausschliesslich enthalten ist. Verschliesst man das Auge nur eine Weile und blickt wieder auf das noch beschattete Feld, so erscheint es wieder in seiner ursprünglichen Farbe.

Man kann auf diese Weise die Folgen der fortschreitenden Erregbarkeitsänderungen an der Stelle des farbigen Feldes sowohl als in seiner Umgebung auf jeder beliebigen Stufe ihrer Entwicklung sichtbar machen.

Zu genauerer Untersuchung bedient man sich zweckmässig eines Zimmers, welches nur eine, leicht zu verändernde Lichtquelle hat. Im Fensterladen eines dunklen Zimmers lässt man z. B. die von Aubert[1] angegebenen quadratischen Diaphragmen einsetzen, die durch einen Schieber beliebig verkleinert und vergrössert werden können. Diese höchst zweckmässigen Diaphragmen gestatten eine sehr genaue und messbare Regelung der Lichtstärke.

Selbst die Spectralfarben können in ihrer Gegenfarbe gesehen werden. Fixirt man eine Linie im Spectrum des zerstreuten Tageslichtes, so verblassen die Farben zusehends. Verengt man sodann den Spalt hinreichend, so schlägt, während die Spectrallinien noch deutlicher werden, die fixirte Farbe in einen, die Gegenfarbe mehr oder weniger deutlich enthaltenden Ton um. Ein kurzer Verschluss des Auges genügt, um nachher die Farbe wieder zu sehen trotz der Lichtschwäche des Spectrums. Um den Versuch rein zu haben, muss man die übrigen Farben abblenden.

Nicht minder interessant als das Verschwinden der Farbe begränzter farbiger Felder bei fester Fixirung ist das Verschwinden einer in der allgemeinen Beleuchtung überwiegenden Farbe; denn eine schwachfarbige Beleuchtung erscheint meist farblos.

[1] Physiologie der Netzhaut. S. 44.

Der Ausdruck weisses oder farbloses Licht hat, wie oben gezeigt wurde, nur Sinn in Beziehung auf die eben vorhandene Stimmung des Sehorgans; denn dasselbe gemischte Licht kann je nach dieser Stimmung bald farbig und bald farblos erscheinen. Ich habe dasjenige Licht farblos genannt, welches bei neutraler Stimmung des Sehorgans farblos erscheint. Diese Stimmung ist jedoch fast nie vorhanden. Gleichwohl erscheint uns das Tageslicht wie das künstliche Licht meist farblos, d. h. wir sehen einen sogenannten weissen Gegenstand bei diesen verschiedenen Beleuchtungen immer wieder weiss.

Angenommen, das zuvor neutral gestimmte Sehorgan eröffnet sich einem Aussenraume, dessen Beleuchtung nicht farblos ist, weil in derselben z. B. die gelbwirkenden Strahlen nicht ganz neutralisirt sind, so wird man das fast überall vorhandene Gelb nur im Anfange und auch da nur verhältnissmässig schwach bemerken. Letzteres desshalb, weil jede objective Farbe, ebenso wie das Weiss, wegen der Wechselwirkung der einzelnen Theile des Sehorgans an Reinheit und Deutlichkeit verliert, wenn sie über einen grossen Theil der Netzhaut verbreitet ist (vergl. §. 32); ersteres aber wegen der sehr bald eintretenden Adaptation des Sehorganes für die allgemein verbreitete Farbe. Dieselbe besteht im angeführten Falle darin, dass in der gelbblauen Substanz die Assimilirung durchschnittlich wieder ebenso gross wird wie die Dissimilirung und daher das Sehorgan in Bezug auf die eben herrschende Beleuchtung so zu sagen wieder neutral gestimmt ist. Für ein solches künstlich neutral gestimmtes Sehorgan ist also die, dem natürlich neutral gestimmten Sehorgan farbig erscheinende Beleuchtung wieder farblos.

Nehmen wir an, die vorherrschende gelbe Farbe, welche das Auge im angenommenen Falle fast allenthalben sieht, sei eine D-Farbe, so wird in allen Theilen des Sehorganes die blaugelbe Sehsubstanz und mit ihr die Erregbarkeit für Gelb abnehmen, daher auch das von den gelbwirkenden Strahlen gesetzte Erregungsmoment immer kleiner und schliesslich eben so gross werden, wie das Erregungsmoment der blauwirkenden Strahlen. Dann aber werden sich beide Momente vollständig aufheben. Ob hiebei auch die blaue Erregbarkeit durch indirecte Wirkung der anfänglichen gelben Erregung sich ändert, ist vorerst gleichgiltig, denn immer müssen schliesslich beide Erregungsmomente gleich werden.

Wäre umgekehrt die in der Beleuchtung vorherrschende gelbe Farbe die *A*-Farbe der blaugelben Substanz, so würde unter ihrem Einflusse diese Substanz und damit die *D*-Erregbarkeit, d. h. die Erregbarkeit für Blau zunehmen. Die Folge ist wieder, dass das an sich schwächer vorhandene blau wirkende Licht bald ein stärkeres und schliesslich ebenso grosses Erregungsmoment setzt, wie das gelbwirkende, womit die erregende Wirkung des gemischten Lichtes auf die blaugelbe Substanz zu Ende ist.

Man braucht nur ein Stückchen weissen Papiers auf schwarzen Grund zu legen, einige Zeit zu fixiren und dann durch einen zwischen das Papier und die vorherrschende Lichtquelle geschobenen Schirm zu beschatten, so sieht man auf dem Papier die einfache oder zweifache Gegenfarbe der in der Beleuchtung eben vorherrschenden Farbe. Bei Gaslicht erscheint das Papier blau, bei Tageslicht je nach dem Stande der Sonne, der Bläue oder Bewölkung des Himmels etc. verschieden, grün, grüngelb oder gelb.

Bei allen Versuchen über Farbencontrast oder Farbeninduction muss man die, durch Adaptation für die meist etwas farbige Beleuchtung veränderte Stimmung des Sehorgans mit berücksichtigen, denn die Gegenfarbe der eben in der Beleuchtung vorherrschenden, wenn auch unsichtbar gewordenen Farbe, mischt sich bei jeder günstigen Gelegenheit mit ein und tritt sogleich über die Schwelle, sobald das Gesammtgewicht der eben untersuchten Empfindung hinreichend klein ist, wie diess bei gedämpfter Beleuchtung oder auf dunklem Grunde häufig, ganz besonders aber im verdunkelten Auge der Fall ist.

§. 47.

Über die Young'sche und Plateau'sche Theorie.

Jede Gesichtsempfindung lässt sich, wie ich oben dargelegt habe, ganz bestimmt bezeichnen, wenn man sechs Variable annimmt, d. h. die sechs einfachen oder Grundempfindungen. Die nächstliegende Annahme ist nun die von uns gemachte, dass diesen sechs psychischen Variablen sechs physiologische Variable entsprechen. Ausgehend von dem in §. 27 erörterten Grundgedanken, dass jedem Psychischen ein Physisches entsprechen müsse, und unter Annahme der schon von Leonardo

da Vinci, Aubert u. A. betonten einfachen Farben (Roth, Gelb, Grün, Blau) kam daher schon Mach[1] zu dem Resultate, dass es nicht drei, sondern vier „Grundfarbenempfindungen" geben und dass ausserdem „für die Empfindung Weiss und Schwarz ein besonderer physiologischer Process statuirt werden müsse". „Denn im Weiss ist keine andere Farbe erkennbar. Wenn demselben auch in der Netzhaut mehrere Erregungen entsprechen, der letzte Vorgang in der physiologischen Kette, welcher den einfachen physischen Process der Empfindung Weiss bedingt, muss einfach gedacht werden wie dieser." Die qualitative und nicht blos quantitative Verschiedenheit des Schwarz und Grau vom Weiss hat Mach nicht besonders betont; auch fussen alle seine Erörterungen noch auf dem psychophysischen Gesetze Fechner's.

Die Young'sche Theorie müsse also, meint Mach, dahin modificirt werden, dass an Stelle von drei jene vier Grundfarben gesetzt werden. Allerdings würde dadurch jene Theorie mit dem natürlichen Farbensystem in viel besseren Einklang gebracht, und insofern war Mach's Annahme ein wesentlicher Fortschritt. Aber der Hauptfehler der Young-Helmholtz'schen Theorie bleibt bestehen. Denn dieser liegt darin, dass diese Theorie nur eine Art der Erregbarkeit, Erregung und Ermüdung kennt, nämlich die von mir mit *D* bezeichnete, und dass sie das antagonistische Verhalten gewisser Lichtstrahlen zum Sehorgan verkennt; daher sie das Weiss aus „complementären" Lichtstrahlen nicht dadurch entstehen lässt, dass sie sich in ihrer Wirkung auf die farbigen Sehsubstanzen aufheben, sondern dadurch, dass sie sich zu Weiss ergänzen.

Ein entschiedener Fortschritt war dieser erste Versuch, die grosse Mannigfaltigkeit der Licht- und Farbenempfindungen auf einige wenige physiologische Variable zurückzuführen. Der richtige Grundgedanke aber erfuhr eine falsche Durchführung, weil man sich dadurch irre leiten liess, dass es in der That möglich ist, mit Hülfe dreier, passend gewählter Arten homogenen

---

[1] Über die Wirkung der räumlichen Vertheilung des Lichtreizes auf die Netzhaut. Sitzungber. dies. Akad. 52. Bd. 1865.

Lichtes alle Farbentöne, wenn auch nicht alle Sättigungsgrade derselben zur Empfindung zu bringen. Da die Strahlen des spectralen Roth nicht nur auf die rothgrüne, sondern auch wenngleich schwächer auf die blaugelbe Substanz erregend wirken, so braucht man diesen Strahlen nur die nöthige Menge grüner Strahlen beizumischen, um die Wirkung der rothen Strahlen auf die rothgrüne Substanz zu neutralisiren und ein, allerdings sehr weissliches Gelb in der Empfindung übrig zu behalten. Nimmt man zu Spectralroth und Grün das Blau als dritte Grundfarbe, so ist man also im Stande, alle Farbentöne zu erzeugen. Nimmt man dagegen als dritte Grundfarbe das Violett, so thut man insofern etwas Überflüssiges, als man das darin enthaltene Roth nicht mehr nöthig hat, sondern nur das Blau. Das Blau erhält man gleichwohl, wenn man die Wirkung der violetten Strahlen auf die grünrothe Substanz durch Zusatz von Grün neutralisirt.

Sehen wir ab von dem richtigen Grundgedanken, von welchem die Young'sche Hypothese ausgeht, so bleibt nicht viel Gutes mehr von ihr zu berichten. Insbesondere vermag sie jene Thatsachen, welche man als die Hauptstütze der Theorie betrachtet hat, nämlich die „complementären“ Nachbilder und die Farbenblindheit gar nicht genügend zu erklären. Eine grosse Reihe von Erscheinungen aber, die aus der Young'schen Theorie zu erklären bisher gar nicht versucht worden ist, findet in der neuen Theorie leicht ihre Erklärung.

Zur Erklärung der „complementären“ Nachbilder nimmt Helmholtz eine unter dem Einflusse vorangegangener farbiger Reizung entstandene ungleiche Erregbarkeitsänderung oder Ermüdung der drei Faserarten an. Diese Erklärung genügt in vielen Fällen, wenn man sich nur an den Farbenton des Nachbildes hält, seine Helligkeit oder Dunkelheit aber, d. h. das Verhältniss des immer gleichzeitig vorhandenen Weiss und Schwarz ganz vernachlässigt. Aber auch der Farbenton der Nachbilder lässt sich häufig auf diese Weise gar nicht erklären.

Ich will diess hier vorläufig nur an einem einzigen Beispiel erläutern. Man lege auf einen farbigen, z. B. grünen Grund zwei grosse Blätter, welche gleich hell wie der Grund und ungefähr „complementär“ zum Grün gefärbt sind, derart dass diese rothen Blätter nur einen centimeterbreiten Streifen vom grünen Grunde zwischen sich lassen. Einen Punkt dieses

Streifens fixire man 1—1½ Minuten lang. Entfernt man dann rasch die rothen Blätter, so erscheint der Streifen, der soeben noch deutlich grün war, in einem sehr schmutzigem Roth. Die grüne Farbe des Streifens verwandelt sich also lediglich infolge der Entfernung der rothen Blätter in ihre, allerdings sehr verunreinigte Gegenfarbe (vergl. §. 34).

Zur Erklärung solcher Fälle benützt Helmholtz die „falschen Urtheile", indem er sagt, der Streifen werde gar nicht roth, sondern nach wie vor grün empfunden, aber im Gegensatze zu dem ungewöhnlich satten Grün der Umgebung roth vorgestellt. Im Contrast zu einem so intensiven Grün halte man das durch Ermüdung sehr abgeschwächte Grün des Streifens nicht blos für nicht grün, sondern sogar für röthliches Grau. Durch diese „psychologische" Erklärung kann also Roth in Grün und überhaupt jede Farbe in ihre Gegenfarbe verkehrt werden.

Aber ebenso, wie ich früher für die schwarzweissen Empfindungen die Haltlosigkeit derartiger Erklärungen nachgewiesen habe, lässt sie sich auch für die farbigen darthun. Die Versuche über Contrast und Induction, die ich für Weiss und Schwarz beschrieben habe, lassen sich, wie schon erwähnt wurde, auch mit je zwei Gegenfarben anstellen, wenn man mit möglichst neutral gestimmtem Sehorgane arbeitet oder die Umstimmung desselben durch die eben herrschende Beleuchtung mit einrechnet.

Sehr schlagend sprechen meiner Meinung nach die Erfahrungen an Farbenblinden gegen die Young'sche Theorie, obwohl man gerade in ihnen eine Stütze der Theorie gefunden zu haben glaubte. Was man jetzt einen Rothblinden nennt, ist vielmehr ein Roth-Grünblinder, d. h. es fehlt ihm die rothgrüne Sehsubstanz. Dem entsprechend sieht er farblos, was Andern in einer der beiden Grundfarben Roth oder Grün erscheint; in allen Roth oder Grün enthaltenden Mischfarben aber sieht er nur das Gelb oder Blau. In seinem Sonnenspectrum liegen nur zwei Partialspectren, das schwarzweisse und das gelbblaue. Die Stelle des Grün erscheint ihm farblos und theilt sein Spectrum in eine gelbe und eine blaue Hälfte. Reines Gelb und reines Blau nebst Schwarz und Weiss genügen also, um alle ihm vorkommenden Farben daraus zu mischen.

Ob es solche absolut Roth-Grünblinde gibt, weiss ich nicht; schon wenn die Menge der rothgrünen Substanz abnorm gering ist, werden alle ihr zugehörigen Empfindungen unter die Schwelle kommen können, und die wesentlichsten Erscheinungen der sogenannten Rothblindheit auftreten.

Die Widersprüche, in die man sich, wie die neue Literatur über diesen Gegenstand zur Genüge zeigt, immer wieder ver-

wickelt, so oft man die Farbenblindheit aus der Young'schen Theorie erklären will, lösen sich, soviel ich bis jetzt sehe, leicht bei der Erklärung aus meiner Theorie, wie ich später selbst zu zeigen gedenke.

Auch der Plateau'schen Theorie liegt ein richtiger Gedanke zu Grunde, in sofern sie von der schon alten Annahme gegensätzlicher Zustände des Sehorganes ausgeht, und ein weiterer Vorzug dieser Theorie liegt darin, dass sie den simultanen Contrast physiologisch zu erklären sucht. Aber jede erspriessliche Durchführung der Theorie müsste sofort an der paradoxen Annahme Plateau's scheitern, dass „complementäre“ Farben sich zu Weiss ergänzen, wenn sie objectiv, zu Schwarz, wenn sie nur subjectiv gegeben sind, was sich, wie bereits Fechner zeigte, schon durch kleine Abänderungen derjenigen Versuche widerlegen lässt, durch welche es Plateau zu beweisen suchte.

§. 48.
Schlussbemerkungen.

Ehe ich diese Mittheilungen über die Grundzüge einer neuen Theorie des Licht- und Farbensinnes schliesse, möchte ich noch einmal in der Kürze die Hauptpunkte derselben hervorheben, damit nicht etwa über einer Discussion untergeordneter, hier nur flüchtig und vielleicht mangelhaft erörterter Nebendinge die Hauptsache aus dem Auge verloren werde.

Die vorliegende Theorie, obwohl zunächst gegründet auf eine möglichst vorurtheilsfreie Analyse der Gesichtsempfindungen, wurzelt doch sehr wesentlich mit in gewissen Grundgesetzen, welche ich aus den Erscheinungen des organischen und des psychischen Lebens überhaupt abstrahirt habe und freilich hier nur nebenbei behandeln konnte, nämlich einerseits in dem im §. 29 ausgesprochenen psychologischen Grundgesetze, aus welchem sich die wichtige Feststellung des Begriffes der Qualität und des Gewichtes der Empfindungen ergab, und andererseits in dem Satze, dass jede lebendige und erregbare Substanz, entsprechend den in ihr gleichzeitig stattfindenden Dissimilirungs- und Assimilirungsprocessen, auch eine oder mehrere specifische D-Erregbarkeiten und ebenso viele A-Erregbarkeiten besitzt, und dass

man demgemäss auch die *D*-Reize von den *A*-Reizen zu unterscheiden habe, die *D*-Ermüdungen von den *A*-Ermüdungen etc. Erst durch diese Auffassung kommt meiner Ansicht nach Zusammenhang in zahlreiche Sätze der Physiologie überhaupt und insbesondere der Nerven- und Muskelphysiologie, so wie etwas Licht in die Erscheinungen des psychischen Lebens.

Was nun die Licht- und Farbenlehre insbesondere betrifft, so ist zuerst das auf die innere Ähnlichkeit der Empfindungen gegründete natürliche System der Gesichtsempfindungen zu betonen, worin jeder Empfindung ihre Stelle bestimmt ist durch das Verhältniss, in welchem die sechs Grundempfindungen (deren mehrere unter der Schwelle sein können) gleichsam gemischt erscheinen; ferner die Gruppirung der sechs Grundempfindungen zu drei Paaren von Gegenfarben.

Hieran reiht sich als fundamental wichtig die Auffassung der Gesichtsempfindungen als des psychischen Correlates der Ernährungsvorgänge oder des Stoffwechsels in der Sehsubstanz, welche Auffassung zur Unterscheidung von *D*- und *A*-Empfindungen, und weiter zu dem Satze führt, dass jede *D*-Empfindung eine Abnahme, jede *A*-Empfindung eine Zunahme der Sehsubstanz bedeutet. Entsprechend den drei Paaren einfacher oder Grundempfindungen werden drei Arten des Dissimilirungs- und Assimilirungsprocesses der Sehsubstanz und drei Arten specifischer *A*- und *D*-Erregbarkeit angenommen. Die Farblosigkeit des aus „complementären" Lichtarten gemischten Lichtes wird aus dem antagonistischen Verhalten solcher Lichtarten erklärt.

Zum ersten Male wird ferner methodisch und umfassend der Nachweis geführt, dass die einzelnen Theile des nervösen Sehorganes in inniger functioneller Wechselbeziehung stehen, welche Wechselbeziehung als eine gegenseitige Beeinflussung des Stoffwechsels aufgefasst wird, derart, dass wenn $\frac{D}{A}$ an einer gereizten Stelle grösser wird, es in der Umgebung kleiner wird und umgekehrt, so dass nach der Reizung beide Theile in entgegengesetztem Sinne in ihrer Erregbarkeit verändert sind.

Diese Sätze und ihre Folgerungen boten nun zwar die Möglichkeit, jede der erwähnten Erscheinungen zu erklären, aber es

zeigte sich dabei, dass öfters für eine und dieselbe Erscheinung zunächst mehrere Erklärungen denkbar waren, und dass die Entscheidung über die richtige späteren Detailuntersuchungen vorbehalten werden musste. Hierin wird man vielleicht einen Mangel der Theorie sehen, aber ganz mit Unrecht. Denn dieser scheinbare Mangel ist durchaus im Wesen der Sache begründet und vielmehr ein Vorzug der neuen Theorie, insofern als jede Theorie, die weniger Variable einführt, als zur Erklärung aller Erscheinungen nöthig sind, zwar den scheinbaren Vorzug grösserer Einfachheit, aber den wirklichen Nachtheil der Unzulänglichkeit hat.

Was wir in einer Gesichtsempfindung unmittelbar auffassen, ist das Verhältniss der entsprechenden *D*- und *A*-Processe zu einander, denn durch dieses ist die Qualität der Empfindung bedingt. Die Veränderung der Empfindung gibt uns also auch zunächst nur Aufschluss über die Veränderung jenes Verhältnisses, nicht aber über die absoluten Veränderungen der einzelnen Glieder jenes Verhältnisses. So kommt es, dass man bei der Erklärung so oft zunächst die Wahl hat zwischen einer Steigerung der Assimilirung und einer Hemmung oder Minderung der Dissimilirung und umgekehrt. Aber die Theorie gibt selbst Mittel und Wege in die Hand, durch eingehendere Untersuchungen auch die Veränderungen der einzelnen Glieder jenes Verhältnisses festzustellen. Infolge dessen vermag man dann mit Hilfe dieser Theorie auch Einzelheiten zu erklären, die den bisherigen Theorien ganz unzugänglich waren.

Derartige Untersuchungen aber sind, sobald man durch sie über die Hauptphänomene hinaus zu den feineren Einzelheiten vorzudringen sucht, sehr zeitraubend, weil die Stimmung des Sehorganes eine so sehr labile und die Beleuchtung eine so variable ist, daher es schwer wird, oft hintereinander immer wieder dieselben Versuchsbedingungen herbeizuführen.

Obgleich ich selbst sehr gut weiss, wie viel hier noch zu thun ist, habe ich es doch für zweckmässig gehalten, stellenweise schon hier die Erklärung des Details zu versuchen, nur um zu zeigen, dass und wie sie möglich ist. Wenn ich hiebei einigemale besondere Annahmen machen musste, so waren diess doch, worauf ich Gewicht lege, keine von aussen

hergeholten Hilfshypothesen, sondern das Hypothetische lag nur in der vorläufigen Bevorzugung einer von mehreren Möglickeiten, welche sich folgerichtig aus der Theorie entwickeln liessen. Spätere ausführlichere Erörterungen einzelner Fragen werden mir Gelegenheit geben, diese vorläufigen Erklärungen entweder als die richtigen zu erweisen oder durch bessere zu ersetzen. Die Hauptsätze der Theorie werden dadurch, wie ich hoffe, nicht alterirt werden.

XXII. SITZUNG VOM 15. OCTOBER 1874.

Der Secretär theilt eine Zuschrift Sr. Excellenz des Herrn Ackerbau-Ministers vom 11. October mit, womit eröffnet wird, dass dem von der Akademie befürworteten Ansuchen der Herren Hofrath von Schrötter und Bergrath Adolf Patera entsprechend, die Berg- und Hüttenverwaltung zu Joachimsthal angewiesen wurde, eine Quantität vanadinsauren Natrons einzusenden und den genannten Herren zur Verfügung zu stellen.

Herr Dr. Fr. Steindachner übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Ichthyologische Beiträge."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 29. Wien, 1874; 4°.

Central-Observatorium, Physikalisches, zu St. Petersburg: Jahresbericht für 1871 und 1872. St. Petersburg, 1873; 4°. — Annalen: Jahrgang 1872. St. Petersburg, 1873; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 13. Paris, 1874; 4°.

Genootschap, Bataviaasch, van Kunsten en Wetenschappen: Tijdschrift voor indische taal-, land- en volkenkunde. Deel XXI, Aflev. 2. Batavia, & 's Hage, 1874; 8°. — Notulen. Deel XI. 1873, Nr. 3 & 4. Batavia, 1874; 8°.

Gesellschaft, k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Bd. XVII (neuer Folge VII), Nr. 9. Wien, 1874; 8°.

— naturforschende, in Danzig: Schriften. N. F. III. Bandes 2. Heft. Danzig, 1873; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 41. Wien, 1874; 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, von C. Ohrtmann, F. Müller, A. Wangerin. IV. Band. Jahrgang 1872. Heft 1. Berlin, 1874; 8°.

Leiden, Universität: Annales academici. 1868—1869, 1869—1870. Lugduni-Batavorum, 1873 & 1874; 4°.

Löwen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften für das Jahr 1873/4. 8° & 12°.

Musée Teyler: Archives. Vol. III. fasc. 3me. Haarlem, Paris & Leipzig, 1873; 4°.

Nature. Nrs. 248, 250, 258, Vol. X. London, 1874; 4°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger." IVe Année, 2me Série, Nr. 15. Paris 1874; 4°.

Société Hollandaise des Sciences naturelles: Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles. Tome VIII, 3e & 4e Livraisons. La Haye, Bruxelles, Paris, Leipzig, Londres & New-York, 1873; 8°. — Bibliotheca ichthyologica et piscatoria. Haarlem, 1873; 8°.

— Linnéenne du Nord de la France: Bulletin mensuel. 3e Année. 1874; Nrs. 25—28. Amiens; 8°.

Society, The Royal, of London: Philosophical Transactions. For the Year 1873. Vol. 163, Parts 1 & 2. London, 1874; 4°. — Proceedings. Vol. XXI, Nrs. 146—147. Vol. XXII. Nrs. 148—150. London, 1873 & 1874; 8°. — The Anatomy of the Lymphatic System. By E. Klein. London, 1873; 8°. — The Royal Society. 30th November 1873. 4°.

— The Zoological, of London: Transactions. Vol. VIII. Parts 6—8. London, 1873 & 1874; 4°. — Proceedings. For the Year 1873. Parts I—III; for the Year 1874. Part I. London; 8°.

Vereeniging, Koninkl. natuurkundige in Nederlandsch Indië: Natuurkundige Tijdschrift. Deel XXXII. (VII. Serie. Deel II. Aflv. 4—6). Batavia, 's Gravenhage, 1873; 8°.

Verein, Entomologischer, in Berlin: Berliner Entomologische Zeitschrift. XVIII. Jahrgang. (1874.) 3. & 4. Vierteljahrsheft. Berlin; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang Nr. 40—41. Wien, 1874; 4°.

XXIII. SITZUNG VOM 22. OCTOBER 1874.

Herr Prof. Dr. Ludwig Boltzmann erstattet seinen Dank für seine Wahl zum correspondirenden Mitgliede der Akademie.

Derselbe übermittelt ferner einen Nachtrag zu seiner in der Sitzung am 8. October vorgelegten Abhandlung: „Zur Theorie der elastischen Nachwirkung.“ I.

Herr Dr. L. J. Fitzinger erstattet Bericht über die von ihm, mit Unterstützung der Akademie, an den oberösterreichischen Seen und in den dortigen Anstalten für künstliche Fischzucht gewonnenen Erfahrungen, bezüglich der Bastardformen der Salmonen.

Herr Dr. J. Peyritsch legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Zur Synonymie einiger Hippocratea-Arten.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie Royale de Copenhague: Mémoires. Classe des Lettres. Vol. IV, Nr. 10. Copenhague, 1873; 4°. — Bulletin pour 1873. Nrs. 2—3. Copenhague; 8°.

— Impériale des Sciences de St.-Pétersbourg: Mémoires. VIIe Série, Tome XIX, Nrs. 8—10; Tome XX, Nrs. 1—5; Tome XXI, Nrs. 1—5. St.-Pétersbourg, 1873 & 1874; 4°. — Bulletin. Tome XVIII, Nrs. 3—5; Tome XIX, Nrs. 1—3. St.-Pétersbourg, 1873 & 1874; 4°. — Repertorium für Meteorologie. Band III. St. Petersburg, 1874; 4°.

Akademie der Wissenschaften, Königl. Preuss., zu Berlin: Monatsbericht. August 1874. Berlin; 8°.

— der Wissenschaften und Künste zu Agram: Rad. Knjiga XXVIII. U Zagrebu, 1874; 8°. — *Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium.* Vol. IV. U Zagrebu, 1874; 8°. — Stari pisci hrvatski. Knjiga VI. U Zagrebu, 1874; 8°.

American Chemist. Vol. V, Nr. 1. New-York, 1874; 4°.
— Journal of Science and Arts. Third Series. Vol. VI, Nrs. 35—36; Vol. VII, Nrs. 37—42. New Haven, 1873 & 1874; 8°.
Annalen (Justus Liebig's) der Chemie. Band 173, Heft 2 & 3; Band 174, Heft 1. Leipzig & Heidelberg, 1874; 8°.
Annales des mines. VII[e] Série. Tome V, 1[re] Livraison de 1874. Paris; 8°.
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 14. Paris, 1874; 4°.
Gesellschaft, Estnische, zu Dorpat: Verhandlungen. VIII. Bd., 1. Heft. Dorpat, 1874; 8°. — Sitzungsberichte. 1873. Dorpat, 1874; 8°.
— Naturforschende, in Emden: LIX. Jahresbericht. 1873. Emden, 1874; 8°.
— Astronomische, in Leipzig: Vierteljahrsschrift. IX. Jahrgang. 2. Heft. Leipzig, 1874; 8°. — XIII. Publication: Beobachtungen der Sonnenflecken zu Anclam von G. Spörer. Leipzig, 1874; 4°.
— Senckenbergische naturforschende: Abhandlungen. IX. Bandes 1. & 2. Heft. Frankfurt a. M., 1873; 4°.
— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 20. Wien, 1874; 4°.
Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang. Nr. 42. Wien, 1874; 4°.
Jena, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1873/4. 4° & 8°.
Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 21. Graz, 1874; 4°.
Lotos. XXIV. Jahrgang. August & September 1874. Prag; 8°.
Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 20. Band, 1874, VII.—IX. Heft. Gotha; 4°.
Nature. Nr. 259, Vol. X. London, 1874; 4°.
Nuovo Cimento. Serie 2[a]. Tomo XII. Luglio e Agosto 1874. Pisa; 8°.
Osservatorio, Reale, di Brera in Milano: Pubblicazioni Nr. VII, parte 3[a]. Milano & Napoli, 1874; 4°.
Philomathie in Neisse: XVIII. Bericht. Neisse, 1874; 8°.
Repertorium für Experimental-Physik etc. von Ph. Carl. X. Band, 2., 3. & 4. Heft. München, 1874; 8°.

Revista de Portugal e Brazil. 2ᵉ Vol. Nr. 7—11. Lisboa, 1874; 4⁰.

— de la Universidad de Madrid. 2ª Época. Tomo III, Nr. 5—6; Tomo IV, Nr. 1—2. Madrid, 1874; gr. 8⁰.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue des cours scientifiques de la France et de l'étranger,“ IVᵉ Année, 2ᵐᵉ Série, Nr. 16. Paris, 1874; 4⁰.

Sociedad Mexicana de historia natural: La Naturaleza. Tomo II. Entrega Nr. 40—42. Mexico, 1873/4; 4⁰.

Société Botanique de France: Bulletin. Tome XXIᵉ, 1874. Comptes rendus des séances. 2; Revue bibliographique A. Paris; 8⁰.

— Géologique de France: Bulletin. 3ᵉ Série. Tome II. 1874. Nrs. 3—4. Paris; 8⁰.

— Mathématique de France: Bulletin. Tome II. Nrs. 3—4. Paris, 1873; 8⁰.

— des Ingénieurs civils: Mémoires et comptes rendus des travaux. 3ᵉ Série, 27ᵉ Année, 2ᵉ Cahier. Paris, 1874; 8⁰.

— Impériale de Médecine de Constantinople: Gazette médicale d'Orient. XXVIIᵉ Année, Nr. 12; XVIIIᵉ Année, Nrs. 1—4. Constantinople, 1874; 4⁰.

Society, The Asiatic, of Bengal: Journal. Part I, Nr. 4. 1873; Part I, Nr. 1. 1874; Part II, Nr. 4. 1873; Part II, Nr. 1. 1874. Calcutta; 8⁰. — Proceedings. 1874. Nrs. I—V. January-May. Calcutta; 8⁰.

— The Royal Astronomical, of London: Monthly Notices. Vol. XXXIV, Nr. 8. June 1874. London, 8⁰.

— The Royal Geographical, of London: Journal. Vol. XLIII. London. 1873; 8⁰. — Proceedings. Vol. XVIII, Nr. 4. London, 1874; 8⁰.

— The Royal, of Edinburgh: Transactions. Vol. XXVII, Part I. For the Session 1872—73. 4⁰. — Proceedings. Session 1872—73. Vol. VIII. Nrs. 85—86. 8⁰.

Verein für Erdkunde zu Dresden: X. Jahresbericht. Dresden, 1874; 8⁰.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 42. Wien, 1874; 4⁰.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

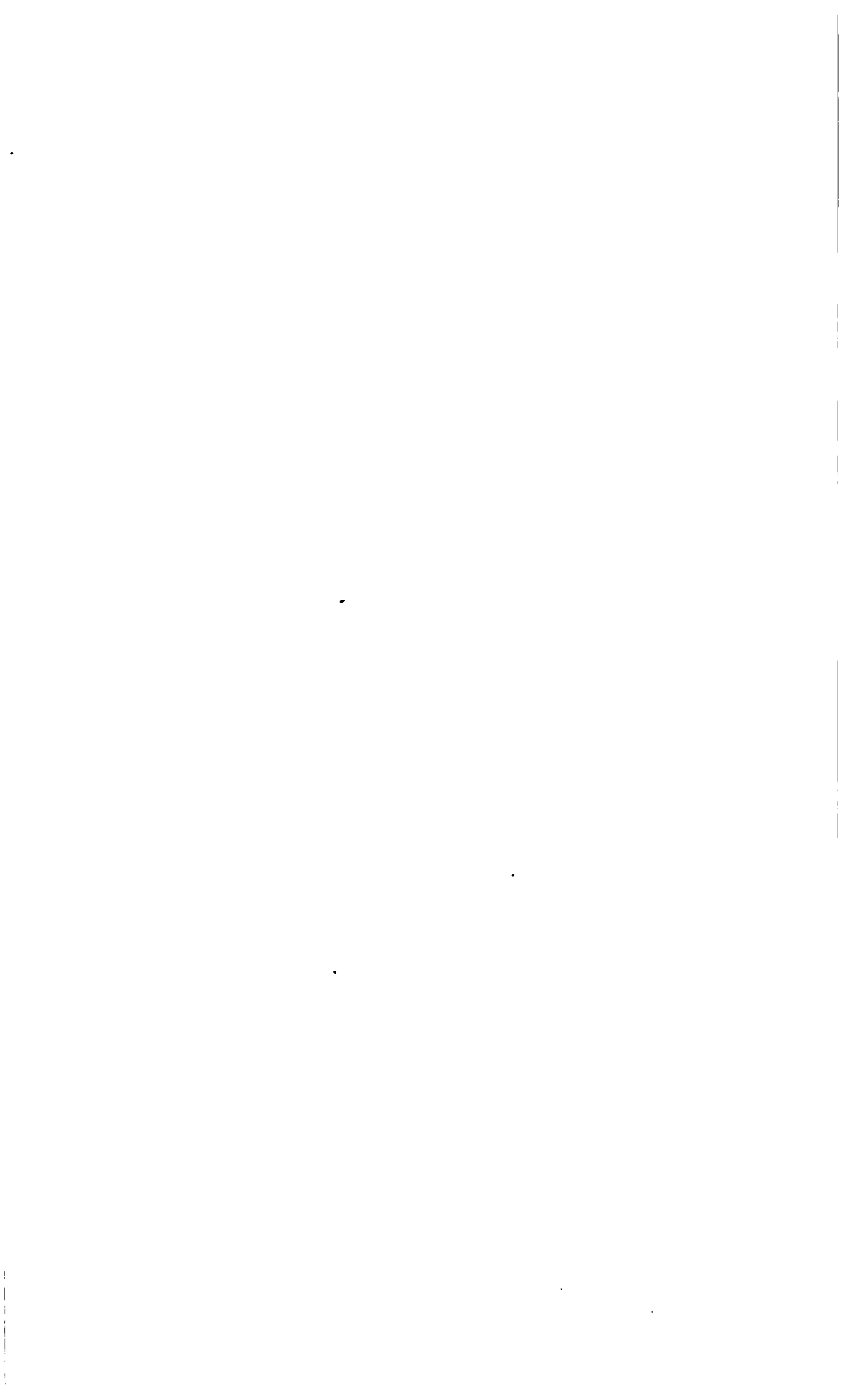
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. Band.

DRITTE ABTHEILUNG.

9.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.



XXIV. SITZUNG VOM 5. NOVEMBER 1874.

Der Präsident gibt Nachricht von dem heute erfolgten Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Regierungsrathes und Professors Dr. Friedrich Rochleder.

Sämmtliche Anwesende geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Die Direction der k. k. Unterrealschule zu Bruneck dankt mit Zuschrift vom 24. October für die Betheilung dieser Lehranstalt mit Werken und Separatabdrücken.

Das k. k. militär-geographische Institut macht die Anzeige vom Erscheinen einer Generalkarte von Central-Asien.

Herr Dr. Guido Goldschmiedt überreicht den ersten Theil einer Abhandlung „Über die Bestandtheile des aus schwarzem Senfsamen gewonnenen fetten Öles."

Herr Dr. F. Exner legt eine Abhandlung: „Über den Durchgang der Gase durch Flüssigkeitslamellen" vor.

Herr Prof. Dr. S. L. Schenk übergibt eine Abhandlung, betitelt: „Entwickelungsvorgänge im Eichen nach der künstlichen Befruchtung von *Serpula*".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei: Atti. Anno XXVII, Sess. 5ª. Roma, 1874; 4º.

Akademie der Wissenschaften, Kgl. bayer., in München: Abhandlungen der histor. Classe. XII. Band, II. Abth. München, 1874; 4º. (Nebst den betreffenden Separatabdrücken.) — Sitzungsberichte der philos.-philolog. und histor. Classe. 1873, Heft VI; 1874 Heft I—III; Sitzungsberichte der mathem.-physik. Classe. 1874, Heft I—II. München; 8º. — Dr. Justus Freiherrn von Liebig zum Gedächtniss. Rede von Max v. Pettenkofer. München, 1874; 4º. — Justus

Freiherr von Liebig als Begründer der Agrikultur-Chemie. Eine Denkschrift von August Vogel. München 1874; 4°. — Über den Einfluss des Freiherrn Justus von Liebig auf die Entwicklung der Physiologie. Eine Denkschrift von Theodor L. W. v. Bischoff. München, 1874; 4°. — Gedächtnissrede auf König Johann von Sachsen, gehalten von J. v. Döllinger. München, 1874; 4°.

Akademie der Wissenschaften, k. k., zu Krakau: Rocznik. Rok 1873. W Krakowie, 1874; 8°. — Lud. Serya VI—VII. Kraków, 1873—1874; 8°. — Bibliografia polska XIX. stólecia. Tom I—II. (A—L.) Kraków, 1872 & 1874; 8°. — *Scriptores rerum polonicarum. Tomus II.* Kraków, 1874; 8°. — Sprawozdanie komisyi fizyograficznéj. Tom VII. W Krakowie. 1873; 8°. — Rozprawy i sprawozdanie z posiedzeń wydziału historyczno-filozoficznego. Tom. I. W Krakowie, 1874; 8°. — Pamiętnik. Wydziały: Filologiczny i historyczno-filozoficzny. Tom I. W Krakowie, 1874; 4°. — Wydawnictwa komisyi historycznéj. Nr. 3. W Krakówie, 1874; 4°.

Annalen (Justus Liebig's) der Chemie. Band 172, Heft 3; Band 173, Heft 1. Leipzig & Heidelberg, 1874; 8°.

Annales des mines. VIIe Série. Tome V. 2me & 3me Livraisons de 1874. Paris; 8°.

Archiv der Mathematik und Physik, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. LVI. Theil, 3. & 4. Heft. Leipzig, 1874; 8°.

Bibliothèque Universelle & Revue Suisse: Archives des sciences physiques et naturelles. N. P. Tome L^{e}, Nrs. 199—200; Tome LIe, Nr. 201. Genève, Lausanne, Paris, 1874; 8°.

Bureau de la recherche géologique de la Suède: Carte géologique de la Suède. Feuilles Nrs. 46—49. Gross Folio. (Avec renseignements in 8°.) — Description de la formation carbonifère de la Scanie, par Ed. Erdmann. Stockholm, 1873; 4°. — Beskrifning öfver Besier-Ecksteins kromolitografi och litotypografi. Af Algernon Börtzell. Stockholm, 1872; 4°. — Jakttagelser öfver moränbildningar etc. Af Ed. Erdmann. Stockholm, 1872; 8°. — Über die Geognosie der schwedischen Hochgebirge, von A. E. Törnebohm. Stockholm, 1873; 8°. — Om några försteningar från Sveriges

och Norges „Primordialzon“, af J. G. O. Linnarsson. Stockholm, 1873; 8⁰. — Öfversigt af de geologiska förhållandena vid Hallands ås, af David Hummel. Stockholm, 1872; 8⁰. — Bidrag till kännedom om Sveriges erratiska bildningar etc., af Otto Gumaelius. Stockholm, 1872; 8⁰. — Die Ausstellung der geologischen Landes-Untersuchung Schwedens auf der Weltausstellung in Wien 1873. Stockholm; 8⁰.

Cosmos di Guido Cora. II—III. Torino, 1874; 4⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nrs. 15—17. Paris, 1874; 4⁰.

Gesellschaft der Wissenschaften, königl. böhmische: Abhandlungen vom Jahre 1873. VI. Folge. VI. Band. Prag, 1874; 4⁰. — Sitzungsberichte. Jahrgang 1872. Juli—December. Prag. 1873; 8⁰.

— Schlesische, für vaterländische Cultur: Abhandlungen. Philos.-histor. Abtheilung. 1873/4. Breslau, 1874; 8⁰. — LI. Jahres-Bericht. Breslau, 1874; 8⁰.

— physikal.-medicin., zu Würzburg: Verhandlungen. N. F. Band VII., u. Band VIII. 1. & 2. Heft. Würzburg, 1874; 8⁰.

Jahrbücher der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. N. F. IX. Band. Jahrgang 1872. Wien, 1874; 4⁰.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band X. 1.—6. Heft. Leipzig, 1874; 8⁰.

Meunier, Stanislas, Cours de Géologie comparée. Paris, 1874; 8⁰.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 20. Band, 1874. Heft X, nebst Ergänzungsheft Nr. 38. Gotha; 4⁰.

— Mineralogische, von G. Tschermak. Jahrgang 1874, Heft 3. Wien; 4⁰.

Nature. Nr. 260, Vol. X. London, 1874; 4⁰.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger“. IVᵉ Année, 2ᵐᵉ Série, Nrs. 17—18. Paris, 1874; 4⁰.

Società Italiana di Antropologia e di Etnologia: Archivio. IV. Vol., fasc. 2° Firenze, 1874; 8°.

— degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Anno 1874. Disp. 6ª—8ª. Palermo, 1874; 4°.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou: Bulletin. Tome XLVIII. Année 1874, Nrs. 1—2. Moscou; 8°.

Society, The Asiatic, of Bengal: Journal. Part I, Nr. 2. 1874. Calcutta; 8°. — Proceedings. 1874, Nrs. VI & VII. Calcutta; 8°. — *Bibliotheca Indica*. N. S. Nrs. 268, 294, 306. Calcutta, 1873 & 1874; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 43—44. Wien, 1874; 4°.

Würzburg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1873/4. 4° & 8°.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang, 14. Heft. Wien, 1874; 4°.

Studien über die Entwickelung der Extremitäten des Menschen, insbesondere der Gelenkflächen.

Von

Wilhelm Henke, *Professor in Prag.*

Carl Reyher, *Privatdocenten in Dorpat.*

(Mit 4 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Juli 1874.)

Einleitung.

Die rege Thätigkeit der Forscher, welche gegenwärtig das Studium der Entwickelungsgeschichte in den Vordergrund des Interesses drängt, ist nicht nur geeignet, zwischen den verschiedenen anatomischen Disciplinen, der allgemeinen, der speciell menschlichen und vergleichenden, die in der jüngstvergangenen Generation mehr und mehr auseinander gegangen waren, eine innigere Berührung und Ergänzung wiederherzustellen, sondern muss zugleich auch das Bedürfniss nach einem eingehenden physiologischen Verständnisse des Werdens der organischen Formen wachrufen. Der kühne Versuch von W. His, gleich die frühesten Stadien der Entwickelung des Wirbelthierleibes im Ei auf einfache mechanische Gesetze zurückzuführen, verdient wohl nicht den Hohn, mit welchem kürzlich der Prophet der modernen zoobiologischen Weltanschauung, E. Häckel, über ihn hergefallen ist, und rechtfertigt am wenigsten die Überhebung, mit welcher ihm von dieser Seite das Princip der „Vererbung“ entgegengestellt werden will. Denn damit ist doch im Grunde für eine Erklärung der Vorgänge nicht mehr geleistet, als wenn man sonst alles, was sich der physikalischen oder chemischen

Analyse entzog, einfach durch die „Lebenskraft“ besorgen liess. Aber das wird nicht geleugnet werden können, dass schon die Ableitung der ersten Grundzüge für die Gliederung des werdenden Leibes aus Knickungen des Keims in Folge ungleichen Wachsthums in verschiedenen Richtungen mehr oder weniger über das Ziel hinausgeschossen hat, und vollends wird es im weiteren Verfolg des damit genommenen Anlaufes kaum denkbarer Weise gelingen, den ganzen Bau des fertigen Organismus ab ovo zu construiren. Denn man kann auf diese Weise wohl zu sehr complicirten Gestalten gelangen, aber bei der grossen Verschiebung, welche die geringste Variation eines der vielen Coefficienten im Resultate ihrer Zusammenwirkung zur Folge haben müsste, nicht zu einem, doch bis in seine kleinsten Details festen Typus der angeerbten Form. Vielmehr werden wir uns wohl vorstellen müssen, dass allen den gestaltungsreichen Vorgängen, welche wir unter dem Namen der Vererbung zusammenfassen können, eine Organisation mit ihren Functionen zu Grunde liegt, so fein durchgebildet, dass sie leicht ebensoweit jenseits der Anschauungen, die wir jetzt durch das Mikroskop haben, liegen mag, wie diese über das hinaus gehen, was man vordem sehen konnte, und wenn dem so ist, werden wir gut thun, uns zu bescheiden, dass wir unmittelbar an der Stelle, wo zuerst die vererbte Übertragung der Form von Vorfahren her als Neugebilde zur Geltung kommt, den Hebel nicht ansetzen können, um zu einer exacten Erklärung der Art, wie diess geschieht, zu gelangen.

Wenn wir nun aber trotzdem nicht darauf verzichten wollen, die Entwicklungsgeschichte aus dem Niveau einer rein descriptiven Registrirung von anatomischen Ergebnissen zu dem Range einer physiologischen Doctrin zu erheben, so werden wir, nachdem die neubelebte Bearbeitung derselben, anknüpfend an die ihr unmittelbar vorhergegangene Glanzperiode der Histologie zunächst die frühesten Stadien der Neuorganisation, Zellentheilung, Dotterfurchung zum Ausgang genommen hat, nun erst wieder auf die Werdeformen zurückgehen müssen, welche der fertigen Ausgestaltung unmittelbar vorhergehen, um mit bereits bekannten Lebevorgängen die Fühlung wieder herzustellen. F. X. Bichat hat einmal gesagt, in physiologischen Dingen komme man immer nur weiter durch Ausgehen von den secundären Phänomenen. Fangen wir

auch so die Entwickelungsgeschichte wieder mehr von hinten an! d. h. 1) von den Stadien, wo die Formen der Organe sich nicht zuerst schattenhaft anlegen, wie „eine dunkle Geburt aus dem unendlichen Meer“, sondern sich als im Umriss bereits gegebene feiner ausmodelliren unter ähnlichen Bedingungen, wie dies sowohl pathologischer, als auch normaler Weise, auch nach der Geburt unter unseren Augen noch geschieht; 2) von den Organen und Geweben, welche voraussichtlich nicht in unmittelbarster Prädestination ihre Formung von den Keimstoffen erhalten, sondern indirect durch die auf ihre ersten gleichförmigen Anlagen einwirkenden bereits fertigen Functionen anderer, welche früher entstehen, d. h. z. B. in erster Linie der verschiedenen Producte der Differenzirung von Bindesubstanzen aus einer ursprünglich gleichen Gewebsanlage zu den verschiedenen Materialien des Skelets, Knorpel, Bänder, Faserknorpel, Knochen u. s. w. Aus beiden Gesichtspunkten scheint es an der Zeit, ein lange vernachlässigtes Stück der Entwickelung jetzt in Angriff zu nehmen, die der Bewegungsorgane, der Extremitäten mit ihren festen Gliederungen. Da dürften sich wenigstens Ansätze zu einem Verständnisse der Vorgänge, die der Vererbung zu Grunde liegen, ja sogar Bedingungen zu dem, was man Anpassung nennt, ergeben. Das grösste und fruchtbarste Feld der unmittelbaren Beobachtung des Werdens wird sich hier den physiologisch arbeitenden Zoölogen eröffnen, wenn sie an Thieren, denen die Extremitäten erst wachsen, wenn sie bereits ohne dieselben sich frei zu bewegen angefangen haben, wie die Froschlarven, den Aufbau derselben mit Nerven, Muskeln und Skelet im lebendigen Verein verfolgen.

Wir unsererseits waren durch Neigung, Vorstudien und Gelegenheit darauf geführt, ein engeres Gebiet für unsere Untersuchung zu wählen, die Entwickelung der Extremitäten an menschlichen Embryonen, die meist schon in der hiesigen anatomischen Sammlung in Spiritus aufbewahrt waren. Wir mussten demgemäss darauf verzichten, sowohl die rein histologischen Sonderungen der Organe, wie sie nur frisch sich rein darstellen, genauer zu ermitteln, als auch das Ineinandergreifen von activeren und passiveren Organen, Nerven, Muskeln und Skelet zu analysiren. Dagegen hatten wir volle Gelegenheit, dem Gegenstande unser

ungetheiltes Augenmerk zuzuwenden, welchen wir auch von vornherein für den geeignetsten halten, um an ihm das Werden der Form auf einfache Gesetze zurückzuführen, den Theilen, deren Gestalt, wie sie die mathematisch einfach bestimmbarste ist, welche die Anatomie des fertigen Organismus kennt, so voraussichtlich auch die einfachsten Bedingungen ihrer Entstehung hat, den Gelenkflächen nämlich, mit welchen die einzelnen Skeletabschnitte einander congruent berühren und welche, indem gemäss ihrer Rotations- oder Schraubengestalt eine gleitende Verschiebung zwischen ihnen ohne Aufhebung dieses Contactes möglich ist, den normalen Mechanismus der fertigen Gelenke bedingen.

Resumiren wir, ehe wir weiter gehen, was in Bezug auf die Vorgeschichte dieser Theile unseres Organismus bis jetzt an begründeten Vorstellungen gegeben ist. Es handelt sich dabei in erster Linie darum, wie die einzelnen Abschnitte des Skelets ursprünglich sich von einander absetzen oder miteinander verbinden. Mit diesem doppelten Ausdrucke für das, was in Frage steht, giebt sich auch eine doppelte Möglichkeit der Beantwortung: entweder eine zu Anfang in Continuität angelegte Einheit von grösseren Skeletabschnitten gliedert sich in kleinere dadurch, dass ihr Gewebe sich nachträglich durch Einschnitte in mehrere getrennte Portionen gleichartiger Organanlagen zerlegt; oder diese einzelnen Glieder, die im fertigen Zustande das ganze Skelet zusammensetzen, entstehen dadurch, dass in der ersten, noch nicht zu Organen differenzirten Körperanlage, an von vornherein getrennten Stellen das Gewebe sich zu Kernen von festerer Structur verdichtet und diese, indem sie einander entgegenwachsen, sich miteinander verbinden. Wir glauben nicht zu viel zu sagen, wenn wir das Ergebniss einer flüchtigen Durchsicht der einschlagenden Literatur von Bär und Rathke bis herab auf Luschka und Hüter dahin zusammenfassen, dass es bisher ziemlich unbestimmt geblieben ist, ob die eine oder die andere dieser beiden Möglichkeiten als der typische Entwickelungsgang der Skeletgliederung gelten kann, indem wiederholt von Abschnürungen einer einfachen Säule geredet wird, welche in der Anlage einer Extremität als Skelet zuerst auftritt, und doch wieder in der Art, dass ihre einzelnen Glieder erst als

gesonderte deutlicher verdichtet werden, oder schon vorher eine angedeutete Sonderung erkennen liessen. In der That kann es sehr wohl sein, dass das eine und das andere bei der gleichzeitigen Herausbildung von Organen und Geweben vorwiegend ist.

Eine andere Frage ist die, in welcher Weise die Formen von Contactflächen der Knochen, Gelenkköpfe, Gelenkpfannen etc. sich ursprünglich entwickeln, ob die Skeletabschnitte, indem sie zuerst wachsen, auch sogleich an ihren Endstücken diese, dem fertigen Mechanismus als bedingend zu Grunde liegende Form annehmen, oder dieselbe erst mit und unter dem in Gang kommenden Mechanismus erhalten. Hierüber liegen bisher, soweit es wenigstens die erste Bildungsgeschichte betrifft, nur hypothetische Ansichten vor, welche von der Analogie mit Modificationen der Gestaltung eben dieser Theile abgezogen sind, wie solche im Leben auftreten oder künstlich hervorgebracht werden können. L. Fick hat kurz vor seinem Tode eine Reihe von Versuchen an jungen Hunden gemacht, welche zeigen, dass Elimination von Muskeln, welche auf ein Gelenk wirken, die Krümmung der Contactfläche desselben schwächer (den Radius derselben weniger klein) und in Folge dessen bei sonst gleichen Durchmessern des Contactes den Spielraum der Bewegung kleiner bleiben lässt, und hat hieraus auf die frühere Entwickelung den Schluss gemacht, dass die Wirkung der Muskeln eine wesentliche Bedingung für die eigenthümliche Gestaltung der Gelenkflächen in ihrer Entstehung ist. Dem schliessen sich die Ergebnisse der Untersuchung von C. Hüter über die Veränderungen der Gelenke von Neugeborenen an, wobei sich eine Vergrösserung der Contactflächen nach der Seite einer vermehrten Bewegungsexcursion, eine Verödung derselben auf der einer verminderten zeigt. Ebenso die ganz analogen pathologischen Veränderungen, welche sich aus der Zergliederung der Contracturen des Fusses durch den Einen von uns ergeben, und das Resultat der Versuche des Anderen mit Immobilisirung der Gelenke von wachsenden Hunden. Immer zeigt sich, dass einseitige Excursion die Ausdehnung und Krümmung der Gelenkfläche vermehrt, aufgehobene deren normale Entwickelung nicht zu Stande kommen lässt.

Zwischen jenen unbestimmten Andeutungen über die erste Gliederung und dem Versuche einer Uebertragung dieser Beob-

achtungen im späteren Leben klafft in der bisherigen Kenntniss der Entwickelung der Gelenke eine Lücke der Beobachtung, zu deren Ausfüllung das Ergebniss unserer Beobachtungen wenigstens einen ersten Beitrag darstellen kann. Ausserdem sind bei denselben eine Reihe von Bildern zu Tage getreten, welche wie andere Entwickelungsvorgänge den durchgreifenden Parallelismus der Entwickelung des menschlichen Einzelindividuums und des menschlichenTypus aus niederen thierischen illustriren. Wir werden zuerst den objectiven Befund unserer Arbeit referiren und dann in jenen beiden Richtungen die Ergebnisse derselben ausziehen.

Erste Anlage und Gliederung der Extremitäten.

Die frühesten Stadien, die wir untersucht haben, gehören 5—6-wöchentlichen Embryonen, von 18—20 Mm. längstem Durchmesser an.

In dieser Periode ragen die vier Extremitäten als je kaum 4 Mm. lange Körper, parallel zur Medianebene gegen die Bauchseite hin am Rumpfe hervor. Der an dem unpräparirten Embryo sichtbare Theil der unteren Extremität hat sogar nur 3 Mm. Länge, liegt aber dafür mit einem grösseren Abschnitt des Oberschenkels, ja fast mit dem unteren Ende desselben in den Beckenweichtheilen verborgen. Scheinbar möchte also die untere Extremität gegenüber der oberen im Wachsthum zurückgeblieben sein. Die Länge des in den Beckenweichtheilen liegenden Abschnittes beträgt jedoch nahe 2 Mm., während die Länge des in den Schulterweichtheilen verborgenen Abschnittes des Oberarms nur 1 Mm. misst. Der scheinbare Unterschied fällt somit. Beide Extremitäten besitzen ziemlich gleiche Länge: bis an die Schultern an Hüftgelenks-Anlagen circa 5 Mm., von denen 2 Mm. auf Oberarm und Oberschenkel, 1 Mm. auf Vorderarm und Unterschenkel und 2 Mm. auf Hand und Fuss fallen. Ellenbeuge und Knie sind schon durch geringe Abbiegungen vom geraden Winkel, entsprechend einem Bogen von 120° äusserlich sichtbar angedeutet.

In dieser fixen Stellung bieten die Extremitäten, jede nach rechts und links hin, d. h. median- und lateralwärts ihre grössten Flächen dar, so dass sie auf die Medianebene projicirt, in ihr einen Breitedurchmesser von $1\frac{1}{2}$ Mm. und auf der Frontal-

ebene einen Dickendurchmesser von nahe 1 Mm. besitzen. Sie sind also, wenn in Bezug auf Hand und Fuss der Vergleich mit den Extremitäten Erwachsener gestattet sein soll, so gelagert, dass Hand und Fuss ihre Volar- und Plantar-Flächen einander zukehren und zwar zu einander und zur Median-Ebene parallel. In welcher Weise sich hiebei Vorderarm und Unterschenkel verhalten, wird später gezeigt werden. So viel schon jetzt: der Fuss biegt sich weder in einem rechten Winkel, noch überhaupt in einer bestimmbaren Winkelgrösse gegen den Unterschenkel ab. Er fällt mit seiner Längsaxe in die Längsaxe des Unterschenkels. Die Plantarfläche des Fusses liegt in der Fortsetzung der mediangerichteten Beugeseite, die Dorsalfläche in der Fortsetzung der lateral gerichteten Streckseite des Unterschenkels. Die angedeutete Biegung im Ellbogen und Knie liegt dagegen in der Richtung von vorn nach hinten, parallel der Medianebene.

An der Peripherie der oberen Extremität zeigen sich ganz minimale Einkerbungen, welche die fünf Finger abzuzählen gestatten. An der unteren Extremität fehlen diese.

Durch diese Extremitäten sind nun parallel zur Medianebene Schnitte gelegt worden. Da Hohlhand- und Sohlenflächen zur Medianebene parallel liegen, so mussten in einem solchen Schnitt nebeneinander alle Theile der ganzen Hand, des ganzen Fusses vorhanden sein. Diese Schnitte, vom Daumen zum kleinen Finger durch die Hand gehend, werden Flächenschnitte genannt werden, im Gegensatz zu solchen, welche senkrecht zu diesen Schnittebenen vom Dorsum zur Vola durchschneidend und zugleich parallel zur Längsaxe der Extremität und resp. der Finger, Dorsovolar-Schnitte genannt werden werden.

Die Schnitte wurden stets in Serien angelegt, so dass von dem Dorsum bis zur Vola, von einem Seitenrande bis zum anderen der ganze Gliedabschnitt in eine Reihe gleich dicker Schnitte zerlegt wurde, und somit in dem Vergleich derselben die Möglichkeit gegeben war, Form, Grösse, Lageverhältniss zu einander und namentlich Vorhandensein oder Abwesenheit jeder Gliedanlage zu bestimmen.

Benutzt wurde ein sehr empfehlenswerthes Mikrotom, welches nach Angabe des Prosectors-Gehülfen Dr. Rosenberg

in Dorpat von dem dortigen Mechanikus Schultze unter Zugrundelegung des Leiser'schen Princips construirt worden ist. Zur Einbettung wurde mit grossem Vortheil die von Professor Flemming angegebene Transparentseife, anfangs auch Parafin. ohne oder mit Wachszusatz gebraucht.

Die Embryonen waren in Alcohol gehärtet. Die Schnitte wurden entweder untingirt in Glycerin untersucht oder nach Färbung mit Hämatoxilin oder Picrocarmin in dasselbe eingeschlossen.

Wir bleiben zunächst bei der oberen Extremität.

In dieser lassen sich bei Embryonen dieses Stadiums, also der 5. und 6. Woche, mit Ausnahme der Endphalangen alle Skelettheile nachweisen. Auf geeigneten Schnitten gelingt es, mit Ausschluss des Daumens, der in seiner Anlage schon etwas gegen die Vola opponirt steht, alle Theile zusammen vor sich zu sehen (Fig. 1) vom Humerus herunter bis zur II. Phalange.

Der Humerus ist mit einem auf dem Durchschnitte kreisähnlichen Kopfe gegen das Schultergerüste begrenzt. Er selbst ist eine mehr weniger gerade runde Säule, an manchen Präparaten gebogen, wie aber aus der Compression der Zellen ersichtlich, artificiell in Folge von durch die Präparation etc. bedingten Manipulationen. Sein unteres Ende besitzt einen walzenförmigen Körper, welcher der Trochlea des Erwachsenen entspricht und mit seiner Axe die Längsaxe des Humerus rechtwinklig schneidet. Die Doppelkegelform des Erwachsenen fehlt. An beiden Enden ist die Walze stumpf zugespitzt, zu den Condylen analogen Theilen. Von einer Fovea humeri antica und postica ist nichts vorhanden. Diese Walze dient der Incisura sigmoidea major der Ulna zum Kopf. Das Olecranon besitzt eine grosse Breite. Vom medialen bis lateralen Ende umgreift dasselbe die Walze. Diese selbst bietet auf Durchschnitten in der medialen Hälfte (Fig. 3) Krümmungslinien von c. 140° Bogenspannung, deren hintere zwei Dritttheile von der Ulna berührt werden. Das vordere Dritttheil ihrer Krümmung hat mit dem Vorderarm keine Berührung. In der lateralen, also radialen Hälfte (Fig. 1) wird die Bogenspannung ziemlich plötzlich eine grössere, erreicht circa 180° und entspricht einem grösseren Durchmesser, als in der medialen Hälfte. Nur der

äusserste hintere Abschnitt der Krümmung hat noch denselben Radius, wie medianwärts. Hier liegt das Olecranon an. Nach vorn auf dem verbreiteten Walzenabschnitt ruht das Köpfchen des Radius. Während also beim Erwachsenen der Gelenkkopf *(Eminentia capitata)*, für die Pfanne des Radiusköpfchens lateralwärts von der Trochlea, gewissermassen in der Verlängerung ihrer Axe liegt, so befindet sich hier der humerale Theil der Radiohumeral-Verbindung vor der Humero-ulnar-Verbindung, liegt die Eminentia capitata vor der Trochlea und zwar als ein der letzteren zugehöriger Theil, als eine Vorwölbung der letzteren in ihrer vorderen Peripherie. Desshalb erhält man auf Schnitten, welche die Axe der Trochlea unter rechtem Winkel treffen, von einem bis zum anderen Condylus stets Bilder mit der Humeroulnar-Verbindung und nur in einer bestimmten Anzahl solche, in denen zugleich auch die Radiohumeral-Verbindung sichtbar wird. Dabei liegt der Radius übrigens mit seinem unteren Ende etwas medianwärts. Er ist, mit bekanntem Terminus zu sprechen, pronirt gestellt.

Wie aus Vorgehendem erhellt, sind auch Radius und Ulna in kenntlicher Form angelegt (Fig. 1). Sie sind verhältnissmässig kurz. Der Radius hat die halbe Länge der Hand. Beide Vorderarm-Glieder sind von oben bis unten ziemlich gleichmässig. Die Ulna unten vielleicht etwas breiter als der Radius. Sie besitzt ihr Olecranon, ihre Fovea sigmoidea major, ihren Proc. coronoideus, dicht unter demselben jedoch noch einen kleinen Buckel mit der Convexität gegen den Radius gerichtet, als entwickle sich hier ein Gelenk, zu dem der Radius die Pfannen liefern soll. (Fig. 1.)

Der Radius hat seinen Kopf und Hals. Sogar die Tuberositas für die Insertion der Bicepssehne ist durch eine unter dem Hals sitzende Prominenz angedeutet.

An der Handwurzel finden sich alle Theile, sogar die *Cartilago triangularis* (Fig. 1) differenzirt, in ihrer Form freilich sehr unbestimmt, wenn man nicht in einem länglichen Körper das Abbild eines Naviculare, in einem mehr weniger cubischen ein Multangulum majus oder minus sehen will, dagegen in ihrem Lageverhältniss zu einander und zum Vorderarm recht deutlich und präcis bestimmt. In Hinsicht der Grösse fällt die beträchtliche Entwicklung der ulnar gelegenen Hälfte auf. Man erhält

Durchschnitte vom Capitatum und Hamatum, in welche das Multangulum majus 6 Mal hineingezeichnet werden könnte. Das Triquetrum ist reichlich noch ein Mal so gross, wie das Multangulum majus und letzteres selbst wieder kleiner als das Multangulum minus. Das Pisiforme ist noch nicht angelegt. Dagegen finden sich auf der radialen Seite zwischen das Naviculare und die zweite Handwurzelreihe eingeschaltet, zwei Glieder angelegt, über welche später bei den vergleichend anatomischen Ergebnissen weiter berichtet werden wird.

Die Handwurzel verhält sich auch zu den Metacarpen ganz typisch. An das Hamatum schliessen sich die beiden letzten Metacarpen, an die drei anderen Glieder der zweiten Handwurzelreihe die drei übrigen. Während aber die Begrenzungslinien in der Handwurzel selbst höchst unbestimmt sind, weder gekrümmt nach bestimmten Radien, noch irgend geradlinig, so sind dieselben hier ganz regelmässig geradlinig. Die der vier ersten liegen sogar zusammen in einer geraden Linie, von welcher sich stumpfwinklig an der vorderen Peripherie des Hamatum die Verbindungslinie mit dem Metacarpus V. abbiegt. Ebenso zeigen Dorsovolarschnitte geradlinige Begrenzungen der Metacarpi gegen die Carpalreihe.

Bis hieher verhalten sich die Theile ganz gleich, ob sie ungefärbt in Glycerin oder nach Färbung mit Hämatoxilin oder Picrocarmin untersucht werden. Die Skelettheile erscheinen lichter in Folge geringeren Zellen- und Kernreichthums und breiterer Intercellularsubstanz, alle übrigen Theile der Extremität in Folge grossen Zellen- und Kernreichthums dunkler, ebenso bei der Hämatoxilin-Färbung. Picrocarmin färbt die Skelettheile gelb, alles Uebrige roth. Vom Metacarpus an ändert sich das Verhalten der Theile. An nicht tingirten und mit Haematoxilin gefärbten läuft der Metacarpus als ungetrennte continuirliche schlanke Säule von der Form einer Rheinweinflasche in die vordere Peripherie der Hand aus (Fig. 1), von dem äussersten Rande derselben nur durch einen schmalen dunklen Saum getrennt. An der Basis ist sie etwas gebaucht. Gegen ihr vorderes Ende hin besitzt sie eine circuläre ebenso lichte Leiste. Das Ende selbst ist zugespitzt oder abgerundet. Auf Flächenschnitten erhält die Säule an diesem vorderen Ende das Bild

eines hutartigen Aufsatzes (Fig. 4. dig. III und IV). Die circuläre Leiste gibt die Krempe, das Säulenende den Kopf des Hutes. Solche Bilder erhält man ganz besonders leicht, wenn nicht das ganze Ende der Säule in den Schnitt gefallen ist, was um so eher geschieht, als die Säule, wie man sich auf Sagittalschnitten überzeugt, etwas zur Vola gekrümmt ist.

Anders wird das Bild unter der Picrocarmin-Behandlung. Unter ihrer Mithülfe erkennt man, dass in dieser Säule der Metacarpus und beide ersten Phalangen angelegt sind, von einander geschieden durch Scheiben, die über die Circumferenz der Säule hinausragen und sich an der I. Interphalangeal-Verbindung in dem nicht tingirten Schnitt als circuläre Leisten präsentiren. Während die Säule nur blassgelb gefärbt ist, erscheint diese Scheibe von intensiverer Gelbfärbung und hebt sich durch dieselbe mehr weniger scharf ab. An der Metacarpophalangeal-Verbindung (Fig. 4 und 5) springt die Scheibe nicht mehr so scharf über die Peripherie vor, ist jedoch in ihrer Gelbfärbung kenntlich. An den Metacarpophalangeal - Verbindungen des Daumens und Zeigefingers (Fig. 5) ist sie sogar ebenso gross und springt sie ebenso weit vor, wie an den Interphalangeal-Gelenken. Das Verhalten des Daumens weicht auch noch dahin ab, dass das vordere Ende seiner Skeletanlage von einer solchen Scheibe gebildet wird. Die zweite Phalanx fehlt noch, ebenso jede Andeutung derselben und doch sitzt dem äussersten Ende der ersten Phalanx schon die gelbe Scheibe auf. (Fig. 5.)

Von diesen gelben Scheiben findet sich nun an den übrigen höher oben gelegenen Verbindungen der Skelettheile nirgend eine Andeutung. Ueberall sind die einzelnen Gliedabschnitte durch rothgefärbte Linien von einander getrennt. Diese rothen Streifen, wie sie die Skelettheile gegen einander abgrenzen, bilden sie auch die Marke gegen die übrigen, den Weichtheilen der Extremität zur Entwicklung dienenden Gewebslagen, so dass sie der Ausdruck eines den ganzen Skelettheil sowohl gegen sein nächstes Skeletglied, wie gegen das übrige Gewebe abgrenzenden, sich unter Picrocarmin roth tingirenden continuirlichen Ueberzugs sind. Bei starker Vergrösserung erweisen sich diese rothen Säume als Reihen dicht gedrängter Zellen kleinster Bildung, ohne Intercellular-Substanz.

Diese scharfe Trennung der Skelettheile von einander durch die rothen Streifen fällt nun an den obbezeichneten Metacarpophalangeal- und Interphalangeal-Verbindungen weg. An ihrer Stelle finden sich die gelben Scheiben. Auch die Begrenzung der Metacarpi und noch mehr der Phalangen gegen ihre Umgebung verliert, je mehr zur Peripherie, um so mehr an Schärfe. Wie sie selbst weniger lichtgelb sind, zur Peripherie der Hand hin schrittweise mehr röthliche Farbenmischung annehmen, so wird auch die Abgrenzung eine unbestimmte, verwischtere und dieses ist von dem Grad der histologischen Sonderung, der Entwickelung von Knorpel und dem Auftreten von Intercellular-Substanz abhängig.

Die schönste Gelbtinction findet sich im Humerus und zwar in der Mitte seiner Länge, wo die grössten Knorpelzellen liegen, Zellen so gross, dass ihre Kerne allein aus 5 und 10 der kleinen Begrenzungszellen zusammengesetzt sein könnten. Zwischen sich haben dieselben verhältnissmässig breite Zonen hyaliner Intercellular-Substanz. Diese Knorpelzellen, hier ziemlich unregelmässig geordnet, gehen central, wie peripher in eine Schicht länglich gestreckter und sich mit ihrer Längsaxe quer zur Axe des Skelettheils stellenden Zellkörper über. Die hyaline Intercellular-Substanz nimmt ab, das Gelb wird blasser. Zu beiden Enden des Gliedes hin werden die Knorpelzellen allmälig kleiner, verlieren wieder die obenbezeichnete Anordnung und enden in steter Abnahme ihrer Dimensionen und weiterem Verlust ihrer Gelbfärbung endlich mit kleinsten Zellkörpern minimalsten Protoplasma-Gehalts und fast ohne Intercellular-Substanz an der Begrenzungsschicht in dem rothen, dieselben Elemente zeigenden Saum.

Es erweist also die Untersuchung mit stärkeren Vergrösserungen, dass die Knorpelzellen nicht scharf sich gegen die kleinen Rand- und Begrenzungszellen abheben, sondern zwischen ihnen ein Uebergang besteht.

Ebenso fehlt auch gegen das zukünftige Perichondrium oder Periost eine scharfe Abgrenzung. Der Uebergang zu den kleinen Zellen des rothen Saumes ist hier nicht so allmälig; aber die grossen Knorpelzellen und die breite Intercellularsubstanz erhalten sich nicht quer durch die ganze Dicke des

Gliedes. Ihr Entwickelungsheerd liegt im Centrum jeder Skeletanlage. Von diesem schreitet die Umwandlung allseitig vor, nur in der Längsaxe des Gliedes rascher als in der Queraxe. Im Centrum liegt der Ausgangspunkt wohl charakterisirten Knorpelgewebes in Gestalt eines Knorpelkerns. Bestätigt wird dieses noch später durch die Phalangen.

Diese selben Uebergänge wiederholen sich an jedem Skeletabschnitt, nur in der Entwicklungsstufe entsprechender Weise. Die in der Mitte der Ulna liegenden Knorpelzellen haben vielleicht noch die Grösse der des Humerus-Centrums, im Radius sind sie schon nicht mehr so gross, in den Carpalia und Metacarpi entsprechen die grössten solchen des Humerus, die in demselben nahe dem oberen oder unteren Ende liegen. Als Knorpelzellen charakterisirt sind sie nur durch die freilich sehr spärliche hyaline Grundsubstanz, welche an den Phalangen endlich nicht mehr nachweislich ist. Diese sind aus kleinen Zellkörpern fast ohne alle, jedenfalls nicht hyaline Intercellular-Substanz zusammengesetzt, Zellen, die in ihrer Form sich nicht von den übrigen die Hand bildenden Elementen unterscheiden. Sie sind eben rund, wie diese. Nur sind sie etwas grösser und ihr wesentlichstes Kennzeichen finden sie in der grösseren Lichtheit und Durchsichtigkeit ihrer Materie.

Die Zellkörper der Zwischenscheiben endlich unterscheiden sich von denen mehr central gelegener Verbindungen nur durch einen kleineren Durchmesser ihres Leibes und die intensive Gelbfärbung, welche sie unter Picrocarmin annehmen.

Was nun die übrigen, einer entwickelten Extremität zukommenden Organtheile anlangt, so kann über Gefässe und Nerven Nichts berichtet werden. Ihnen ist weder die nöthige Aufmerksamkeit zugewandt noch überhaupt mit den nothwendigen Präparations-Verfahren nachgegangen worden.

Die Muskulatur ist um den Humerus in voller Entwicklung, ebenso die Muskulatur des Vorderarmes, soweit sie von den Condylen als Flexoren- und Extensorenpacket ihren Ursprung nimmt. Zu einer Sonderung derselben jedoch zu einzelnen bestimmten Bäuchen oder etwaiger Einscheidung derselben ist es noch nirgend gekommen. Nur den Triceps sieht man mit einer Sehne sich an die Spitze des Olecranon inseriren (Fig. 3).

Die Vorderarmmuskeln verlieren sich jedoch schon im untern Dritttheile desselben in kleinzelliges Bildungsgewebe, welches von hier ab ohne andere histologische Sonderung als die oben erwähnte der Skelettheile das Material darstellt, aus dem die übrige Extremität aufgebaut ist. Nur ein Mal haben wir im Dorsovolarschnitte auf dem Rücken der Basis des dritten Metacarpus eine strangartige Bildung gesehen, bedingt durch dichtere Anordnung derselben überall rundlichen Zellkörper. Es mag die Anlage einer Sehne gewesen sein. Insertionen aber sind an der Hand noch nicht vorhanden und ebensowenig in Entwickelung begriffene Muskelfasern.

Dass die Muskulatur sich überall in den frühesten Stadien ihrer Entwickelung befindet, braucht nicht hinzugefügt zu werden. Vollständig ausgebildete Muskelfasern kommen nie vor. Immer sind es nur lange Spindeln, an denen zunächst der vorspringende Kern auffällt und an welchen erst bei genauerem Zusehen die beginnende Querstreifung wahrgenommen wird.

Von Fascien, Bändern, Kapseln ist somit noch Nichts zu sehen; Skeletanlage, am Vorder- und Oberarm in Entwickelung begriffenes Muskelgewebe und die Sehne des Triceps — das sind die einzigen Differenzirungen, die bis zu diesem Stadium sich vollzogen haben. Alles übrige, die Formen der Extremität füllende Material ist kleinzelliges, an Intercellar-Substanz sehr armes undifferenzirtes Bildungsgewebe.

Im Wesentlichen nicht anders verhält es sich mit der unteren Extremität am fünf- und sechswöchentlichen Foetus. Auch hier sind alle Skelettheile mit Ausschluss der Zehenphalangen gesondert.

In Bezug auf das Hüftbein konnte constatirt werden, dass dasselbe mit einer Concavität den kugelig runden Kopf des Femur umgreift. Die Zusammensetzung des Hüftbeins aus drei Theilen liess sich nicht feststellen. Schnitte, in die dem Darm- und Sitzbein entsprechende Theile fielen (Fig. 8), zeigten ein continuirliches Lager von gleichartig differenzirten Zellen, welche nur im Darmbein selbst schon zu wohl charakterisirten und grossen Knorpelzellen übergehen. Gegen den Schenkelkopf, der ebenso, nur aus verhältnissmässig grossen, aber noch nicht zu Knorpelzellen ausgebildeten Zellkörpern zusammengesetzt

ist, wird die Pfanne durch eine Zone kleinzelliger Bildungen, analog den im Picrocarmin sich roth färbenden Streifen der oberen Extremität abgegrenzt.

Schenkelhals und Trochanter sind in entsprechender Grösse vorhanden. Der Beweis hiefür liegt darin, dass man, von der Medianseite her Schnitte durch die Extremität legend, zuerst Bilder erhält, in denen nur Acetabulum, Kopf und vom Oberschenkel noch ein unteres Ende im Schrägschnitt vorliegt, bis allmälich erst unter fortschreitender Vergrösserung des Oberschenkelstückes und Schwinden des Hüftbeins, die Continuität des Oberschenkels mit dem abgerundeten Trochanter zu Tage tritt (Fig. 8 gibt einen mehr median gelegenen Schnitt).

An den vorliegenden Präparaten war der Oberschenkel nie gerade, stets in seinem mittleren Drittheil ein- oder mehrfach nach vorn oder nach hinten abgebogen, ohne dass sich in der Zellenanordnung oder sonst Momente für einen ihm bei präparativen Manipulationen zugefügten mechanischen Insult auffinden liessen. Das untere Ende ist aufgetrieben und besitzt in nicht unähnlicher Form und guter Rundung beide Condylenknäufe. (Fig. 8 und 2.) Zwischen ihnen die Incisura intercondyloidea. Nur in ihrer Lage, in ihrer Axenstellung weichen sie von ihrem späteren Verhalten beträchtlich ab. Denkt man sich durch die Condylen eine gemeinschaftliche Drehungsaxe gelegt, so würde dieselbe beim Erwachsenen in der Frontalebene liegen und die Längsaxe des Oberschenkels quer schneiden. Das thut sie hier nicht. Der Cond. externus ist so weit an der hinteren Fläche des Oberschenkels hinaufgerückt, dass die gemeinschaftliche Axe mit der Längsaxe des Oberschenkels nach oben und aussen convergirt, nach unten und innen divergirt. Daher kommt es, dass man in einen Schnitt (Fig. 6) die Condylen wie das Mittelstück des Femur mit einem beträchtlichen Stück seiner Länge bekommen kann. Dazu kommt noch eine zweite mehreren Thieren, z. B. Echidna und Didelphys gemeinsame Eigenthümlichkeit. Der Condylus lateralis wird nicht ganz durch den gleichnamigen der Tibia berührt, sondern an ihn schliesst sich die nach oben verhältnissmässig lange Fibula.

An der Tibia fällt die grosse Breite der Condylen auf. Sie sind breiter als massig. Ihre Breite hat fast dieselbe Dimension

wie ihre Länge (Fig. 6). Zwischen ihnen springt die Eminentia intercondyloidea hervor. Getrennt sind dieselben von den Femur-Condylen durch eine breite Zone dichtgedrängter kleiner Zellen, unter Picrocarmin roth. Die Meniscen sind noch nicht angelegt, die Patella wohl.

Dicht unter den Condylen wird die Tibia sehr plötzlich schlank, was um somehr auffällt, alssie bei ihrer geringen Länge sich bald wieder verdickt, um zum unteren Ende anzuschwellen (Fig. 2). Dieses findet auf Flächenschnitten seine Begrenzung in einer geraden Linie, nicht wie beim Erwachsenen in einer rechtwinklig geknickten entsprechend innerer und oberer Fläche des Talus Rolle. Dabei ist die untere Hälfte der Tibia so gebogen, dass diese untere Begrenzungslinie fast in die Längsaxe der Extremität zu liegen kommt, wenigstens ihr parallel ist. Mit dieser berührt die Tibia den inneren (in Analogie zur entsprechenden Seite beim Erwachsenen) Rand des Talus (Fig. 2). Dieser hat auf Flächenschnitten die Figur eines Dreiecks, dessen einer Winkel sehr spitzig ist und sich mit langen Schenkeln zwischen Fibula und Tibia hineinschiebt (Fig. 2 und 4). Der laterale Winkel ist grösser, abgestumpft und sieht mit seinen Schenkeln gegen Fibula und Calcaneus. Die vordere Ecke des Dreiecks ist am stärksten abgestumpft und repräsentirt den Kopf, in Berührung mit dem Naviculare. Am auffallendsten ist hier der lange sich zwischen die Unterschenkelknochen hinaufschiebende Fortsatz des Talus, welcher einige Aehnlichkeit mit dem bei *Phalangista ursina* in dieser Gegend vorkommenden Zwischenknorpel hat. Es lässt sich denken, dass der Hauptheil des bei beiden, Homo und Phalangista gleich angelegten Talus verknöchert, der zwischen Fibula und Tibia hineinragende Keil jedoch bei Phalangista knorpelig bleibt und dann als Zwischenknorpel die Rotationsbewegungen unterstützt, welche bei diesem Thier der Talus am Malleolus internus um eine senkrechte Axe beschreibt, während beim Menschen dieser Fortsatz verschwindet. (Vgl. u. S. 267.)

Der Calcaneus ist nicht so lang wie der Talus und ist zur Peripherie hin, wo er mit dem Cuboideum gleiche Breite hat, viel breiter als hinten. Mit seiner innern Seite sieht er gegen die äussere des Talus, ist aber von ihr, wie von der Fibula durch eine Zone kleinzelliger Bildungen geschieden, welche fast eben

so breit als er selbst ist. Der Calcaneus liegt somit nicht unter dem Talus, sondern beide liegen, wie überhaupt alle Skelettheile der unteren Extremität neben einander, der Talus nach innen, der Calcaneus nach aussen, beide um eine Schnittebene mehr nach hinten, als der Unterschenkel. Dieses gilt besonders vom Calcaneus. Das Lageverhältniss ist jedoch nur von kurzer Dauer, denn bei nur wenig älteren Embryonen findet man die Skelettheile des Fusses schon in einer der späteren Wölbung des Fusses, wenn auch nicht gleichkommenden, so doch auf sie hinzielenden Stellung und Anordnung.

Weiterhin macht sich wieder die vorgeschrittene Entwickelung der äusseren Seite des Fusses, wie an der Hand geltend. Die bedeutende Grössenentwicklung der fibular gelegenen Skelettheile ist aus den Abbildungen (Fig. 2) ersichtlich. An die in Lage und Zahl stimmenden Fusswurzelglieder schliessen sich die Metarsi und diese laufen nun wieder, wie an der Hand in schlanke Säulen aus, welche in bestimmtem Abstande von der Peripherie die circuläre Leiste besitzen. Jede Säule hat aber nur eine solche circuläre Auftreibung und darin unterscheiden sie sich von denen der oberen Extremität. Es sind hier nur der Metatarsus und die erste Phalanx angelegt. Nur in einigen Schnitten lässt sich an den drei äusseren Zehen noch in schwacher und undeutlicher Zeichnung die Anlage der zweiten Phalanx errathen. Ganz besonders fällt endlich der Metatarsus I. durch seine Kürze und bedeutende Dicke auf. Er gleicht mehr einem cubischen als prismatisch säulenartigen Körper. An ihn schliesst sich auch ohne weitere Fortsetzung nur die erste Phalanx (Fig. 2). Wie an der oberen Extremität sind auch hier die Skelettheile alle durch jene oben beschriebenen Reihen dichtgedrängter kleiner Zellen von einander getrennt. Sie färben sich in Picrocarmin roth. Nur an den Metatarsophalangeal-Verbindungen färben sie sich nicht, sondern bewahren ihren Charakter als Zwischenscheiben (Fig. 6) zusammengesetzt aus kleinsten cellulären Elementen, welche ohne Tinction oder unter Hämatoxilin-Färbung ganz licht und blass bleiben und Metatarsus und Phalanx als ein continuirliches Glied erscheinen lassen. In Fig. 6 erscheint das vordere Ende des Metatarsus IV. knopfförmig. Die erste Phalanx ist aber nach der Planta hin

gekrümmt und erhält man desshalb nicht immer das ganze Glied in einen Schnitt. Dass sie hier an der vierten Zehe auch schon angelegt ist und die Kopfform des Metatarsenendes nur durch die im Schrägschnitt getroffene Scheibe vorgetäuscht wird, wird unter Berücksichtigung des ergänzenden zunächst plantarwärts folgenden Schnittes, aus dem die Figur 7 entnommen ist, klar.

Im Bezug auf die Differenzirung zu Knorpelgewebe gilt das von der oberen Extremität berichtete.

Muskelgewebe sieht man nur in der Umgebung von Ober- und Unterschenkel in Entwicklung, nirgend jedoch Einscheidungen, Ligamente, Gelenkkapseln oder Sehnen. Nur das Lig. patellare inf. ist durch Anwesenheit langgestreckter und längsgerichteter Zellen gekennzeichnet.

Weitere Gestaltung der Gelenke der Finger.

Die nächsten untersuchten Stadien gehörten dem Ende des zweiten Monats an, Embryonen von $3^3/_4$ bis $4^1/_4$ Ctm. Kopf-Rumpflänge, Oberarm 6 Mm., Vorderarm und Hand zusammen 8 Mm. lang. Der Vorderarm ist schon länger als die Hand und hat somit diese im Wachsthum eingeholt. Der Radius besitzt eine Länge von $4^1/_2$, die Hand eine Länge von $3^1/_2$ Mm. Der Vorderarm ist in der Mitte durchtrennt worden und das abgelöste Stück in Dorsovolarschnitten, wobei der Mittelfinger zur Einstellung diente, zerlegt worden. An anderen Präparaten ist dann auch für jeden Finger mehr weniger speciell die Einstellung geändert worden, um für jeden Finger Dorsovolarschnitte zu erhalten.

In verhältnissmässig kurzer Zeit, denn man kann diese Embryonen auf die siebente und achte Woche schätzen, ist die Entwickelung bedeutend vorgeschritten.

1. Sind alle Skelettheile angelegt. Alle Phalangen sind vorhanden und mehr weniger ihrer späteren Form ähnlich. Nur sind die Finger stark nach der Volarseite gekrümmt und zwar nicht allein in Folge von Flexionsstellung oder, wie später gezeigt werden wird, auch nicht allein in Folge eigenartiger Form der Verbindungen, sondern auch in Folge von entsprechenden Krümmungen der Skelettheile selbst. Am auffallendsten ist dieses an allen Metacarpen und ersten Phalangen,

insbesondere denen des vierten und fünften Fingers. Sie sind krumm und zwar convex zur Dorsalseite. (Fig. 9, 10 und 11.)

In ihren Längen- und Formverhältnissen variiren auch die Endphalangen. Sie sind immer länger oder mindestens ebenso lang als die zweite Phalange und haben die verschiedensten Formen. Am gleichartigsten noch an den drei mittleren Fingern. Hier stellen sie immer cylindrische Körper vor, deren peripheres Ende kugelig ist (Fig. 11). Am Daumen jedoch sind sie zur Peripherie meist kolbig (Fig. 12), an dem fünften Finger gewöhnlich zur Peripherie kegelförmig zugespitzt (Fig. 10a). Die Schafttheile der übrigen Phalangen entsprechen bis auf die beregte Krümmung ihrer späteren Form. Man beobachtet wohl auch hie und da ungewöhnliche Linien, so namentlich an der zweiten Phalanx und auch an der ersten Einbiegungen, Einkerbungen, namentlich auf der Dorsalseite, dicht vor der letzten Interphalangealverbindung, so dass man sie schon zu den formbildenden Vorgängen an den Gelenkkörpern rechnen könnte (Fig. 10a und 11). Man sieht solche sogar circulär werden, so dass man an eine Umschnürung denken möchte, durch welche die Phalange einem umgestülpten Rheinweinglas mit breitem und zur Peripherie sehenden Fuss ähnlich geworden ist (Fig. 13). Immerhin gehören aber solche Formen zu den Seltenheiten, nicht zur Regel.

2. Die histologische Differenzirung zu Knorpelgewebe ist überall vollzogen, ja Verkalkungen, als Vorläufer der Verknöcherung, haben schon begonnen. Jedes Glied, mit Einschluss der Endphalangen, besteht aus Knorpelgewebe, in jedem findet sich ebenso, wie oben für Humerus, Radius und Ulna beschrieben, central der grosszelligste und an Intercellularsubstanz reichste Knorpel. Nur die Glieder der Handwurzel sind darin noch zurückgeblieben. Sie besitzen zwar central ihren Kern mit grossen Knorpelzellen und breiter Intercellularsubstanz, nach beiden Richtungen hin sind aber die Metacarpen und Phalangen weiter vorgeschritten. Diese besitzen im Centrum grosszellige Knorpel, wie es im früheren Stadium nur in den Anlagen der grossen Röhrenknochen zu sehen war. Graduelle Unterschiede bestehen übrigens auch jetzt noch. In Metacarpus und erster Phalanx — das Bild des Radius aus den früheren Stadien. In der zweiten Phalanx auch Zunehmen der Intercel-

lularsubstanz und Vergrösserung der Zellkörper im Centrum, aber nicht so hochgradig, als in der ersten Phalanx, in den Endphalangen schliesslich — dieselbe Entwickelungsstufe, wie in Phalanx I., die grössten Knorpelzellen nun nicht im Centrum, sondern am vorderen Ende des Gliedes. Für die Metacarpen und beiden ersten Phalangenreihen gilt aber das oben gesagte. An ihnen geht die Verbreiterung der Grundsubstanz und die Vergrösserung der Knorpelzellen vom Centrum des Gliedes aus. Im Centrum ist die Intercellularsubstanz am breitesten, im Centrum sind die Knorpelzellen am grössten.

Die Verkalkungen schreiten nicht, wie bisher angenommen, vom Rumpf zur Peripherie vor, sondern springen vom Vorderarm auf die Endphalangen über. In den Endphalangen sieht man sie schon gegen das Ende des zweiten Monats, während sie im Schaft des Metacarpus erst im dritten Monat auftreten. Im selben Monat, nur gegen Ende desselben, beginnen sie in der ersten Phalanx und zwar vom Dorsum her (Fig. 16), um im vierten Monat schon durch die ganze Dicke derselben vorgefunden zu werden. Im fünften Monat endlich ist in allen Phalangen, theils Verkalkung, theils schon Ossification nachweislich.

In dem hier vorliegenden Stadium sind an der oberen Extremität Verkalkungsheerde nur im Humerus, Radius, Ulna und Endphalangen vorhanden, sonst in keinem Gliede der Hand.

Neu ist auch die Form, in welcher die Verkalkung an den Endphalangen stattfindet. Stadien, in denen die Endphalangen vorhanden und noch nicht verkalkt waren, liegen uns nur in jener Serie von Flächenschnitten vor, über die in der Folge berichtet werden wird, — wir wissen daher nicht genau, wie dieselbe in ihrer knorpeligen Anlage kurz vor der Verkalkung aussieht. In ihrer Verkalkung bietet sie jedoch folgende Verhältnisse. Auf Dorsovolarschnitten erhält man Bilder, in denen die Endphalangen genau der Hälfte eines verkalkten Metacarpus späterer Stadien entspricht. Denkt man sich den Metacarpus in der Mitte eines Verkalkungsheerdes durch eine nach vorn convexe Schnittebene getheilt, so hat man in der zum Rumpf gelegenen Hälfte das Bild der Endphalange. Anders auf dem Flächenschnitt. Hier gleicht der Verkalkungsheerd dem Durchschnitt eines Pilzes, dessen Teller besonders breit am Daumen und Kleinfinger ist

(Fig. 10). Die Verkalkungszone überragt also in zur Peripherie convexer Abrundung die Seitenflächen der Phalange, in deren Schaft sie sich selbst noch bis zu einem gewissen Grade fortsetzt. — Unterscheidet man in dem Flächenschnitt Basis, Schaft und Kopf der Endphalange, so hat der Kopf dieselbe Breite der Basis. Ersterer und ein kurzer peripherer Theil des Schafts ist verkalkt. Der verkalkte Bezirk gibt das Bild eines verticalen Pilzdurchschnittes. So aber nur ein Flächenschnitt; in der Dorsovolarebene fehlt die Scheidung in Kopf und Schaft, fehlt das Ueberragen der Verkalkungszone über den Seitenrand des Schafts.

Die pilzförmigen Verkalkungsheerde sind noch im sechsten Monat vorhanden (Fig. 17 und 21). Die Ossification in denselben erreicht aber, wenigstens bis in diese Zeitperiode, nicht die Grenzen des verkalkten Gewebes. Innerhalb desselben sieht man auf Flächenschnitten Knochengewebe und zwar in der Form der späteren Phalanx.

3. Alle Muskeln sind, soweit controllirbar, mit ihren Ursprüngen und Sehneninsertionen vorhanden. Der Flexor sublimis und profundus, der Extensor digg. communis. Auch lumbricales und interossei zeigten sich, liessen sich jedoch bei der Schrägrichtung ihres Verlaufs zur Axe der Finger schwer verfolgen. An welchen Punkten des Dorsums der Endphalangen die Extensoren sich inseriren, lässt sich nicht bestimmen; sicher inseriren sich aber die Flexoren nicht am basalen Theil der Endphalanx, sondern fast in der Mitte ihrer Volarseite (Fig. 9 und 11).

4. Die Enden der Skelettheile haben sich schärfer gegeneinander abgegrenzt und ihre gegen einander gekehrten Flächen Formen angenommen, welche sich bis zu einem gewissen Grade bestimmen lassen.

Von Gelenken lässt sich freilich noch nicht reden. Wohlgesonderte, mit glatten Knorpelflächen an einander gleitende Gelenkkörper fehlen. Das eine Gliedende geht in das andere continuirlich über, nicht continuirlich im Sinne gleichen Gewebes, aber wohl continuirlich, sofern zwischen ihnen eine Zone kleinzelligen Gewebes liegt, welche sich weder von dem einen

noch von dem anderen Skeletende in toto abheben lässt. Je zwei Glieder sind durch eine solche Zwischenzone geweblich mit einander verbunden; löst man auch alle die Verbindung umgebenden Weichtheile, die Glieder fallen nicht auseinander.

Diese Zwischenzone entspricht in ihrer Lage der gelben Scheibe des früheren Stadiums. Sie zeigt sich ihr auch noch verwandt durch die Kleinheit ihrer Zellen, durch den Mangel an Intercellularsubstanz; aber auch nur hiedurch. In ihrer chemischen Reaction und ihrer Form weicht sie von dem Verhalten der beregten Scheibe ab.

Die Scheibe blieb unter Hämatoxilin-Tinction ungefärbt; die Zellen unserer Zwischenzone färben sich tief blau. Die Scheibe nahm zwischen den Skeletenden einen nicht unbedeutenden Raum ein (Fig. 4). Die Zone (Fig. 9) occupirt nur einen ganz geringen Abschnitt. Die Scheibe ist also dick und die Zwischenzone dünn. Die Scheibe sprang über die Peripherie der Phalanx vor; die Zone findet in ihr ihre Grenze. Sie reicht soweit, als die einander zugewandten idealen Flächen der Skeletverbindung. Zeigen diese auf dem Durchschnitt winklige Begrenzung gegen die Langseite des Gliedes, so endet die Zone auch in dem Scheitel des Winkels. Sie setzt sich wohl in die kleinzellige Umhüllung des Skelettheils fort, gerade ebenso, wie im früheren Stadium die rothen Streifen zwischen den Metacarpocarpal- und den höher oben gelegenen Verbindungen in die Umrandungen der die zukünftigen Gelenkkörper tragenden Skeletstücke, nie jedoch überragt sie als selbstständiges Organ die Peripherie.

Von Zellenanordnungen, welche auf die Entwicklung einer Gelenkkapsel hinweisen könnten, keine Spur.

Also weder getrennt glatte Knorpelkörper, noch eine sie umschliessende Kapsel. Von Gelenken in anatomischem Sinne noch keine Rede — und doch finden sich schon Andeutungen von Kopf und Pfanne.

Wir sagten: die Formen lassen sich schon bis zu einem gewissen Grade bestimmen. Desshalb waltet in ihnen jedoch noch keine Regelmässigkeit vor. Die grösste Unregelmässigkeit in der Form der Oberflächen, auf Durchschnitten im Verlauf ihrer Begrenzungslinien ist das charakteristische dieses Stadiums. Waren

in früheren Stadien die Differenzirungslinien so wenig scharf, dass nur von Unbestimmtheit der Formen gesprochen werden durfte, so sind die Formen hier schon bestimmbar, jedoch nicht für jedes Glied, für jede Verbindung dieselben. Es herrscht darin die grösste Unregelmässigkeit. Es gibt nicht zwei Finger, an denen entsprechende Verbindungen gleiche Formen der zusammentreffenden Phalangenenden bieten (Fig. 11, I. Interphalangealverbindung). Hier ist die Gelenklinie eine gerade, dort eine nach vorn convexe (Fig. 9), entsprechend der späteren Krümmung, dann aber an der gleichnamigen Verbindung eines Fingers derselben Hand gerade umgekehrt zur Peripherie concav, ja an dem einen Skeletende convex zur Peripherie, an der anderen zur selben Verbindung gehörenden Verbindung convex zum Rumpf, so dass sich Convexitäten entgegensehen (Fig. 9, Metacarpophalangealgelenk), an einem fünften endlich verläuft die Gelenklinie in doppelter Krümmung, in einer Schlangenlinie (Fig. 11, II. Interphalangealgelenk, oder Fig. 9, Metacarpocarpalgelenk). Kurz, die grösste Mannigfaltigkeit der Form sich berührender Skeletenden charakterisirt dieses Stadium. Nur nach wenigen Seiten ist ihnen allen etwas gemein, zeigen sie alle eine gewisse Gleichartigkeit, sofern in dem Einhalten bestimmter auch noch so weit gezogener Grenzen, über die ihre Mannigfaltigkeit nicht herausschreitet, von einer solchen gesprochen werden darf. Wir können sie in folgende Punkte zusammenfassen:

a) Es finden sich nie Krümmungen, welche auch nur annähernd gleichen Radius mit den Krümmungen der ausgewachsenen Glieder haben. Die Krümmung ist immer noch schwächer, ihr Radius grösser als beim Erwachsenen, natürlich verhältnissmässig zur ganzen bereits erreichten Grösse der Glieder. Auch die stärkste Krümmung hat noch einen Radius von so bedeutender Länge, wie er beim Erwachsenen nie angetroffen wird. Und dazu

b) die Bogenspannung. Sie verhält sich umgekehrt zur Radiuslänge. Beim Erwachsenen ist der Radius kurz, die Bogenspannung gross, hier der Radius lang, die Bogenspannung klein. Und diese Verhältnisse an den einander zugekehrten Skeletenden die gleichen; denn das ist

c) auch allen Skeletverbindungen dieses Stadiums gemein: die Krümmung der basalen Endfläche hat mit der Krümmung der mit ihr die Verbindung eingehenden Kopffläche der Phalange die gleiche Bogenspannung. Wir haben also nicht das Bild des Gelenkkopfs mit grosser Bogenspannung, der Gelenkpfanne mit kleiner Bogenspannung, woraus beim fertigen Gelenk der Spielraum der Bewegung resultirt, — es sind eben Verbindungen, die mit denen am Erwachsenen verglichen, nur als reine Amphiarthrosen bezeichnet werden können. Was späterhin Kopf und Pfanne wird, hat, wo Krümmungen vorhanden sind, gleichgrosse Krümmungs-Radien und -Bögen.

So die Construction, zu der man durch Dorsovolarschnitte geführt wird. Für die Flächenschnitte gilt nach allen Seiten hin dasselbe, nur nicht mit derselben Ausnahmslosigkeit für die basalen Theile der Endphalangen. Hier erhält man hie und da Bilder, in denen der basale Theil den Kopftheil der zweiten Phalange überragte.

Eine gewisse, durch dieses Stadium ziehende Uebereinstimmung lässt sich endlich noch

d) in Folgendem finden:

einander zugekehrte Convexitäten der basalen und Kopftheile finden wir am häufigsten in den Metacarpophalangeal-Verbindungen,

ebene Begrenzungsflächen am häufigsten in der ersten Interphalangealverbindung,

sich deckende Concavitäten und Convexitäten am häufigsten im letzten Interphalangealgelenk.

Wir schliessen daraus: am vorgeschrittensten ist die Entwickelung in der letzten Interphalangealverbindung, es folgt die Metacarpophalangealverbindung und endlich als unentwickeltste die erste Interphalangealverbindung.

Sollen wir der einzigen, in unseren Untersuchungen von der Hand noch genau verfolgten Skeletverbindung hier gedenken, so müssen wir über die Regelmässigkeit in der Form der Carpalverbindung des Metacarpus III. berichten. Diese Verbindung des wohlcharakterisirten Capitatum und Metacarpus III. zeigte in den früheren Stadien auf Dorsovolarschnitten eine gerade Begrenzungslinie. Bei Foeten des jetzt untersuchten Stadiums

ist die Linie constant gekrümmt und zwar doppeltgekrümmt. Die dorsale Hälfte der Begrenzungslinie ist convex zur Peripherie, die volare Hälfte convex zum Rumpf. Beide Krümmungen geben vereinigt die Linie des lateinischen S (Fig. 9). In dieser Verbindung finden sich übrigens auch schon Zellenstrata, welche aus ihrer Anordnung die in Entwicklung begriffenen Kapsel erscheinen lassen. Bis hieher hielten sich Breiten- und Dicken-Durchmesser der Metacarpen und Phalangen so ziemlich die Wage. Von der Dorsal- zur Volarseite und von der Ulnar- zur Radialseite halten sie gleiche Masse. Mit den nächsten Stadien bei nur wenige Wochen älteren Foeten aus dem Anfang des dritten Monats wird dieses anders.

Der Breitendurchmesser nimmt zu (radio-ulnar). In Fig. 15 ist der Flächenschnitt eines solchen Stadiums gegeben. Auffallender Weise sind hier noch gar keine Verkalkungen eingetreten, weder in den Phalangen, noch in den Metacarpen. Es ist das einzige Präparat, in welchem wir sie bei im Uebrigen so vorgeschrittener Entwickelung vermissen mussten. In Bezug auf die Endphalangen muss hinzugefügt werden, dass sie nicht in ihrer ganzen Länge vorliegen. Da die Finger gekrümmt waren, konnten immer nur Theilstücke derselben in den Schnitt fallen. In Schnitten der Vola zunächst hatte man schliesslich nur die Spitzen der Endphalangen, von dem übrigen Theil der Vorderhand Nichts.

Die Phalangen werden also zunächst am Anfang des dritten Monats breiter.

Es treten Andeutungen der Kapsel auf (Fig. 12). Fehlen auch noch faserige Elemente, so gehen doch vom basalen der einen, zum Kopftheil der anderen Phalange bestimmt geordnete Zellenreihen, die der zukünftigen Kapsel entsprechen.

Die Form der Skeletenden betritt eine Stufe, welche an die Entwickelung von regelmässig gebildeten Gelenkkörpern denken lässt. Stehen am Daumen auch noch gekrümmte Linien mit ihren Convexitäten einander gegenüber, so zeigen doch die Interphalangealverbindungen der vierten und fünften Finger schon die geringe radio-ulnare, zum Rumpf convexe Krümmung.

Doch der wesentlichste Fortschritt liegt in dem veränderten Verhalten der Zwischenzone. Diese war bisher immer gleich dick in ihrer ganzen Ausdehnung, von der radialen zur ulnaren und von der volaren zur dorsalen Seite. Hier sehen wir sie aber in der Axe des Fingers dünner, zur Circumferenz desselben dicker werden und ein Continuum bilden mit dem, von den längsgerichteten Zellkörpern der Kapselanlage umschlossenen kleinzelligen Gewebe (Fig. 15). Sie steht auch nicht mehr in so allmäligem Uebergange der Gewebsformen, wie früher mit dem Knorpelgewebe der nächstliegenden Skeletenden in geweblicher Continuität, sondern ist durch rothtingirte Zellensäume, welche den Skeletenden angehören und sich in's Perichondrium fortsetzen, gegen diese abgegrenzt. Ihr eigenes kleinzelliges Gewebe färbt sich nur wenig. Von dieser Zone, welche wir uns also gewissermassen biconcav denken können, finden wir an späteren Stadien nur noch einen Theil vor, nemlich den ihrer äusseren Peripherie, speziell den dorsalen und volaren Theil. Der in der Fingeraxe liegende Theil ist nicht mehr vorhanden und auf Dorsovolarschnitten, welche durch die Fingeraxe gehen, ragt daher vom Dorsum, wie von der Vola ein dreieckiges Stück weichen Zellgewebes in die Verbindung hinein, welche von hier ab nun auch wirklich Gelenk genannt werden kann. In Folge des Auseinanderweichens der Zone, gewissermassen durch das centrale Fenster derselben, berühren sich nun Knorpel und Knorpel, und ist derselbe auch embryonaler Natur, sind die dichtgedrängten vielgestaltigen Zellen in nur spärliche hyaline Intercellularsubstanz eingebettet — wo sie an die Oberfläche von Basis oder Kopf gelangen, haben sie sich abgeplattet und erscheinen auf dem Schnitt als quergestellte Streifen, zwischen welchen sich von der Dorsal- und Volarseite her die Residuen der früheren Zwischenzone hineinschieben und als Synovialfalten durchs weitere Leben persistiren. In Fig. 16 ist ein solcher Dorsovolarschnitt abgebildet. Es ist der vierte Finger eines Embryo aus dem Ende des III. Monats. Die Genese der Synovialfalten aus der Zwischenzone und die innige gewebliche Beziehung, die dieselbe in früheren Entwicklungsphasen zu den zugehörigen Knorpeln haben, ist auch im vierten und fünften Monate noch angedeutet. In dieser Periode findet man nämlich gewöhnlich nur die auf dem Kopf

der Phalangen anliegende Oberfläche der sogenannten Synovialfalte von dem Knorpel des Gelenkkopfs in scharfen Linien geschieden. Gewebliche Continuität besteht nach dieser Seite nicht. Mit der Circumferenz der Basis, mit peripheren Theilen ihrer Pfanne ist die Synovialfalte continuirlich; so weit sie ins Gelenk vorspringt, so weit ist sie mit den Pfannen geweblich eins. Eine Lostrennung von denselben hat noch nicht stattgefunden. Sie diente gewissermassen zur Vergrösserung der Pfanne sowohl, wie zur Verstärkung ihrer Krümmung. Indem sie den Rand der Pfanne bildet, vergrössert sie die Flächenausdehnung derselben; indem sie den Radius der Krümmung kleiner werden lässt, macht sie die Pfanne dem Kopf congruent.

Erst mit dem sechsten Monat hat sich dieser Rest der Zwischenzone auch von der Phalangenbasis gelöst und ragt auf Durchschnitten, dorsovolaren wie Flächenschnitten, von beiden Seiten her als scharfgezeichnetes und zu den Gelenkknorpeln discontinuirliches Dreieck, mit der Grundfläche der Gelenkkapsel aufsitzend in den Gelenkraum.

Man kann auch bei sechsmonatlichen Embryonen noch Bilder erhalten, in denen ein weiches Synovialgewebe zwischen den Gelenkflächen durchgeht. Dieses hat dann aber nie gewebliche Continuität mit den Gelenkknorpeln, denen es aufliegt, und zweitens verliert es sich stets zur Axe des Fingers. Nur an Randschnitten erhält man solche Bilder. Fig. 23, 24 und 25 sind aufeinanderfolgende Glieder einer Schnittreihe, in welche das Metacarpophalangealgelenk des vierten Fingers von einem sechsmonatlichen Foetus in Flächenschnitten zerlegt worden ist. Fig. 23 der am meisten dorsal, Fig. 25 der am meisten axial gelegene Schnitt unter den dreien.

In Fig. 23 geht das Synovialgewebe als breites Band (*a*) durch das ganze Gelenk. In dem folgenden Schnitt, Fig. 24, ist es in der Mitte der Gelenkkörper nur noch ein Faden, der zu beiden Seiten in die dreieckigen Körper, die in der Kapsel wurzelnden Zacken ausfliesst, und endlich in Fig. 25, dem der Längsaxe des Fingers noch näheren Schnitt, finden sich nur die beiden kleinen von der Kapsel ins Gelenk hineinragenden Zacken — der Ausdruck der Synovialfalte, die, wenn in weniger axial gelegenen Schnitten getroffen, continuirlich (vgl. Fig. 23 und 24)

erscheinen muss. Der Oberfläche des Gelenkknorpels geht Ende des dritten Monates freilich noch die volle Glätte ab, aber an den Fingern von Foeten aus dem vierten Monat hat auch diese schon einen Grad erreicht, welcher der späteren Vollkommenheit nur wenig nachsteht und im sechsten Monate den Vergleich mit jedem Gelenkknorpel eines Erwachsenen aushält. In diesem letzteren Stadium weichen auch sich berührende Gelenkknorpel im Schnitt schon auf leichtesten Druck auseinander. An Schnitten aus dem dritten Monat aber muss noch kräftig auf das Deckgläschen zugedrückt werden, und erst, nachdem die periarticulären Weichtheile zerdrückt sind, gehen die Gelenkknorpel auseinander und lassen bei stärkerer Vergrösserung immer abgetrennte und in's Gelenkcavum hineinragende Zellkörper sehen. In späteren Stadien geschieht dieses nie. So sehr man auch andrücken mag, die Zellen der Knorpeloberfläche sind so fix zu einander gestellt, dass auch bei Vergrösserung von System VII, Ocular III Hartnack ihre Krümmungslinie ohne Unebenheiten verläuft.

Um das Ende des dritten Monats ist also erst das Finger-Gelenk in seinen roh anatomischen Charakteren nachweislich. Die Vollkommenheit der Construction, die wir beim Erwachsenen kennen, ist jedoch noch lange nicht erreicht, seine Leistungsfähigkeit eine noch sehr geringe. Das Verhältniss von Kopf und Pfanne, wenn dasselbe jetzt auch an jedem Gelenk deutlich ausgesprochen ist, bedarf immerhin noch grosser Wandlungen, um den Formen nahe zu kommen, welche für Neugeborene und Erwachsene typisch sind.

An den Phalangenenden aus dem Ende des dritten Monats (Fig. 15) fiel schon die Krümmung von rechts nach links auf. Vergleicht man dieselbe mit den dorsovolaren Krümmungen, welche die Phalangen aus dem Ende des zweiten Monats (Fig. 9 und 11) zeigen, so ist der Unterschied in dem Grade ihrer Entwicklung eclatant. Die Ausbildung dieser beiden Krümmungen, der dorsovolaren und der von rechts nach links, hält nun auch weiterhin nicht gleichen Schritt. Mit dem Ende des dritten Monates hat die letztere an beiden Interphalangealgelenken schon die Form erreicht, welche durch das ganze weitere Leben typisch bleibt. Sie dehnt sich wol nach dem Dorsum und der Vola, radial und ulnarwärts noch bedeutend aus, der sie bezeichnende Bogen

wird mit jedem Monat grösser, bewahrt aber immer zu dem aus dem dritten Monat geometrische Aehnlichkeit. Fig. 17 gibt den Flächenschnitt eines dritten Fingers aus dem Ende des dritten Monats. Vergleicht man dessen Gelenklinie mit denen auf Fig. 21, dem Flächenschnitt eines dritten Fingers aus dem vierten Monat und mit eben solchen Schnitten von Neugeborenen und Erwachsenen, so ist der Parallelismus, die geometrische Aehnlichkeit derselben leicht festzustellen. (In Fig. 21 hat der Schnitt nur das zweite Interphalangealgelenk axial getroffen; für das erste Interphalangealgelenk ist er etwas dorsalwärts abgewichen und erklärt sich daraus die stärkere Krümmungslinie, ihr doppelt geschwungener Verlauf.)

Die Krümmung von rechts nach links auf den Gelenkkörpern der Phalangen, hat also mit Ende des dritten Monats ihre typische Form erreicht.

Viel langsamer gewinnt die dorsovolare Krümmung die Ausbildung, welche die Gelenke zu den von ihnen geforderten Leistungen geschickt macht.

Sehen wir uns zunächst die basalen Gelenkflächen und zwar der zweiten Phalanx an, weil, wie aus Fig. 9 und 11 erhellt, das Gelenk, dem dieser Körper angehört, am spätesten seine Formentwicklung eingeht.

Am Ende des II. Monats (Fig. 10, 10a und 11) ist von einer Krümmung noch keine Spur. Die Basis hat mit dem anschliessenden Kopf der ersten Phalanx gleiche Dicke. Ende des dritten Monats (Fig. 16) übertrifft sie im Dickendurchmesser den Kopf und ist mit grossem Radius gekrümmt, im vierten Monat (Fig. 19) wird die Krümmung schon stärker. Dieselbe nimmt auch im fünften Monate (Fig. 20) zu, aber in so kleinen Werthen, dass noch im sechsten Monat (Fig. 22) die Krümmung noch lange nicht der des Erwachsenen (Fig. 27) ähnlich ist.

Diese Krümmungen an den Basen sind nun durchweg reine Kreisabschnitte. Jede Krümmung ist der Bogen eines bestimmten, für ihre ganze Ausdehnung sich gleichbleibenden Radius.

Regelmässige Krümmungen, wie die eben beschriebenen, scheinen die Köpfe dieses Gelenks nur sehr vorübergehend zu besitzen. Convexitäten, welche genau einer Bogenkrümmung angehören, haben wir nur an den Köpfen der ersten Phalanx

vom fünften Finger (Fig. 18) aus dem Ende des dritten und Anfang des vierten Monats beobachtet. Concavität der Basis und Convexität des Kopfes sind beide Theile von Kreisen verschiedener Durchmesser; jede hält aber genau die Bahnlinie des Kreises, der sie bestimmt, ein. Dazu bewahrt der Kopf diese Krümmung durch seine ganze Breite. Er wird also durch den Theil eines Cylindermantels beschrieben, dessen Axe genau quer zur Längsaxe des Fingers steht. Diese Form des Gelenkkopfs haben wir aber nur an den fünften Fingern aus den bezeichneten frühen Stadien constatiren können. Schon an den gleichnamigen Gelenken derselben Hand, nur der grösseren, in der Entwicklung weiter vorgeschrittenen Finger, nehmen die Köpfe andere Formen an, zeigen auf Dorsovolarschnitten andersartige Krümmungslinien, und zwar verschiedene, je nachdem die Schnitte in die Axe des Fingers oder lateral, ulnar oder radial gefallen sind.

Auf axialen Schnitten erhält man Krümmungslinien, welche sich aus drei Bogen zusammensetzen. Der mittlere ist der grösste und besitzt den grössten Radius. Er entspricht der einfachen Krümmung des Phalangenkopfes des fünften Fingers, wie der ebenso einfachen Krümmung der contingirenden Pfanne. Dorsal und volar schliessen sich in allmälichem Uebergang die beiden anderen Bogen an, beide von fast gleichen Radien und gleicher Spannung. Ihr Radius ist kürzer als der des mittleren Krümmungsabschnittes. Die einzelnen Bogenwerthe zusammenaddirt, würden eine Gradzahl von 180 geben. Da nun die Radien in ihrer Grösse auch nicht in grossen Zahlen differiren, kann man die Krümmung als eine ungefähr halbkreisförmige bezeichnen und mit Rücksicht auf ihre Lage zur Axe der Phalanx sagen, dass sie dorsal und volar mit gleich grossen Abschnitten übergreift. Ähnlich verhält es sich auch noch im sechsten Monat, nur dass die drei Krümmungsabschnitte sich weniger unterscheiden, weil die dorsalen und volaren grössere Radien angenommen haben, welche aber immerhin noch kleiner sind, als der Radius des mittleren Abschnittes.

Nach dieser Seite hin findet nun die eine sehr wesentliche Umwandlung bis zur Geburt statt. Die drei Krümmungsabschnitte nähern sich nämlich in ihrer Radiengrösse immer mehr, bis sie beim Neugeborenen (Fig. 26) alle drei zusammen dem Bogen

eines Kreises entsprechen und in dieser Form sich durchs ganze Leben erhalten.

Die andere wichtige Wandlung zieht sich durch das ganze Leben und hängt für die nachgeburtlichen Perioden von der Richtung und Weite der Excursionen, welchen das Gelenk unterworfen wird, ab. Wir meinen das Lageverhältniss der Krümmung zum Phalangenschaft.

Im sechsten Monat umgreift die Krümmung die dorsale und volare Seite mit gleichen Antheilen. Beim Neugeborenen (Fig. 26) jedoch ist sie soweit auf die volare Seite gerückt, dass nur ein ganz kleiner Antheil auf die dorsalen und gleich grosse Theile, fast die Hälften der ganzen Krümmung auf die vordere und volare Fläche der Phalanx kommen.

Nach der Geburt, mit den häufigeren Streckbewegungen, welche, wie die Kürze der Flexoren-Muskeln beweist, wohl wenig geübt sein möchten, nimmt der Spielraum des Gelenks (Fig. 27) nach der Dorsalseite zu und zwar in dem Masse, als Streckbewegungen geübt werden. An Daumengliedern, welche dorsal, wie volar gleich weit flectirt werden können, ist die Krümmung dann auch auf beide Seiten gleich weit ausgedehnt. Zur Norm gehört aber ein stärkeres Überwiegen nach der volaren Seite (Fig. 27).

Die Schnitte, in denen diese Verhältnisse illustrirt sind, gehören der Mittelaxe des Fingers an, also Theilen des Gelenks, denen dorsal wie volar die Streck- und Beugesehnen aufliegen.

Auf lateralen Schnitten, wo die Sehnen in allmälicher Auflösung in fasciäres Bindegewebe verschwinden, nimmt der dorsale Krümmungstheil stärkere Convexität an und fliesst der volare unter Vergrösserung seines Radius mit dem mittleren Krümmungsabschnitte in einen Bogen zusammen. Fig. 19 gibt einen solchen Lateralschnitt vom vierten Finger derselben Hand, Fig. 22 einen vom dritten Finger aus dem sechsten Monat.

An lateralen Schnitten setzt sich somit die Krümmung aus einem grösseren mehr volaren Bogen, welchem die Pfanne besonders häufig aufliegt, und einem kleinen mehr dorsalen Bogen zusammen. Dieser letztere hat einen kürzeren Radius und wird von dem Extensor digg. comm., als festem Strang, jedenfalls nicht berührt. Die Zweitheiligkeit erhält sich durchs ganze weitere

Leben und nimmt die Krümmung als Ganzes bis zum Abschluss des Wachsthums und parallel zu der Weite der geübten Bewegungen, wie die axiale zu. Mit dieser geht sie auch dieselben Lageveränderungen zum Schaft durch.

Nachdem wir die Entwickelung dieses Gelenks von Stufe zu Stufe verfolgt haben, bedarf es nicht auf die Details der Genese der anderen Fingergelenke einzugehen. Es wiederholt sich eben an dem zweiten Interphalangealgelenk und dem Metacarpophalangealgelenk im Wesentlichen dasselbe hier abgerollte Bild. Ueberall thun sich die Differenzen axialer und lateraler Schnitte kund und überall treten die aus drei Theilen zusammengesetzten Krümmungen der Phalangenköpfe auf. Sie verhalten sich nicht immer genau so zu einander, wie für das erste Interphalangealgelenk eruirt worden, es kann der mittlere Krümmungstheil wie in Fig. 16 am Kopf der zweiten Phalange, und das geschieht nicht selten, sehr klein und der dorsale, wie volare Theil umgekehrt sehr gross sein (Fig. 16 und 20. Kopf 3. II. Phalanx), ja es kann sogar an dem ersten Interphalangealgelenk selbst, im axialen Schnitt (Fig. 20) der dorsale Theil der grössere, der volare die kleineren Krümmungsradien haben, immer aber sieht man an allen Fingergelenken diese Krümmungsdifferenzen im Laufe der Entwicklung schwinden und bis zur Geburt in eine Convexität zusammenfliessen, welche auf axialen Schnitten wenigstens stets Bogen eines Radius angehören.

Weitere Gestaltung des Ellbogengelenkes.

Die frühesten Stadien, in denen wir dieses Gelenk untersucht haben, sind schon oben mit beschrieben. Wir haben zu jener Zeit schon eine Verbindung, welche nach histologischer Seite den Fingergelenken aus dem Ende des zweiten Monats, nach morphologischer Seite schon den Fingergelenken aus dem Ende des dritten Monats entspricht. Von Analogien zu den Scheiben der Fingergelenke (cf. Fig. 4 und 5) ist nichts vorhanden, wohl aber sind die beiden Skeletenden, wie an den Fingern aus dem zweiten Monat in Figur 9 noch in geweblicher Continuität (Fig. 3) durch eine Zone kleinzelligen Gewebes. Diese verschwindet im zweiten Monat vom Centrum der Articulation her (Fig. 28) gerade wie bei den Fingergelenken und

wird Ende des dritten Monats zugleich mit der vollständigen Ablösung der Gelenkkörper von einander und dem Auftreten glatter Gelenkflächen zur circulären Synovialfalte, welche dann eben dieselben Wandlungen, wie an den Fingern (Fig. 23, 24, 25) durchmacht, bis sie sich von den Knorpelflächen vollständig sondert und als ein Theil der Kapsel zwischen den Randtheilen der Gelenkknorpel in das Gelenkcavum hineinragt (Fig. 34). Eine Gelenkkapsel ist ebenso erst mit dem Ende des dritten Monats nachweislich.

Weit mehr, um zwei Monate, ist dieses Gelenk den Fingergelenken in der Entwicklung seiner Formen voraus.

Lässt der zum Radius gehörende Theil des humeralen Gelenkkörpers auch noch viel zu wünschen übrig, so ist doch der ulnare Theil schon Ende des zweiten Monats von vorzüglicher Krümmung (Fig. fl. 33), während wir an den Fingergelenken zu dieser Zeit noch gar keine typischen Formen fanden (Fig. 9 und 11).

Bleiben wir bei dem ulnaren Theil des humeralen Gelenkkörpers und verfolgen wir die Wandlungen desselben an Schnitten, welche die Drehungsaxe der Trochlea unter rechten Winkeln kreuzen und zwar an den Stellen, wo die Krümmungen den kleinsten Durchmesser haben.

Die Krümmung greift in dieser Periode ebenso wie an dem ersten Interphalangeal-Gelenk (Fig. 16) auf die Flexions- und Extensionsseite der Trochlea mit gleichen Antheilen über, entspricht noch lange nicht einem Halbkreise und wird in ihrer ganzen Ausdehnung von der ebenso grossen und mit ihr congruenten Concavität der Ulna umfasst.

Ende des dritten Monats (es berühren sich schon glatte Gelenkknorpel) hat die Spannung der Krümmung zugenommen und zwar mehr nach der Flexionsseite. Sie misst jetzt fast zwei Rechte. Ebensoviel die Concavität der Ulna, welche mit ihrem Proc. coronoideus jedoch noch über die Grenze des glatten Knorpels hinausgeht und an der Flexionsseite des Humerus anstösst (Fig. 35). Auf der Extensionsseite kann daher in dem bis zur Abgangsstelle der Kapsel freiliegenden glatten Gelenkknorpel die Spielweite des Gelenks bestimmt werden. Sie misst nicht mehr als 30° und würden somit Bewegungen vorwiegend nach der Seite der Flexion stattgefunden haben.

Beim sechsmonatlichen Embryo hat die Trochlea schon die Krümmung von $^5/_6$ eines Kreises. Dass aber auch hier noch die Bewegungen vorwiegend nach der Seite der Flexion stattgefunden haben, geht aus der Glätte hervor, welche der Gelenkknorpel auf der Flexionsseite bis zum Abknickungspunkt vom Humerus besitzt, während diese dem Knorpel auf der Extensionsseite fehlt.

Beim Neugebornen hat die Trochlea endlich die schon von Hueter und Römer beschriebene Form. Fovea humeri antica und postica sind wohl schon vorhanden, aber das zwischen ihnen liegende Stück Humerus misst immer noch mindestens $^1/_7$ des Kreisumfanges, dem die Krümmung der Trochlea angehört, bis dann endlich am Erwachsenen bekanntlich auch dieser Abschnitt soweit in die Articulation hineingezogen werden kann, dass die beiden Gruben nur durch eine Membran von einander geschieden werden. Ob das nun von der einen Seite mehr als von der andern geschieht, ist schwer zu entscheiden, wahrscheinlich mehr von der Extensionsseite her.

In den letzten Phasen vor der Geburt scheinen aber, soweit man sich auf das Verhalten der Knorpelglätte stützen darf, beide Seiten der Trochlea in gleichem Grade benutzt worden zu sein.

Es erübrigt, den radialen Theil des humeralen Gelenkkörpers zu besprechen. Wir sahen ihn beim ca. vier Wochen alten Foetus in stärkerer Ausbauchung der Walze gegeben (Fig. 1), so dass auf dem ihre Axe senkrecht kreuzenden Durchschnitt im hinteren Abschnitt das Olecranon, im vorderen der Radius anlagen. Ist hier auch die Krümmung eine regelmässige, so zeigen doch Schnitte von anderen Embryonen, dass im Laufe des zweiten Monats noch allerlei Formen in diesem Theil des Gelenks vorkommen können.

Diese lassen sich wohl dahin zusammenfassen, dass man drei Flächen, drei Krümmungsabschnitte unterscheiden kann. In Figur 29 liegt ein Schnitt von einem Embryo aus dem zweiten Monat vor, demselben Gelenk, dem die Figur 28 entnommen ist. Wir sehen hier den im Winkel zu einander gestellten Krümmungen des Olecranon und Proc. coronoideus entsprechend, dasselbe auf dem humeralen Gelenkkörper und auf diesem für den Radiuskopf eine gerade Begrenzungslinie — also im Ganzen drei Begrenzungs-, drei Gelenklinien.

An einem Embryo aus dem Ende des zweiten Monats sehen wir (Fig. 30) den Humerus mit 2 unter 120° zu einander winklig gestellten mehr weniger geraden Linien die Verbindung mit dem Olecranon und Proc. coronoideus aufnehmen, während für die schwache Concavität des Radiusköpfchens eine congruente Convexität vorhanden ist; endlich an dem rechten Arm desselben Foetus (Fig. 32) ist die Begrenzungslinie zwischen Ulna und Humerus eine continuirlich gekrümmte, setzt sich nur gegen die für den Radius bestimmte Krümmung im Winkel ab.

Ausgiebige Verschiebungen der Gelenkkörper aneinander mögen also hier nicht stattgefunden haben. Denn dieses vorausgesetzt, hätten unter denselben die winkligen Vorsprünge schwinden müssen — das lehrt die Beobachtung jeder Nearthrosenbildung von Erwachsenen. Wie viel eher müssten daher solche Unebenheiten bei der Weichheit embryonalen Zellenknorpels abgeschliffen werden!

Wie bei den Fingergelenken sind auch hier die radio-ulnaren Krümmungen schon weiter vorgeschritten in ihrer Ausbildung. Auf Schnitten, welche parallel zur Ulna, von der Extensionsseite her durch das Gelenk gelegt wurden, ist die Zweitheilung der Walze in für Radius und Ulna gesonderte Köpfe schon vollzogen. In Figur 31 ist dieselbe sichtbar, unterscheidet sich aber von der beim Erwachsenen dadurch, dass je mehr der Schnitt nach der Flexionsseite rückt, um so breiter der mit dem Radius articulirende Theil, um so schmäler der für die Ulna bestimmte Theil wird. Hieraus folgt, dass der Radius auch in diesem Stadium mehr vor der Ulna, als neben derselben liegt, die Incisura sigmodea major mit ihrer Concavität weniger zur Seite, als vielmehr nach vorn sieht.

Controllirt wird diese Deutung noch durch Schnitte, welche die Axe der Trochlea genau im rechten Winkel kreuzen. In die Enden der Queraxe fallen dann nebst den Condylen nur ein oder zwei Schnitte, in denen jederseits der Oberarm mit Ulna oder mit Radius allein vorhanden ist, während die grosse Mehrzahl, ca. 8, der in gleicher Dicke mit den ersteren gefertigten Schnitte beide Vorderarmknochen zugleich zeigt, die Ulna im hinteren, den Radius im vorderen Abschnitte den humeralen Gelenkkörper berührend.

Hierin liegt nun eine weitere Aehnlichkeit mit den Ellbogengelenken vieler ausgewachsener Thiere. Wir machen nur auf das Ellbogengelenk des Hundes aufmerksam, mit dessen Construction genau die unseres Gelenks aus dem Schluss des zweiten Monats übereinstimmt. Bei einigen Affen verhält es sich ebenso. Und diese Aehnlichkeit dehnt sich auch noch auf die Stellung des Ellbogengelenks zum Schultergelenk aus. In demselben Schnitt Figur 32 sieht man, dass der Humeruskopf ebenso wie beim Hunde, seine volle Convexität nach hinten richtet, derselbe also mit einem Schnitt, welcher ihn vom Tuberculum majus her in zwei gleiche Hälften theilt, die Drehungsaxe der Trochlea im rechten Winkel schneidet. Am Erwachsenen aber würde ein so durch den Humeruskopf gelegter Schnitt parallel zur Drehungsaxe des Humerus sein oder sie nur in sehr kleinem Winkel schneiden. Die Orientirung hierin wird auch noch weiter durch die Berücksichtigung des Sulcus intertubercularis und der Bicepssehne erleichtert.

Dass diese Aenderung in der Stellung der beiden Gelenkflächen zu einander von einer Drehung des Humerus in sich selbst und um seine Längsaxe abhängig sein könnte, wird durch den spiraligen Verlauf seiner Kanten beim ausgetragenen Kinde und später wahrscheinlich gemacht. Diese Umformung muss sich aber schon in der ersten Hälfte des intrauterinen Lebens vollziehen.

Das nächste Stadium betrifft Foeten aus dem Ende des dritten Monats und hier ist (Fig. 34) die Eminentia capitata mit dem Radiuskopf schon an die äussere Seite der Trochlea gerückt. Die Knorpel sind glatt, aus der Zwischenzone ist die freie Synovialfalte geworden, und die Unebenheiten der Knorpelflächen sind wenigstens so weit geschwunden, dass sich Winkel, wie in Figur 29 und 30 nicht mehr finden.

Die volle, fast mathematisch kreisförmige Krümmung des Erwachsenen geht dem Durchschnitt der Eminentia capitata noch ab und ebenso die Lage, wie Weite des Spielraums. Die Krümmungslinie kann mit den Schenkeln eines rechten Winkels verglichen werden, dessen Scheitel stark abgestumpft ist und auf dessen in der Flexionsseite liegendem Schenkel der Radius ruht.

Die Spielweite ist auch nicht so gross, wie beim Erwachsenen, noch lange keine 180° und liegt ganz auf der Flexionsseite. Nicht nur, dass der Radius an die vordere Fläche des Humerus anstösst, die Glätte des Gelenkknorpels selbst erstreckt sich bis an die Flexionsseite des Humerus.

Im dritten Monat besitzt die Eminentia capitata schon vollkommene Krümmung; nur an Bogenspannung geht ihr noch einiges ab.

Darüber, nach welcher Seite sich der Spielraum des Gelenks bis zu seiner vollkommenen Weite beim Erwachsenen ausdehnt, ob nach der Flexions- oder Extensionsseite, ist es schwer sich zu entscheiden. Beim Neugebornen misst die Krümmung noch nicht 180°, während sie beim Erwachsenen einige 10° mehr als 180° zählt. Da die Gelenke jedoch während der Mitte des intrauterinen Lebens schon bis an die Flexionsseite des Humerus geht, so würde nach dieser Seite dieselbe durch Auskehlung der Fovea humeri antica gewiss noch nicht genug an Ausdehnung gewinnen. Desshalb mag ebenso wie an der Ulnarseite die Vergrösserung der Gelenkfläche auch hier zum Theil durch Verrücken nach der Extensionsseite des Humerus bedingt sein. Das sogar während des extrauterinen Lebens sich vollziehende Verrücken der ganzen Trochlea mit der Eminentia capitata vor die Längsaxe des Humerus macht eben die Deutung dieser Verhältnisse schwer und gestattet nicht, über dieselben abschliessend zu urtheilen.

Ergebnisse in Bezug auf Entwickelung der Gelenke.

Versuchen wir nun aus diesen Beobachtungen ein zusammenhängendes Bild von dem ganzen Verlaufe der Entstehung eines Gelenkes, wie wir sie ja an den Fingern in allen Stadien vor uns gehabt haben, abzuleiten, so wiederholt sich zuerst die Frage nach der ersten Gliederung. Wir sind nicht in der Lage, von den zwei Vorstellungen, die man bisher darüber gehabt hat: Theilung einer erst einheitlich angelegten Säule in Abschnitte, oder Zusammenkommen von getrennt angelegten Abschnitten als Glieder einer Reihe, eine bestimmte Entscheidung zu geben, die eine auszuschliessen, die andere zur Regel zu erheben. Wir können nur sagen, dass wir nichts gesehen haben, was geeignet

wäre, die erste Annahme zu stützen, dass aber manche unserer Bilder für die zweite zu sprechen scheinen, z. B. die der noch unfertigen Handwurzelelemente, welche als deutlich getrennte Kerne erst anfangen einander allmälig enger zusammenzulegen.

Dagegen können wir einen dritten Modus der Entstehung einer gegliederten Reihe von Skeletabschnitten constatiren, der bisher, so viel uns bekannt, weder vorausgesetzt, noch beobachtet worden ist. Er besteht in dem successiven Aufbau je eines neuen Gliedes hart an dem Ende des vorher fertigen, wie wir ihn an den wachsenden Fingern und Zehen (Tafel I) gefunden haben. Die Phalangen sind der einzige Theil des Skelets, den wir noch so im Werden beobachtet haben. Die Mittelhand- und Mittelfussknorpel sind anfangs allein die langen, einheitlichen, festeren Streifen, welche schon öfter als zuerst in den Anlagen der Hand und des Fusses unterscheidbar beschrieben sind; die Phalangen kommen dann eine nach der anderen dazu. Wenn eines dieser Glieder eine gewisse Länge erreicht hat, wird es durch eine quer daraufgelegte Platte von etwas anders verdichtetem Gewebe abgeschlossen, gleichsam wie mit einer Lage Mörtel überzogen, ehe das folgende Stück darauf gelegt wird. Dieses wächst nun sofort im Anschlusse an die zwischengelegte Scheibe und ist also von vornherein in einer Verbindung mit dem vorhergehenden, die man als eine Syndesmose bezeichnen, oder mit einer solchen jedenfalls sehr wohl vergleichen kann.

Hieraus kann nun unmittelbar ein Gelenk, eine Diarthrose werden, wenn die Zwischenscheibe sich verdünnt und schwindet und so die beiden Skeletabschnitte in unmittelbare Verbindung treten, die dann mit der Zeit zu einer abgeglätteten Berührung bleibend knorpeliger Oberflächen sich gestaltet. Eine solche erste directe Verbindung zweier Glieder bleibt aber vorläufig einer Syndesmose noch sehr ähnlich, insofern ihr das fehlt, was die eigentliche Bedeutung und Function eines Gelenkes ausmacht, indem es die Möglichkeit einer ausgiebigen gleitenden Verschiebung der Contactflächen übereinander und damit der regulären Bewegung bedingt. Es fehlt ihr nämlich nicht nur, was den Modus der Bewegung bestimmt, die ausgesprochene Krümmung der Contactflächen, sondern auch, was den Spielraum der Bewegung ergibt, die Differenz der Grösse der Contactflächen

an beiden in dem Gelenk verbundenen Stücken, also die Gestalt sowohl wie ungleiche Ausdehnung von Kopf und Pfanne. Die sich bildende Diarthrose kann mit einem Worte als eine „Amphiarthrose“, als die niedrigste Form von Ausbildung eines Gelenks bezeichnet werden, von welcher Henle sagt, dass das Charakteristische derselben nicht in der Gestalt der Flächen liegt, die sehr variabel ist, sondern in der geringen Verschiedenheit der Dimensionen, die zwischen beiden Articulationsflächen besteht.

Wir können natürlich nicht behaupten, dass dieser Gang der Entwicklung von der primären Syndesmose zur Amphiarthrose ein allgemein giltiger ist, da wir ihn nur an einer Reihe von einander sehr analogen Gelenken beobachtet haben. Aber das Ergebniss desselben, einen directen Contact von benachbarten Skeletabschnitten mit nicht charakteristisch gebogenen und ziemlich genau gleich grossen Endflächen finden wir öfter und er könnte ja auch ebensogut das Resultat einer jener beiden anderen als möglich angenommenen Entstehungsarten der ersten Gliederung sein, indem die Trennung einer vorher einheitlichen Säule in Glieder wie ein hindurch geführter Schnitt unmittelbar einen solchen Contact der neuen Trennungsflächen ergeben würde, das Entgegenwachsen getrennter Kerne aber, wenn sie sich einander erreichen und aneinander drücken, ebenfalls in einer gegenseitigen Abplattung und Deckung nach der ganzen Breite der Enden ihren vorläufigen Abschluss fände. In jedem Falle können wir also jenes oben definirte Stadium der Amphiarthrose, wie wir es nun kurz nennen wollen, als eine Form ansehen, welche wohl bei jedem Gelenke in den Anfängen seiner Bildung vorkommt, und zum Ausgangspunkte für die weitere Entwicklung nehmen, durch welche nun die eigenthümlichere Gestalt der Gelenke mit deutlich gebogenen und verschieden grossen Articulationsflächen, Köpfen und Pfannen mit dem dadurch bedingten, oder auch sie in der Entstehung bedingenden Mechanismus, hergestellt wird. Wir werden hier zugleich die Grenze statuiren dürfen, bis zu welcher noch kein Einfluss von activen Organen der nachmaligen typischen Bewegungen auf die Mechanik des sich entwickelnden Skeletes zu erkennen ist, während dann, sobald seine Gliederung auch

physiologisch den Charakter der Articulation annimmt, die Wirkung der Muskeln sogleich bestimmend eingreifen wird.

Wenn auch das Gelenk als solches im Stadium der Amphiarthrose, ebenso wie eine Amphiarthrose, so gut wie keine Beweglichkeit hat, noch weniger als eine Syndesmose, an welcher die weiche Schichte zwischen festen Stücken sich comprimiren, dehnen oder torquiren lässt, um so weniger, da auch die gewebliche Trennung beider Glieder des werdenden Gelenkes noch nicht fertig ist, so wird es doch im Gebiete eines sich bildenden Gelenkes, sobald bewegende Kräfte auf dasselbe einwirken, keineswegs an der nöthigen Biegsamkeit der Skeletanlage fehlen, um in mässigem Grade etwas ähnliches wie die spätere typische Bewegung des Gelenks zu Stande kommen zu lassen, weil ja das Material, aus welchem die Skeletanlage selbst zu dieser Zeit besteht, hinreichend weich ist, um abwechselnde Dehnungen und Conpressionen nach der einen oder andern Seite zuzulassen. Dies wird, wenn es sich steigert, die Folge haben, dass namentlich die Ränder der Endflächen, womit zwei Stücke sich berühren, an der Seite, nach welcher eine Biegung derselben gegen einander hin erfolgt, sich stärker eindrücken. Bleibt, wenn der Druck nachlässt, von dieser Eindrückung eine dauernde Impression des Gewebes zurück, so würde sich dieselbe in der Gestalt der Theile bei Ruhelage als ein Klaffen des Contactes an seinem einen oder andern Ende, oder als eine kleine Convexität des einen wie des andern der in dem Gelenk verbundenen Stücke in der Nähe des Randes darstellen. Sollte eine Entstehung der ersten Gliederung durch Entgegenwachsen früher getrennter Kerne vorkommen, so könnten solche convexe Ränder auch in Folge einer nicht durch die ganze Breite zu Stande gekommenen Abplattung des Contactes von vornherein gegeben sein. Das Entscheidende, um auf diesem Wege zu einem Anfange von Bildung der typischen Form des fertigen Gelenks zu gelangen, besteht dann aber darin, dass die Eindrückung gegen den Rand hin an dem einen der beiden Stücke vorwiegend und in der Richtung der typischen Bewegung durch den ganzen Contact hin gleichmässig vertheilt und dadurch die ganze Endfläche des Stückes convex wird, wogegen das andere Stück

vielmehr mit einer Vertiefung seiner Endfläche den Abdruck dieser Convexität ebenfalls bleibend darstellt, und so zunächst das eine Stück des Gegensatzes von Gelenkkopf und Pfanne, ihre einander entsprechende Rundung und Aushöhlung gegeben wird.

Hier wirft sich nun die Frage auf, wodurch es sich entscheidet, dass nicht nur Bewegungen beider Stücke gegen einander in der einen und anderen Richtung und damit Eindrückungen ihrer Contactränder durcheinander einteten, sondern dass hiervon das eine Stück mehr oder anders getroffen wird als das andere und dadurch das eine zum Kopf, das andere zur Pfanne wird. L. Fick hat sich diese Frage auch bereits vorgelegt. Aber während er für die Herstellung einer gerundeten Form überhaupt den beginnenden Eintritt typischer Bewegungen durch die Muskeln von vornherein als Ursache ansah, glaubte er das differente Verhalten beider Skeletabschnitte gegenüber dieser Einwirkung in ihnen selbst suchen zu sollen und nahm als wahrscheinlich an, dass zu der Zeit, wo die Krümmung der Contactfläche sich bildet, der eine der beiden nachmaligen Knochen, welche den Contact bilden, in stärkerem Wachsen begriffen sei und sich in Folge dessen mit seinem Ende als Gelenkkopf gleichsam in den andern hineintreibe. Wir werden dagegen auch hier an ein differentes Verhalten der das Gelenk überspringenden, die Bewegung desselben einleitenden Muskeln zu beiden Stücken denken. Ein solches ist in der fertigen Form und der Hauptsache nach wohl auch in den ersten Anlagen dadurch gegeben, dass die Muskeln mit dem grössten Theile ihrer Länge und mit ihrem ganzen eigentlich functionirenden, das heisst contractilen Theile an dem einen der Skeletabschnitte, welche sie verbinden, anliegen, sich dagegen mit dem anderen gar nicht weit von dem zwischenliegenden Gelenke inseriren. Man kann sich nun leicht vorstellen, wie sie in Folge dessen den Theil, an welchem sie eine Stelle seiner Oberfläche direct in der Nähe des Gelenkes anziehend angreifen, auch directer mit seinem Rande in den anderen hineindrücken, und wie wenn dies abwechselnd nach der einen und andern Seite geschieht, gewissermassen der Skeletabschnitt, welcher die dem Gelenke zunächst liegenden Muskelinsertionen trägt und also von ihnen am unmittelbarsten angefasst wird, über dem anderen, dessen angrenzender Theil

mehr nur zwischen ihnen eingepackt liegt, herum arbeitet und seine Ränder durch Drücken bald auf die eine, bald auf die andere Seite wegarbeitet.

Dies wird um so plausibler, wenn wir nun weiter bedenken, dass es jetzt wohl gleichzeitig oder sehr bald auch mit einer vollen geweblichen Lösung der Contactflächen zu einem Beginn ihrer Verschiebung über einander hin also dem Eintritte der nachherigen eigentlichen Gelenkbewegung kommen muss. Da fragt es sich dann ebenfalls gleich, wenn eine Biegung in der Verbindungsstelle zwischen den zwei Skeletgliedern nach der einen Seite hin erfolgt, welches von ihnen nach dieser Seite hin mit dem Rande seiner Endfläche den des andern überschreitet. Damit wird von selbst der Drehpunkt der Biegung aus der Articulationsfläche, wo er vor dem Eintritte der Flächenverschiebung wie bei einer Syndesmose noch lag, in das eine oder andere der verbundenen Stücke verlegt. Dieses wird damit zum Gelenkkopfe, das andere zur Pfanne, welches, wie dies ja nachher immer geschieht, nach der Seite, wohin das Glied sich biegt, mit dem Rande seiner Endfläche über der des anderen vorrückt. Nun ist es wohl von selbst einleuchtend, dass die Wirkung der Muskeln das Ende des Stückes, an welchem ihre Enden sich zunächst dem Gelenke inseriren, wenn die blosse Niederdrückung desselben gegen das des anderen Stückes nicht mehr weiter geht, eher über den Rand des letzteren nach ihrer Seite hin herüberziehen, als umgekehrt gegen die Mitte des Contactes hineinschieben werden, wie dies geschehen müsste, wenn jenes Stück der Gelenkkopf, das andere die Pfanne werden sollte.

Wir können also aus dieser Betrachtung das hypothetische Gesetz ableiten, dass bei der Bildung eines Gelenkes mit deutlicher Krümmung der Contactflächen aus dem vorhergegangenen Stadium der Syndesmose oder Amphiarthrose die Pfanne auf der Seite gebildet wird, auf welcher die Insertionen der überspringenden Muskeln weniger weit vom Gelenke entfernt sind. Für die Gelenke, welche wir näher untersucht haben, an den Fingern und am Ellbogen ist die Uebereinstimmung mit diesem Gesetze ohne Weiteres einleuchtend. Auch an den meisten anderen scheint es im Ganzen zutreffend.

Am Knie und an der Hüfte finden wir die Insertionen der überspringenden Muskeln überwiegend näher dem Gelenke an dem Knochen, der die Pfanne trägt. Wo es nicht gleich ganz zutrifft, kann dies möglicherweise seinen Grund in einer anfänglich noch anderen Anlage der Muskeln haben. Man könnte sich auch denken, dass bei einem Gelenke auf Grund dieses Gesetzes zuerst nach der einen Seite das eine, nach der andern das andere Stück an seinem Ende convex oder concav werden müsste. Bei fortschreitender Ausbildung würde dann wohl das eine oder das andere allein bestimmend übergreifen. Ein Beispiel davon, wie in Folge geringer Weiterbildung eine solche Form bleibend werden kann, haben wir in der S-förmigen Krümmung des Sagittalschnittes der Verbindung des III. Metacarpus der Hand mit dem Capitatum, wo jenes vorn, dieses hinten convex ist.

Haben wir nun so das eine Stück fertig, welches zur Herausbildung des Gegensatzes von Kopf und Pfanne und damit des bleibenden typischen Mechanismus der Bewegung gehört, die Krümmung der Contactfläche als convexe an dem einen, als concave an dem anderen der Stücke, welche in dem werdenden Gelenke zusammentreten, so gibt sich, wenn wir bereits auch den Eintritt gleitender Verschiebungen der einen von beiden Contactflächen über die andere hin in Rechnung gezogen haben, sogleich auch die Nothwendigkeit, dass das Zweite hinzutritt, was Kopf und Pfanne im fertigen Zustande unterscheidet und was dem Gelenke die Fähigkeit zur ausgiebigen Excursion ohne Aufhebung des festen Schlusses gibt, nämlich die Vergrösserung des Kopfes gegenüber der Pfanne. Denn ohne dieselbe würde die Pfanne, sobald ihre Ränder die des Kopfes überschreiten, in's Bodenlose fallen, wogegen sie auf dem fertigen Kopf, wie bekannt, Raum für den Spielraum der Bewegung findet ohne den Rand zu überschreiten.

Die Ausbreitung des Kopfes, die dazu nöthig ist, können wir uns in erster Linie und in geringem Grade einfach dadurch entstehen denken, dass der Knorpel, welcher seinen Rand trägt, wenn er durch die Pfanne niedergedrückt und die Form des ganzen Kopfes damit convex wird, sich gleichzeitig in die Breite einigermassen ausdehnt und damit die ganze Endfläche selbst an Ausdehnung gewinnen muss. In zweiter Linie kann man sich

aber auch vorstellen, dass diese Hervordrängung seines Randes durch die gleichzeitig über ihn hinweg vorschreitende Pfanne einen Reiz auf die nutritiven Vorgänge in ihm ausübt, der ihn gleichzeitig mit der Abrundung der Ecken, wo die freie Aussenseite mit der Contactfläche am Ende des ganzen knorpeligen Skeletstückes zusammenstossen, zu einem verstärkten Dicken wachsthum anregt und so eine Ausbreitung der Endfläche über die freien Seiten hin zur Folge hat. Dies wäre nicht ohne Analogie mit Vorgängen, die sich unter pathologischen Verhältnissen später im Leben noch an fertigen Gelenken wiederholen, z. B. wenn bei Arthritis deformans die Ränder der Gelenkköpfe ein pilzförmiges Auswachsen zeigen. So können wir uns denken, dass der ursprünglich aus der Gestaltveränderung im Contact einer Art von Amphiarthrose hervorgegangene Gelenkkopf sich allmälig um so viel vergrössert, wie gleichzeitig die mit ihm zugleich und anfänglich gleich gross gebildete Pfanne bei zunehmender gleitender Verschiebung über seine früheren Grenzen hinaus geht. Das wäre, wenn wir es uns weit genug fortgesetzt dächten, etwa das, was wir uns schon früher, wie oben angeführt, aus Analogie der im Leben nachweisbaren Vergrösserungen von Gelenken abstrahirt hatten, eine Vor- oder auch Zurückrückung der Grenzen des Gelenkkopfes, Schritt haltend mit denen des Spielraumes der Bewegung der Pfanne über ihn hin.

Unsere Beobachtungen lehren uns aber, dass ein Zweites hinzu kommt, wodurch in viel ausgiebigerer, und wir können zugleich sagen, etwas gewaltsamerer Weise die bedeutende Vergrösserung des Gelenkkopfes gegenüber der Pfanne, die auf ihn passen und sich auf ihm hin und her bewegen soll, angebahnt wird. Wenn nämlich auf der einen Seite die Contraction der Muskeln die Pfanne über den Rand des Kopfes hinauszieht und zugleich gegen denselben andrückt, so werden gleichzeitig auf der anderen Seite die passiv ausgedehnten bedeckenden Theile des Contactes, also in erster Linie die Sehnen der ihn überspringenden Muskeln, ebenso aber auch die sich bildende Kapsel etc., die sich an der Pfanne inseriren, von ihr nachgezogen, angespannt und gegen den Rand des Gelenkkopfes, den sie jetzt frei lässt, gegen die Kante, welche eben dieser

Rand mit der angrenzenden freien Oberfläche des Skeletabschnittes, der den Gelenkkopf trägt, bildet, angedrückt und bei fortschreitender wie zurückkehrender Bewegung über ihn hin- und hergezogen. Dabei werden sie sich einestheils von der Verbindung mit dem kopftragenden Theile, an dem sie ohnehin in der Nähe nicht gleich fest inserirt sind, noch mehr ablösen, anderntheils wird durch ihr Andrängen und Überhingleiten die Ecke zwischen freier Seite und Contact-Endfläche abgerundet und eine gewölbte Uebergangsfläche an ihre Stelle gesetzt werden, auf Kosten theils der alten aus der Umgestaltung der ersten Amphiarthrose hervorgegangenen convexen Gelenkfläche, des primären Gelenkkopfes wollen wir sagen, theils aber und noch weit mehr wohl auf Kosten der freien Fläche, die mit dem Contacte des Gelenkes vorläufig noch nichts zu thun hat. Sie wird gleichwohl damit nun in den Bereich der Bildung des Gelenkes mit einbezogen, indem sie theils durch Ablösung der deckenden Weichtheile von ihr anatomisch in die Wandung der nachmaligen Synovialhöhle einbezogen, theils durch ihre Abrundung dem primären Gelenkkopfe ähnlich wird und sich unmittelbar anschliesst.

Derselbe erhält dadurch, wenn wir nun diese neuen Accessionen einfach mit zu ihm rechnen, jene oben (S. 246) beschriebene Gestalt, die sich aus drei verschiedenen, noch eckig zusammenstossenden Stücken zusammensetzt (vgl. z. B. Fig. 18, wo die zwei peripherischen Gelenke noch den reinen, kaum über die Pfanne hinaus gewachsenen primären Gelenkkopf zeigen, das zwischen erster Phalanx und Metacarpus aber die deutlichen Accessionen), von denen vorläufig immer noch nur das mittlere, der alte primäre Gelenkkopf, den Contact mit der genau auf ihn passenden Pfanne vermittelt. Wenn dasselbe nun aber allmälig durch Ausdehnung der Accessionen statt grösser kleiner wird, während der Spielraum der factisch erfolgenden Bewegungen der Pfanne doch voraussichtlich mit der Zeit und mit der Ausbildung der angreifenden Muskeln immer zunimmt, und wenn zugleich die Ecken, welche den primären Gelenkkopf noch gegen die neuen Accessionen abgrenzen, allmälig immer stumpfer werden, so muss einmal der Moment eintreten, wo die Pfanne die Grenzen des alten primären Gelenkkopfes vollends

überschreitet, sich gewissermassen durch Abwickelung von ihm luxirt und auf die bisher als Accessionen des Gelenkkopfs bezeichneten Abrundungen, also auf Theile der Oberfläche des mit ihr articulirenden Skeletabschnittes zu stehen kommt, mit denen sie in der ersten Anlage gar nichts zu thun hat, auf die sie demnach auch zunächst nicht genau passt, in denen sie aber doch eine wohl vorbereitete Unterlage für ihre überhin gleitenden Bewegungen findet, wie an dem primären Gelenkkopfe, und die sich dann mit der Zeit auch noch vollständiger congruent mit ihr abschleifen und dadurch allmälig ganz in die Continuität eines ihr annähernd mathematisch congruenten Kopfes übergehen, der nur nun viel grösser ist. Anfangs aber bleibt der Uebergang vom primären Gelenkkopfe auf sie immer noch ein plötzlicher (vgl. Fig. 16, 18 und 20, oder 39 und 34.).

Wenn dem nun so ist, wenn also die alte, wesentlich unveränderte Pfanne von dem primären Kopfe, auf und mit welchem sie sich von Hause aus gebildet hat, sozusagen plötzlich auf die zugewachsenen Fortsetzungen desselben herein fällt, so würde es freilich ein sonderbarer Zufall sein, wenn diese Accessionen nun auch gleich ganz zu ihr passen sollten, sowohl was die Stärke der Krümmung betrifft, als auch die Ausdehnung, wie sie der Excursion, in welcher die Pfanne bald nun factisch über sie hin und her geht, schliesslich entspricht. Denn im fertigen Zustande ist die Regel, dass die Pfanne immer gerade bis zur Berührung ihrer Ränder mit denen des Gelenkkopfes, nicht mehr und nicht weniger gelangen soll, und dies hätten wir auch hier voraussetzen müssen, wenn die Vergrösserung des Kopfes nur, wie oben angedeutet, Schritt haltend mit der Ausdehnung des Spielraumes der Bewegung der Pfanne über ihn hätte erfolgen sollen. In der That ist dies aber auch durchaus nicht der Fall. Es können sehr wohl, teleologisch zu reden, auf der einen Seite grössere, auf der anderen kleinere Zuwächse des Gelenkkopfes, als nöthig sind, durch die Accessionen vorbereitet sein. Wenn in einem Gelenke, wie die der Finger mit schliesslich ganz überwiegend einseitiger Beugung die Pfanne von ihrem primären Gelenkkopfe ausrückt, um ihren definitiven Spielraum zu durchlaufen, so wäre auf der Streckseite fast keine Ausdehnung des Gelenkkopfes dazu nöthig, desto mehr aber auf der Beuge-

seite. Statt dessen sind die Accessionen auf beiden Seiten ziemlich gleich, oder wenn wir genauer zusehen, finden wir sie sogar häufig auf der Streckseite ursprünglich grösser. Wir werden dies auch ganz natürlich finden, wenn wir uns erinnern, dass wir bei ihrer Entstehung schon die Mitwirkung beginnender Bewegung der Pfanne über die Ränder des Gelenkkopfes hinaus in Rechnung gezogen haben und zwar in der Art, dass die bedeckenden Theile nicht durch Angreifen an der Seite, nach welcher sie Bewegung bewirken, sondern durch Anpressung gegen diejenige, wo sich die Ränder der Pfanne von denen des Kopfes entfernen, die erste Bildung der Accession vermitteln sollten. Denn dann muss sie auf der Seite des Contactes stärker ausfallen, welche dem vorwiegenden Ausschlage der Bewegung entgegengesetzt ist, da auf ihr die passiv gespannten Theile stärker um die Ecke des Randes vom primären Gelenkkopf herum gezogen werden. Und so sehen wir denn an den Fingergelenken vielfach auf der Dorsalseite von vornherein so grosse Fortsetzungen der convexen Krümmung des Gelenkkopfes angelegt, dass bei den meisten Menschen der Spielraum der Bewegung der Pfanne wohl nie so weit gelangt, dass er ihre Grenzen erreichen würde, andererseits aber auf die Beugeseite noch so kurze, dass der Rand der Pfanne bei eintretender voller Beugung weit überzustehen kommt (vgl. Fig. 18, 20, 22). Später aber, wenn die drei Theile des Kopfes durch gleichmässige Abrundung in eine zusammenhängende Krümmung übergehen und die Pfanne über diesem fertigen, nun wieder einfachen Gelenkkopfe hin- und hergeht, dann erfolgt auch wieder unter dem Einflusse ihres Druckes und Gleitens die allmälige, mit der Bewegung Schritt haltende Ausdehnung oder Verödung des Gelenkkopfes bis zu den Grenzen, welche die Ränder der Pfanne am Ende der Bewegung nach der einen oder der anderen Seite erreichen, und so wird der definitive Zustand hergestellt, in welchem die Differenz der Grösse von Kopf und Pfanne in der That einen ziemlich genauen anatomischen Ausdruck für den Spielraum der Bewegung darstellt.

Am schnellsten und vollständigsten vollzieht sich die Abschleifung der ganzen Rolle, durch welche ihre ursprünglich verschiedenen Theile in eine gleichmässige Krümmung zusam-

menfliessen, an den Fingern auf den mittleren Durchschnitten, welche die Gelenkköpfe derselben in zwei symmetrische Hälften theilen, wahrscheinlich, weil hier der Eindruck der Pfanne durch die an ihr sich inserirenden Sehnen und dieser selbst auf den Kopf am meisten über denselben hin und her arbeitet. An den Seitenpartien derselben bleiben Stücke der Accessionen auf die Dauer mehr oder weniger unterscheidbar. Und an andern Gelenken bleiben überhaupt grosse Stücke der Krümmung ihrer Gelenkköpfe dauernd etwas verschieden, indem zwei Stücke derselben mit nicht ganz gemeinsamem Centrum sich in einer etwas vorspringenden stumpfen Knickungskante begegnen. Das auffallendste Beispiel davon hat der Eine von uns von den Gelenkköpfen des Hinterhauptes beschrieben und abgebildet. Es kommen aber ähnliche kleine Ungleichheiten von grossen Abschnitten der Gelenkköpfe, welche natürlich dann auch abwechselnd ein wenig klaffen, mannichfach variirend vor. Offenbar nun dürfen wir darin Spuren des Zusammentretens der ursprünglich getrennt entstandenen Accessionen und primären Gelenkköpfe, die ursprünglich gar nicht ganz gleiche Krümmung haben, erblicken. Und etwas ähnliches, nur in noch bleibenderer und ausgesprochener Form ist auch die Bildung solcher Gelenkköpfe wie das untere Ende des Oberschenkels oder das vordere der Mittelfussknochen, wo sich eine grosse Fortsetzung convexer Gelenkflächen mit von dem primären Gelenkkopfe abweichender Krümmung an denselben anschliesst, aber in eckiger Abgrenzung von ihm getrennt bleibt, weil nicht die Pfanne des nächsten Skeletgliedes mit ihr articulirt, sondern ein in die Insertionen von Sehnen an das die Pfanne tragende Glied eingeschalteter separater Knochen, Patella oder Sesambeine. Hier kann man sich denken, dass diese statt dessen, wie das Olecranon an der Ulna als Fortsätze der Pfanne anwachsen würden, wenn nicht die Excentricität der verschiedenen Theile des Kopfes eine nur biegsame Verbindung zwischen ihnen bei der Bewegung forderte.

Bis hieher hat sich unsere Betrachtung der Contactflächen-Gestaltung nur in der Richtung der mit ihr im Werden begriffenen typischen Bewegung, also bei Gelenken mit einfacher Drehungsachse auf Durchschnitten senkrecht zu derselben bewegt. Es

erübrigt ein Wort von der Entstehung der Krümmung zu sagen, die sich als Durchschnitt in Einer Ebene mit der Achse darstellt, oder als das, was wir Erzeugungslinie der Contactfläche nennen, wenn wir die Gestalt letzterer in Gedanken aus einer Drehung eben dieser, darum so genannten Linie um die Achse entstehen lassen. Wir haben sie an den Fingergelenken früh schon typisch auftreten sehen, ebenso am Ellbogen. Die Form der Köpfe an den Phalangen und der Trochlea des Oberarms, die gekehlte oder uhrglasförmige mit einer Einschnürung in der Mitte wird sich aus demselben Grunde, wie die vollkommene Abrundung der mittleren Partie des Gelenkkopfes erklären, aus dem directeren Anlegen der überspringenden Sehnen auf die Mitte des Kopfes, die dadurch auch tiefer eingedrückt, stärker convex und also eben gekehlt, eingeschnürt und von einer entsprechenden Vorragung der Pfanne umfasst würde.

Käme, wenn diese einfachste und gewöhnlichste Form der Rolle eines Gelenkkopfes mit quer hindurchgehender Hauptachse bereits angelegt ist, eine Muskelwirkung hinzu, welche auch in einer zu der Hauptebene der Bewegung queren Richtung Biegungen der in dem Gelenke verbundenen Stücke veranlasste, so könnte hieraus sehr leicht die sattelförmige Contactfläche hervorgehen. Wenn aber von vornherein in mehreren Richtungen Muskeln über das Gelenk hingehen und die Gestaltung desselben aus den früheren Stadien bestimmen, so wird in mehreren Ebenen die oben erörterte Entwickelung durch die Bewegung erfolgen und eine convexe Walze oder ein kugelähnlicher Gelenkkopf entstehen.

Es wäre zwecklos, auf den möglichen Hergang bei der Entwickelung verschiedener Formen von Gelenken schon jetzt weiter einzugehen, da der faktische Gang derselben zuvor an den einzelnen Gelenken erst weiter untersucht werden muss. Was wir an den Fingern gefunden haben, lässt natürlich zunächst auch nur auf ihre Gestaltung Schlüsse zu. Schon was wir als analogen Verlauf am Ellbogen bestätigen konnten, ist noch fragmentarisch, weil wir dort nicht bis auf gleich unentwickelte Stadien zurückgekommen sind. Aber die grossen Züge der ganzen Succession, in welcher die Organisation des Gelenks aus einer Art von Syndesmose zur Diarthrose und aus einer Art von Amphiarthrose

zum frei und regulär beweglichen Gelenke wird, sind doch mit grosser Wahrscheinlichkeit als an allen Gliederungen des Skelets wiederkehrende nach dem Vorliegenden vorauszusetzen.

In der Gestaltung von Kopf und Pfanne als Convexität und Concavität einer congruenten Contactfläche und in jener ersten allmäligen, auch zuletzt immer fortdauernden Verrückung der Grenzen des Kopfes durch Ausbreitung oder Verödung in gleichem Schritte mit der Excursion der Pfanne haben wir die aus Analogie mit kleinen ähnlichen Vorgängen im Leben schon früher gebildeten Ansichten wesentlich nur bestätigt und auf directe Beobachtungen basirt. Was aber hinzukommt, die Accession von breiteren Streifen convexer Gelenkflächen zu dem ersten aus der Umgestaltung der Amphiarthrose direct entstandenen Gelenkkopfe, über welche die Excursion der Pfanne dann fortschreitend erst hinausgreift, war nicht vorausgesehen und hat keine Analogie in anderen schon bekannten Vorgängen. Wir müssten denn daran denken, dass die pathologische Veränderung der Gelenke bei Contractur im Grunde als eine Wiederumkehr jenes ganzen Entwickelungsganges, eine Zurückbildung des beweglichen Mechanismus zur steifen Amphiarthrose betrachtet werden kann, bei welcher grosse Abschnitte der Gelenkköpfe, indem die Pfanne sie nie mehr betritt, von dem übrigbleibenden Contacte des Gelenks wieder ausgesondert werden. Sie werden von demselben durch Kanten wiederabgesetzt, verlieren die der Pfanne congruente Krümmung, die freilich auch an dem in Contact bleibenden Theile sich ändert, verlieren die glatte Knorpeloberfläche und bleiben nur in der Regel sehr lange, wenn auch keineswegs ausnahmslos, noch von nicht fest angewachsener, ausgedehnter Kapsel überspannt.

Ergebnisse in Bezug auf Thierähnlichkeiten in der Entwickelung.

Die Analogien, welche wir in der Entwickelung des Skelets der menschlichen Extremitäten mit denen niederer Thiere zu constatiren haben, reichen nicht so weit in die niederen Classen zurück, wie die, welche schon von der Genese anderer Körpertheile her längst bekannt sind. Ganz natürlich nicht, da unsere Untersuchungen nur relativ vorgeschrittene Stufen dieser Entwickelung zum Gegenstande gehabt haben. Aber sie erstrecken sich doch immerhin bis zu den weitest entfernten Säugethierord-

nungen. Dahin gehört die Andeutung einer Verbindung der Fibula mit dem Femur, welche ihre Analogie bei Echidna und Phalangista findet.

Sodann die Bildung der Verbindung des Talus mit der Tibia und Fibula in dem frühesten von uns beobachteten Stadium. Sie kann mit nichts passender verglichen werden, als mit der Bildung der betreffenden Gelenke bei Phalangista.[1] Die keilförmige Verlängerung, mit welcher der Talus bei unseren Embryonen zwischen die Enden der beiden Unterschenkelknochen hinauf erstreckt, entspräche ganz dem an derselben Stelle liegenden Meniscus, welcher bei dem Beutelthiere gemeinsam mit dem Tulus in einer Drehung um die senkrechte Achse der Tibia nach Art der Pro- und Supination, waran sich die Fibula betheiligt, beweglich ist, während er bei der Flexionsbewegung des Sprunggelenkes mit dem Unterschenkel unbeweglich verbunden bleibt. Und wenn wir uns also jene Form beim Menschen auch bleibend in der Bildung der Gelenke erhalten dächten, müsste auch ein analoger Mechanismus als resultirend vorausgesetzt werden.

Die von uns ursprünglich gefundene gegenseitige Lage der beiden Unterarmknochen im Ellbogengelenke, Radius noch mehr als später vor der Ulna, hat eine vollkommene Analogie noch bei höheren Ordnungen, z. B. bei Affen und Hunden. Ebenso das Verhältniss zwischen oberem und unterem Ende des Oberarms, die weniger als später im Verhältniss zur Schulter mit dem äusseren Ende vorwärts rotirte Achse des Ellbogens.

Dagegen findet sich die Analogie für die Schiefstellung der Achse der Kniegelenkscondylen zur Länge des Oberschenkels nur bei Wallrossen und Seehunden.

Endlich haben wir hier noch näher auf die ebenfalls schon oben erwähnte Andeutung von einem oder zwei überzähligen Carpuselementen einzugehen. Es handelt sich dann also hernach hier um eine Reduction mehrgliedrig angelegter Skelettheile zu einfachen, wie zu einem solchen Vorgange in phylogenetischer Verwerthung für grosse Abschnitte des Thierreichs aus den

---

[1] Vgl. Lucä, die Hand und der Fuss. Abh. der Senckenbergischen naturf. Gesellsch. V. Bd. Separatabdruck S. 52 (Inf. I. Fig. 11) und die Anmerkung dazu von W. Henke.

umfassenden Arbeiten Gegenbauer's[1], die jüngst noch durch Untersuchungen von Ungulaten-Embryonen von Rosenberg[2] ergänzt worden sind, zahlreiche und schlagende Analogien bekannt sind. Es handelt sich um die Anlage von 10 Carpalia. Die zwei unerwarteten liegen in der radialen Hälfte und zwischen der ersten und zweiten Reihe der Handwurzel.

Das eine entspricht in seiner Lage genau dem am Carpus der Amphibien, Reptilien und einiger Säugethiere (Nager, Insectenfresser und Affen) bekannten, bleibenden Centrale. Es liegt eingekeilt (Fig. 1) zwischen Capitatum, welches mit seinem Kopfe schon wohl angelegt ist, Trapezoideum und Radiale und erhielt sich bis in den Anfang des dritten Monates. Im zweiten Monate, cf. Fig., hat es noch beträchtliche Grösse, die übrigens an verschiedenen Händen wechselt. Ob man das in Figur 12 dem Naviculare ansitzende kleine Köpfchen diesem oder dem anderen noch zu besprechenden Handwurzelglied gleichzustellen hat, mag bei dem Mangel an weiteren Vergleichsschnitten dahingestellt sein. Nachher, in späteren Stadien wird es jedenfalls nicht mehr gesehen und scheint somit in das Naviculare aufzugehen, wie das bei Emys europaea[3] regelmässig geschieht, und zu dem Theil desselben zu werden, welcher mit der Pfanne des Trapezoideum articulirt. Dafür spricht auch, dass bei den Affen, so Simia Satyrus, wo das Centrale bleibend ist, dem Naviculare der Kopf für die Articulation mit dem Trapezoideum abgeht und dasselbe demnach um den ganzen Körper des Centrale kleiner ist, als beim Menschen[4]. Dadurch gewinnen nun auch die von Gruber[5] und anderen gesammelten Varietäten der Handwurzel ein besonderes Interesse. Ungezwungen erklärt sich aber ihr Vorkommen aus der ursprünglichen Anlage derselben in jedem Foetus und einer, von der typischen Umwandlung desselben abweichenden unvollkommenen Reduction der Gliederzahl durch ihr Verschmelzen mit dem Naviculare.

---

[1] Carpus u. Tarsus 1864.
[2] Zeitschr. f. wissensch. Zoologie 1873.
[3] Gegenbauer Tafel II, Fig. 3.
[4] Lucae l. c. Tafel XXXVI, Fig. 9.
[5] Archiv f. Anatomie u. Physiologie 1869. pag. 331.

Das zweite überzählig angelegte Handwurzelglied ist das an dem Radialrand liegende. Es ist zwischen das Naviculare und Trapezium hineingeschoben. Dieses haben wir nur einmal und zwar nur in dem einen, in Figur 1 wiedergegebenen Schnitt gesehen. Von der Anwesenheit eines solchen am ausgewachsenen Thiere ist nur in Simia Satyrus ein Beispiel bekannt (Lucae Taf. III Fig. 8), bei ihm findet es sich nur mehr zur Vola verschoben und nicht so weit zwischen Radiale und Trapezium hineingekeilt. Lucae lässt es, und gewiss mit Recht, der Eminentia carpi radialis inf. des Trapezium des Menschen entsprechen. Ob nun die Anlage unseres Handwurzelgliedes dieselbe Bedeutung gewinnt, mag dahin gestellt bleiben und zwar desshalb, weil es, wie in Figur 1 sichtlich, das Naviculare sehr passend mit dem Centrale zusammen zu der Form ergänzt, welche dieses am Erwachsenen hat, und zweitens, weil die Varietäten der Handwurzel hiefür zu sprechen scheinen. Nächst dem Vorkommen des Centrale beim erwachsenen Menschen, ist nämlich gerade eine Substitution des Radiale durch zwei Knöchelchen beobachtet worden [1], welche zwei Hälften desselben entsprechen und von denen das radial gelegene genau diesem hier beschriebenen entspricht. Es lässt sich also auch daran denken, dass diese Zweitheilung des Naviculare für die frühesten Stadien in einer doppelt getrennten Anlage derselben typisch ist und unser Präparat einem solchen Stadium angehört.

Wir sind am Ende, aber es liegt auf der Hand, dass wir mit dieser ganzen Arbeit nur am Anfange einer grossen Reihe dankbarer Untersuchungen stehen. Die Verfolgung der Entwickelung jedes Gelenkes im Einzelnen und der ganzen Anlage der Extremitäten in noch weiter zurückliegenden Stadien verspricht schon bei der gleichen Behandlung, wie sie vorliegend versucht ist, noch reiche Ausbeute; mehr noch wenn sie zugleich mit der Erforschung der in der Bildung begriffenen Muskeln verbunden werden wird.

---

[1] Gruber 1866. Zeitschr. f. Anatomie u. Physiologie.

Erklärung der Abbildungen.

Tafel I.

Schnitte von Embryonen aus der fünften und sechsten Woche.

Fig. 1. Flächenschnitt durch die obere Extremität, welcher die Ellenbeuge in ihrer äusseren (radialen) Hälfte getroffen hat. Zwischen dem Naviculare der Handwurzel und den beiden Multangula liegt das dem Erwachsenen fehlende Glied, Os centrale oder intermedium. An das Multangulum majus schliesst sich schräg getroffen die centrale Hälfte des Metacarpus I.

Fig. 2. Untere Extremität desselben Embryo.

Fig. 3. Ellenbeuge im ulnaren Theil, von demselben Präparat wie Fig. 1. Schnitt demselben parallel. Zwischenzone.

Fig. 4. Die Vorderhand des in Fig. 1 abgebildeten Schnittes bei stärkerer Vergrösserung, welche die Grenzen der Scheiben besser hervortreten lässt.

Fig. 5. Flächenschnitt aus derselben in Fig. 4 abgebildeten Hand, nur mehr volar gelegen. Daumen und zwei Finger. Auf der ersten Phalange des Daumens die Scheibe, ohne dass die zweite Phalange schon angelegt ist. Von ihr ist auch bei Durchsicht der ganzen Schnittreihe keine Spur zu finden. Zwischen Metacarpus und erstem Phalanx des zweiten Fingers die Zwischenscheibe sehr deutlich.

Fig. 6. Mehr zur Medianebene gelegener Flächenschnitt derselben in Fig. 2 gegebenen unteren Extremität. Oberschenkelschaft und vordere Fläche der Unterschenkelglieder in einer Ebene. Keilform des Talus. Scheidung des Metatarsus und der ersten Phalanx der dritten Zehe nur durch die vorspringende Leiste kenntlich (Hämatoxilinfärbung). Erst bei Picrocarmin sondert sich die Scheibe, wie in Fig. 4.

Fig. 7. Mehr plantar gelegener Schnitt derselben Extremität. Metatarsus IV. und erste Phalanx.

Fig. 8. Median gelegener Schnitt durch die untere Extremität des sechswöchentlichen Embryos, desshalb Bug und Schaft des Femur nicht in Continuität. Anlage des Fusses bei der Präparation zerdrückt.

Tafel II.

Schnitte von Embryonen aus dem Ende des zweiten Monates bis zum fünften Monat.

Fig. 9. Axialer Dorsovolarschnitt durch den dritten Finger aus dem Ende des zweiten Monats. Die Zwischenzonen. Muskelinsertionen. Verkalkung in der Endphalanx. Das kleine volargelegene Kalkkrümel mag beim Schnitt abgebrochen sein, ebenso wohl in Fig. 10a und 11. Die S-förmige Linie zwischen Capitatum und Metacarpus (Picrocarmin tricheris).

Fig. 10. Daumen und Zeigefinger im Flächenschnitt aus dem Ende des zweiten Monats. Pilzform des Verkalkungsheerdes (Hämatoxilin).

Fig. 10 a. Vierter und fünfter Finger derselben Hand. Der erstere im Dorsovolar- der letztere schon mehr im Flächenschnitt. Am vierten die geradlinige Bewegung der ersten Phalanx gegen die zweite. Am fünften die Kegelform der Endphalanx.

Fig. 11. Fast axialer Dorsovolarschnitt durch den dritten Finger aus dem Ende des zweiten Monats (Haematoxilin). Zum Rumpf convexe Begrenzungslinie zwischen Metacarpus und erster Phalange. Geradlinige Begrenzung von Phalanx I. gegen Phalanx II. Doppelt gekrümmter Verlauf der Begrenzungslinien zwischen Phalanx II. und III.

Fig. 12. Kolbenform der Endphalanx des Daumens (Hämatoxilin).

Fig. 13. Zweite Phalanx desselben fünften Fingers aus Fig. 10a. Circuläre Einschnürung. Die Endphalanx ist nur mit einem Randtheil ihrer Basis in den Schnitt gefallen.

Fig. 14. Dorsovolarschnitt durch die Handwurzel, welche den Metacarpus II. in seiner Basis radiolateral getroffen hat. Zwischen Multangulum minus und Naviculare liegt das Centrale. Das zur Volarseite rechts liegende kleinste dreieckige Körperchen ist ein Theil des Multangulum majus.

Fig. 15. Flächenschnitt durch die Hand von einem Embryo aus dem Anfang des dritten Monats (Picrocarmin). Die radioulnaren Krümmungen an dem vierten und fünften Finger. An ihnen und dem Daumen die Zwischenzonen. In der Handwurzel das theilweise mit dem Naviculare vereinigte kleine fragliche Körperchen. Zwischen Triquetrum und Ulna die Cartilago triangularis.

Fig. 16. Axialer Dorsovolarschnitt durch einen vierten Finger aus dem Ende des dritten Monats. Auf dem Kopf von Phalanx I. die gleiche Grösse der Accessionen auf dem dorsalen und im volaren Theil. Ihre Bogenspannungen kleiner als die des primären Gelenkkopfs. Auf dem Kopfe der zweiten Phalanx das Umgekehrte. Auf dem Dorsum der ersten Phalanx die beginnende Verkalkung.

Fig. 17. Axialer Flächenschnitt durch einen dritten Finger aus dem Anfang des vierten Monats.

Fig. 18. Axialer Dorsovolarschnitt durch den fünften Finger aus dem Ende des dritten Monats derselben Hand aus Fig. 16. Auf Phalanx I. der primäre Gelenkkopf. Auf dem Kopf von Phalanx II. die beginnende Entwicklung der Accessionen.

Fig. 19. Lateraler Dorsovolarschnitt durch den zweiten Finger aus dem Anfange des vierten Monats (dieselbe Hand, der Fig. 17 entnommen ist). Das Zusammenfliessen der Accession auf der volaren Seite mit der Krümmung des primären Gelenkkopfs an den Köpfen von Phalanx I. und II.

Fig. 20. Axialer Dorsovolarschnitt durch den zweiten Finger aus dem fünften Monat. Die Krümmung des primären Gelenkkopfs am Kopf der zweiten Phalanx fast ganz in die Accession aufgegangen.

Tafel III.

Fig. 21. Flächenschnitt durch einen vierten Finger aus dem sechsten Monat. Das zweite Interphalangealgelenk axial, das erste etwas dorsal getroffen. Die exquisiten radio-ulnaren Krümmungen.

Fig. 22. Lateraler Dorsovolarschnitt durch den dritten Finger aus dem sechsten Monat. (Dieselbe Hand, wie in Fig. 21.)

Fig. 23, 24, 25. Successive Flächenschnitte durch das Metacarpophalangealgelenk desselben in Fig. 21 benützten Fingers. Fig. 23. Der am meisten dorsal gelegene, mit einem Randbild der Synovialfalte. In Fig. 24 ist dieselbe auch noch continuirlich. In Fig. 25, dem mehr axial gelegenen Theil, sieht man ihre freien ins Gelenk ragenden Ränder.

Fig. 26. Axialer Dorsovolarschnitt vom Neugeborenen. Dig. III.

Fig. 27. Axialer Dorsovolarschnitt vom Erwachsenen. Dig. III.

Tafel IV.

Fig. 28. Ellenbeuge aus dem zweiten Monat. Die Schnittebene kreuzt die Drehungsaxe der Trochlea in rechtem Winkel. In Analogie zu den Schnitten der Finger, werden diese Dorsovolarschnitte genannt werden. Es ist ein Dorsovolarschnitt durch den ulnaren Theil des Gelenks.

Fig. 29. Dorsovolarschnitt desselben Gelenks aus dem radialen Theil.

Fig. 30. Dorsovolarschnitt durch den radialen Theil eines Ellbogengelenks aus dem Ende des zweiten Monats.

Fig. 31. Schnitt durch das Ellbogengelenk eines Foetus aus dem Ende des zweiten Monats, parallel zur Drehungsaxe der Trochlea und Längsaxe der Ulna.

Fig. 32. Dorsovolarschnitt durch den radialen Theil eines Ellbogengelenks aus dem Ende des zweiten Monats. Mit demselben Schnitt ist auch das Schultergelenk zerlegt worden.

Fig. 33. Dorsovolarschnitt durch den radialen Theil desselben Gelenks. Der ganze obere Theil des Schnittes mit dem Schultergelenk ist weggelassen worden. Die Schnitte sind parallel.

Fig. 34. Radialer Theil eines Ellbogengelenks aus dem Ende des dritten Monats im Dorsovolarschnitt.

Fig. 35. Parallelschnitt aus dem ulnaren Theil desselben Gelenks.

Die Angabe der Vergrösserungen ist den Nummern der Figuren auf den Tafeln selbst beigefügt. Die Zeichnungen sind alle mit Hilfe eines Zeichenprisma unmittelbar nach den Präparaten gemacht. In der lithographischen Ausführung ist manches zu schematisch scharf contourirt ausgefallen, besonders in den stärkeren Vergrösserungen der ersten Stadien (Fig. 4, 5, 6) die Abgrenzungen der Skeletabschnitte, in anderen die Bänder- und Sehnenanlagen.

XXV. SITZUNG VOM 12. NOVEMBER 1874.

Herr Custos Th. Fuchs erstattet einen kurzen Bericht über seine mit Subvention der Akademie vorgenommene Untersuchung der jüngeren Tertiärbildungen an der Ostküste Italiens, und erbietet sich, der Akademie auch für die weitere Ausführung des begonnenen Unternehmens seine Kräfte zu widmen.

Herr Ludwig Birkenmajer in Lemberg übersendet eine Abhandlung: „Zur Theorie der Gase".

Herr Schiffslieutenant K. Weyprecht übermittelt die im Laufe der österr.-ungar. Polarexpedition mit dem Schleppnetze gesammelten Grundproben und Thiere mit dem Ersuchen, dieselben zur weiteren Bearbeitung an die speciellen Fachmänner zu vertheilen.

Herr Prof. V. v. Lang überreicht eine Abhandlung: „Über die Ausdehnung der festen Körper mit steigenden Temperaturen", vom Herrn Dr. Al. Handl, Professor an der Militär-Akademie zu Wiener Neustadt.

Herr Prof. Dr. S. L. Schenk legt eine Abhandlung vor, betitelt: „Die Spermatozoën von *Murex brandaris*".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia de Ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Tomo X. Entrega 118; Tomo XI, Entrega 119. Habana, 1874; 8°.

Anstalt, Kgl. ungar. geologische: Évkönyve. III. kötet, 1 füzet. Pest, 1874; 4°. — Mittheilungen. III. Band, 1. Heft. Pest, 1874; 4°.

Apotheker-Verein, Allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 30—32. Wien, 1874; 8°.

Beobachtungen, Schweizer Meteorologische. April — September 1873. Zürich; 4°.

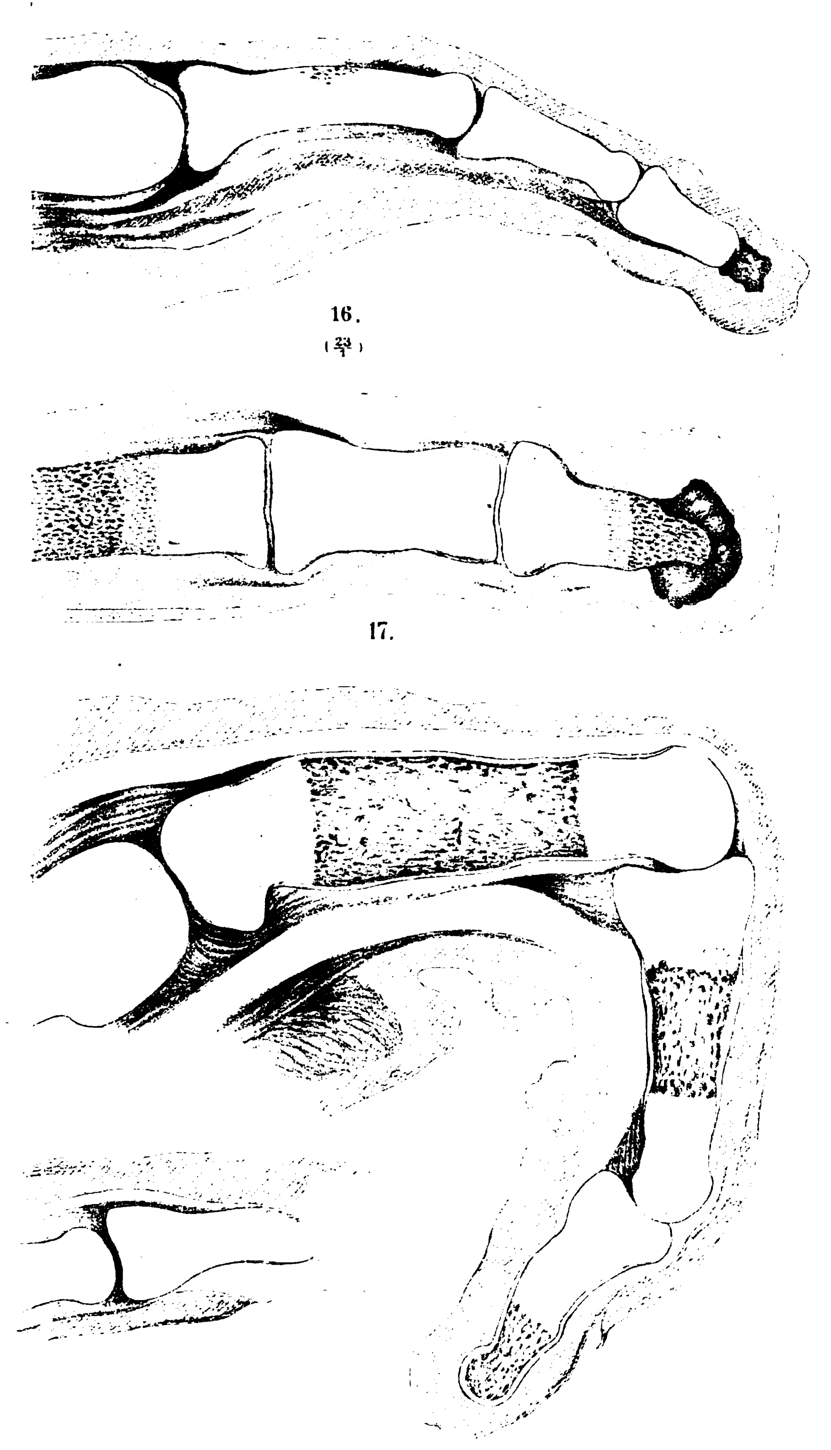
6. $\frac{53}{1}$

7. ($\frac{53}{1}$)

8. ($\frac{23}{1}$)

K. k. Hof-u. Staatsdruckerei.




16.
(23/1)
17.

Taf. III.

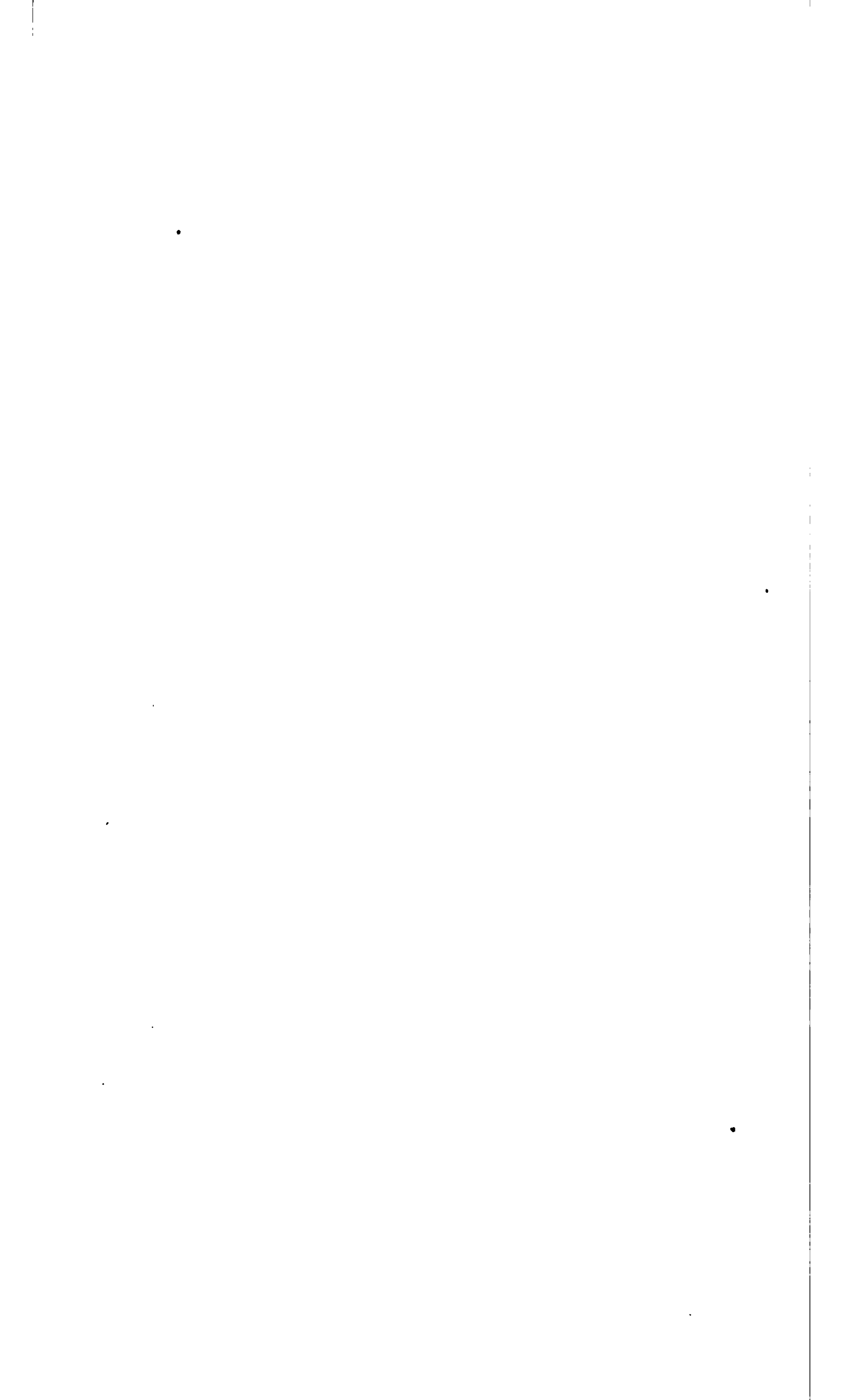
24. $(\frac{15}{1})$

25.

26. $(\frac{2}{1})$

27. $(\frac{1}{1})$

K.k. Hof-u. Staatsdruckerei.



Taf. III.

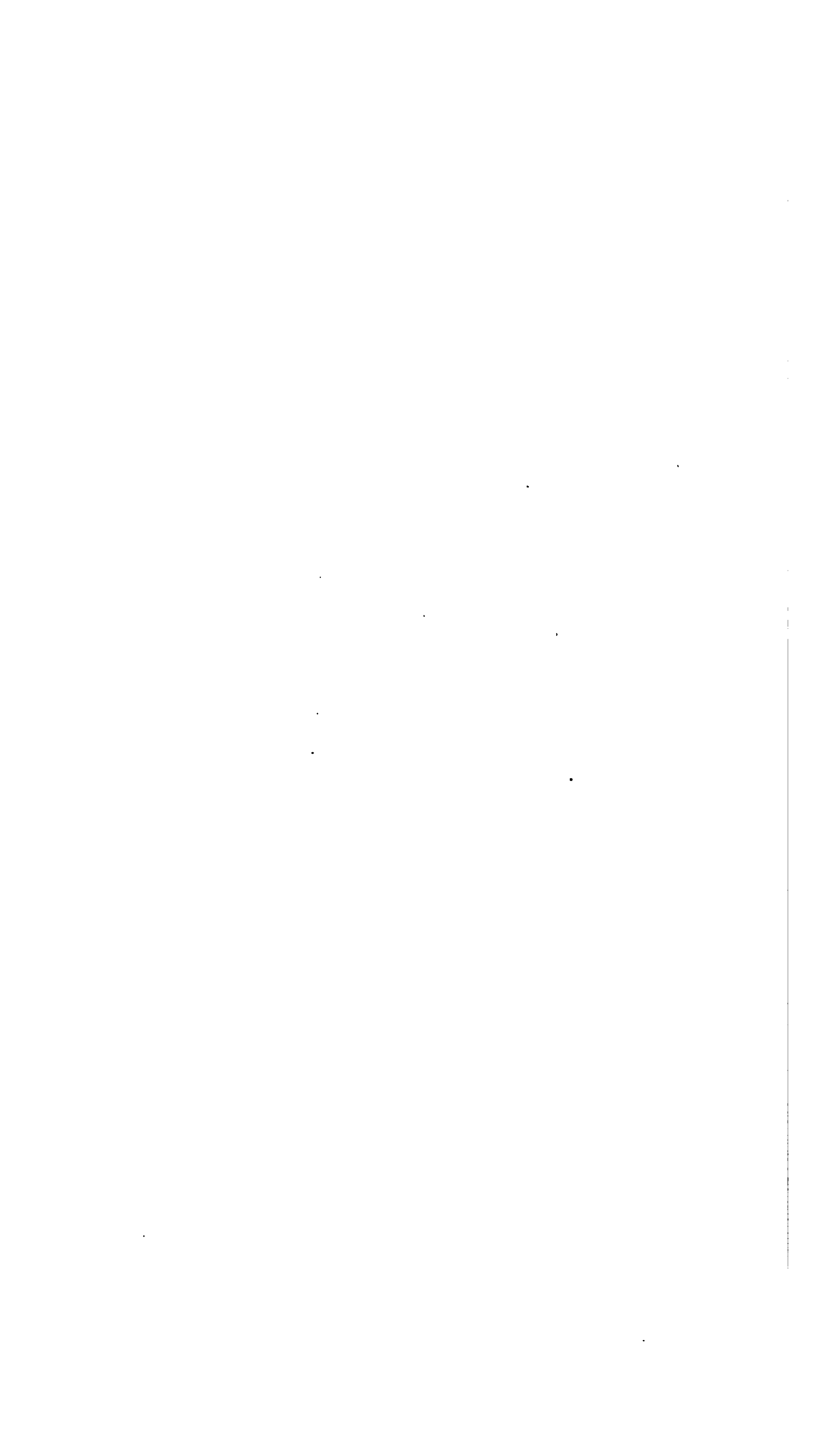
24. (15/1)

25.

26. (2/1)

27. (1/1)

K. k. Hof- u. Staatsdruckerei

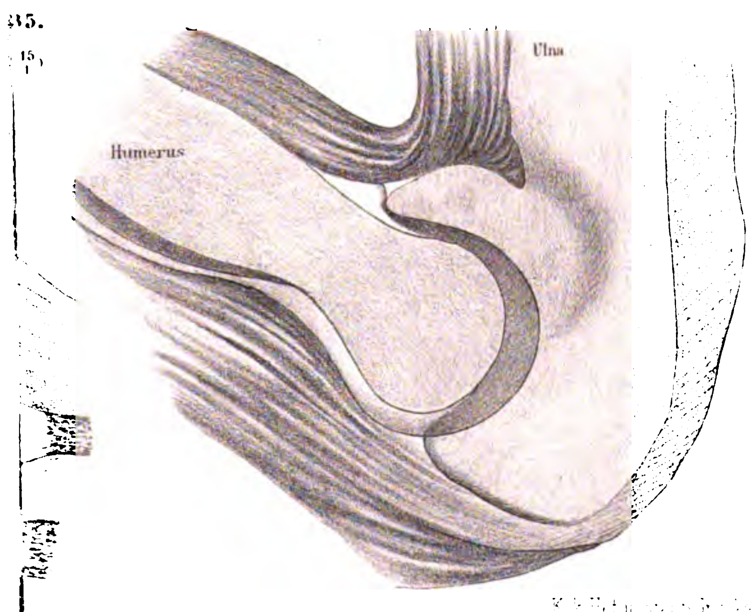


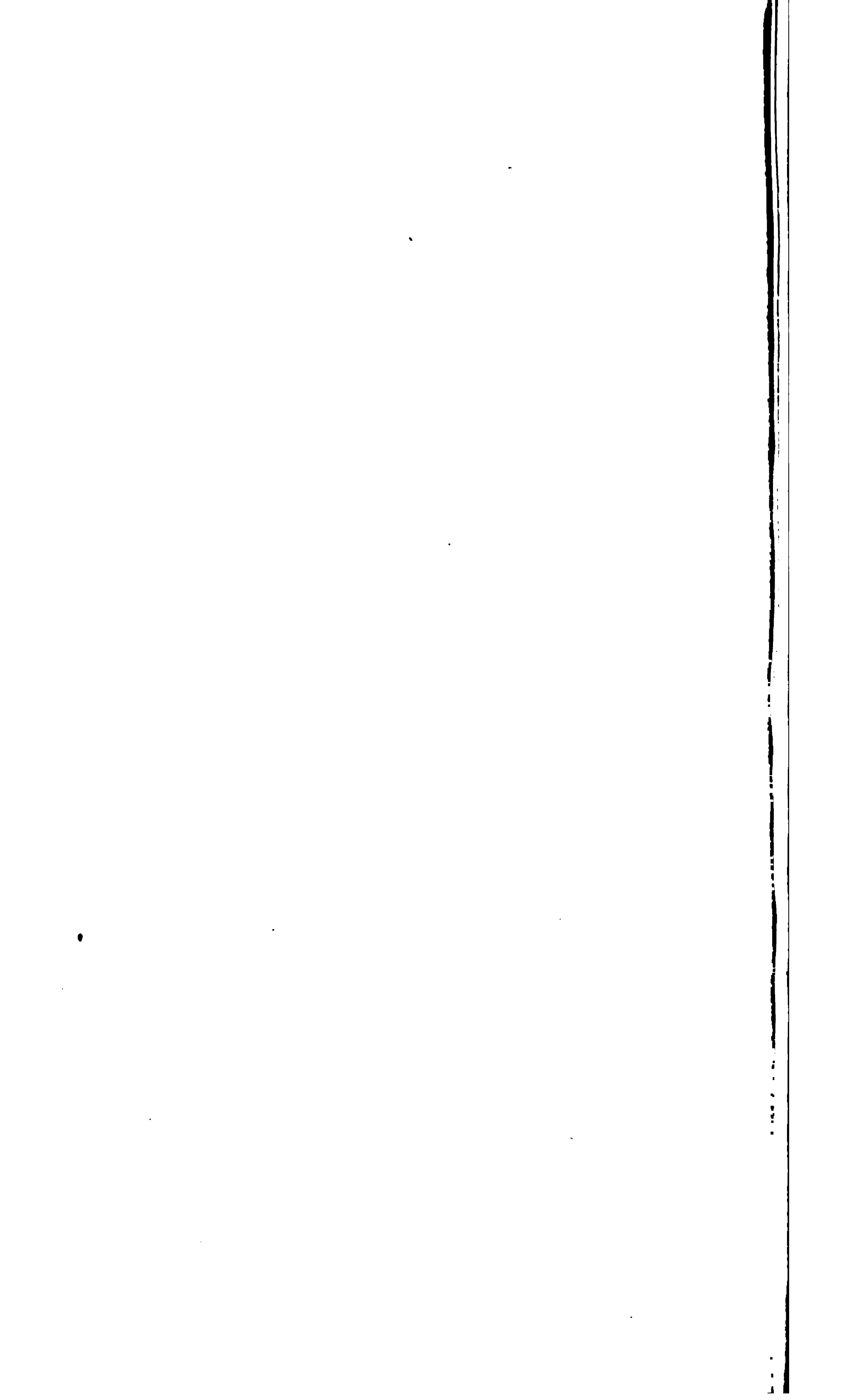
34. $(\frac{15}{1})$

Radius

Humerus

35. $(\frac{15}{1})$





Beobachtungen, magnetische und meteorologische, an der k. k. Sternwarte zu Prag, im Jahre 1873. Prag, 1874; 4°.

Breslau, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1873/4. 4° & 8°.

Comitato, R., Geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1874, Nr. 3 bis 6. Roma, 1874; gr. 8°.

Essex Institute: Bulletin. Vol. V. 1873. Salem, Mass., 1874; 8°.

Geological and Geographical Survey of the Territories, U. St.: Miscellaneous Publications. Nr. 4. Washington, 1874; 8°.

Gesellschaft, österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 21. Wien, 1874; 4°.

— k. ungar., naturwissenschaftliche: Közlöny. V. kötet, 41.—52. füzet. Buda-Pest, 1873; 4°. — A fajok eredete a természeti kiválás utján etc. irta Charles Darwin. I.—II. kötet. Budapest, 1874; 8°. — Elöadások az elemi élettan Köréböl. Irta Th. H. Huxley, Budapest, 1873; 8°. — A hö mint a mozgás egyik neme. Irta John Tyndall. Budapest, 1874; 8°. — A jelen geologiája. Irta Bernhard von Cotta. Budapest, 1873; 8°. — Die Eishöhle von Dobschau. Von Jos. Alex. Krenner. Budapest, 1874; 4°. — Die Ebbe und Fluth in der Rhede von Fiume. Von E. Stahlberger. Budapest, 1874; 4°.

Instituut, koninkl. Nederlandsch meteorologisch: Jaarboek vor 1873. I. Deel. Utrecht, 1873; 4°.

Karpathen-Verein, Ungar.: Jahrbuch. I. Jahrgang. 1874. Kassa; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1874, Nr. 13—15. Wien; 4°.

Lotos. XXIV. Jahrgang. Juli 1874. Prag; 8°.

Lund, Universität: Acta. Philosophi, Språkvetenskap och Historia. 1871; Tom. IX. 1872; Theologi. 1871; Mathematik och Naturvetenskap. 1871; Tome IX. 1872. Lund 1871—1872; 4°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administrat. Militär-Comité. Jahrgang 1874, 10. Heft. Wien; 8°.

Moniteur scientifique du D[teur] Quesneville. 395[e] Livraison. Paris, 1874; 4°.

Museum Francisco-Carolinum: XXXII. Bericht. Linz, 1874; 8°.
— d'histoire naturelle de Paris: Nouvelles Archives. Tome VIII°, 1er—4e fasc.; Tome IX°, 1er—4e fasc. Paris, 1872 & 1873; 4°.

Nature. Nr. 262, Vol. XI. London, 1874; 4°.

Naval Observatory, United States: Astronomical and Meteorological Observations made during the Year 1871. Washington, 1873; 4°.

Observatorium zu Tiflis: J. B. Biot's Tafeln zur Berechnung barometrischer Höhenmessungen. Neu berechnet und erweitert von H. Kiefer. Tiflis, 1874; 8°. — Inhaltsverzeichniss zum Bibliotheks-Katalog des Tiflis'schen Physikalischen Observatoriums nach dem Stande vom 1. Mai 1874. Von H. Kiefer. Tiflis, 1874; 8°.

Peabody Academy of Science: Vth Annual Report. Salem, 1873; 8°. — The American Naturalist. Vol. VI, Nr. 12 (1872); Vol. VII, Nrs. 1—12 (1873); Vol. VIII, Nr. 1 (1874.) Salem, Mass., 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1874. XXIV. Band, Nr. 3. Wien; 4°. — Verhandlungen. Jahrgang 1874, Nr. 13. Wien; 4°.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXIV. Band. Jahrgang 1874, October-Heft. Wien; 8°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger." IVe Année, 2e Série, Nr. 19. Paris, 1874; 4°.

Société Nationale des Sciences naturelles de Cherbourg: Mémoires. Tome XVIII (2e Série, Tome VIII). Paris & Cherbourg, 1874; 8°.

Verein, geognostisch-montanistischer, für Steiermark: Schluss-Bericht. Graz, 1874; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 45. Wien, 1874; 4°.

XXVI. SITZUNG VOM 19. NOVEMBER 1874.

Herr Regierungsrath Dr. E. Mach in Prag übersendet eine „vorläufige Mittheilung über die Schallgeschwindigkeit des Wassers in Röhren", vom Herrn Dr. V. Dvořák.

Herr Director Dr. G. Tschermak legt den ersten Theil einer Abhandlung: „Über das Krystallgefüge des Eisens, insbesondere des Meteoreisens" vor.

Derselbe überreicht ferner eine Abhandlung: „Über die Trümmerstructur der Meteoriten von Orvinio u. von Chantonnay."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academy of Natural Sciences of Philadelphia: Journal. New Series. Vol. VIII, Part I. Philadelphia, 1874; 4°. — Proceedings. 1873. Parts I—III. Philadelphia, 1873—74; 8°. — Observations on the Genus Unio. By Isaac Lea. Vol. XIII. Philadelphia; 4°.

— The American, of Arts and Sciences: Proceedings. Vol. VIII. Sign. 64—85. Boston & Cambridge, 1873; 8°. — The Complete Works of Count Rumford. Vols. II—III. Boston, 1873 & 1874; 8°.

Annalen (Justus Liebig's) der Chemie. Band 174, Heft 2. Leipzig & Heidelberg, 1874; 8°.

Athen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften für das Jahr 1873/4. 4°, 8° & 12°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des Sciences physiques et naturelles. N. P. Tome LIe, Nr. 202. Genève, Lausanne, Paris, 1874; 8°.

Bonn, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus dem Jahre 1873. 4° & 8°.

Boston Society of Natural History: Memoirs. Vol. II. Part II, Nr. 4; Vol. II. Part III, Nrs. 1—2. Boston, 1873 & 1874; 4°.

— Proceedings. Vol. XV. Parts 3—4. (1873); Vol. XVI, Parts 1—2. (1874.) Boston; 8⁰.

Buffalo Society of Natural Sciences: Bulletin. Vol. I, Nr. 4. Buffalo, 1874; 8⁰.

California Academy of Natural Sciences: Proceedings. Vol. I. (1854—1857); Vol. V, Part. 2. (1873.) San Francisco, 1873 & 1874; 8⁰.

Chantre, Ernest, Projet d'une légende internationale pour les cartes archéologiques préhistoriques. Lyon, 1874; 4⁰. — Les faunes mammalogiques tertiaire et quaternaire du bassin du Rhône. Lyon, 1874; 8⁰.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 18. Paris, 1874; 4⁰.

Gesellschaft, k. k., geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XVII (neuer Folge VII), Nr. 10. Wien, 1874; 8⁰.

— Deutsche, geologische: Zeitschrift. XXVI. Band, 3. Heft. Berlin, 1873; 8⁰.

Landbote, Der steierische. 7. Jahrgang, Nr. 23. Graz, 1874; 4⁰.

Lyceum of Natural History of New York: Annals. Vol. X, Nrs. 8—11. New York, 1872 & 1873; 8⁰. — Proceedings. Vol. I. Sig. 16—19. Second Series. January to March, 1873. New York; 8⁰.

Nature. Nr. 263, Vol. XI. London, 1874; 4⁰.

Report, Fifty-fourth Annual —, of the Boord of Public Education of the First School District of Pennslyvania. For the Year 1872. Philadelphia, 1873; 8⁰.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger. IVᵉ Année, 2ᵉ Série, Nr. 20. Paris, 1874; 4⁰.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. 1874. Disp. 9ᵃ. Palermo; 4⁰.

Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève: Mémoires. Tome XXIII, 2ᵈᵉ partie. Genève, Paris, Bâle 1873—1874; 4⁰.

— Malacologique de Belgique: Annales. Tome VIII; Année 1873. Bruxelles; 8⁰. — Procès-verbaux des séances. Tome III. Année 1874. (Pages I—CXXX.) Bruxelles; 8⁰.

Society, The Wisconsin State Agricultural: Transactions. Vol. X. 1871; Vol. XI. 1872—3. Madison, 1872 & 1873; 8°.

— The American Philosophical, of Philadelphia: Transactions. Vol. XV. New Series. Part I. Philadelphia & London, 1873; 4°. — Proceedings. Vol. XIII, Nrs. 90—91. 1873; 8°.

Verein, naturwissenschaftlicher, in Hamburg: Abhandlungen. V. Band. 4. Abth. Hamburg, 1873; 4°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 46. Wien, 1874; 4°.

Zeitschrift des Ferdinandeum für Tirol und Vorarlberg. Dritte Folge. XVIII. Heft. Innsbruck, 1874; 8°.

— für die gesammten Naturwissenschaften. Von C. G. Giebel. N. F. 1874. Band IX. Berlin, 1874; 8°.

— des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang, 15. Heft. Wien 1874; 4°.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

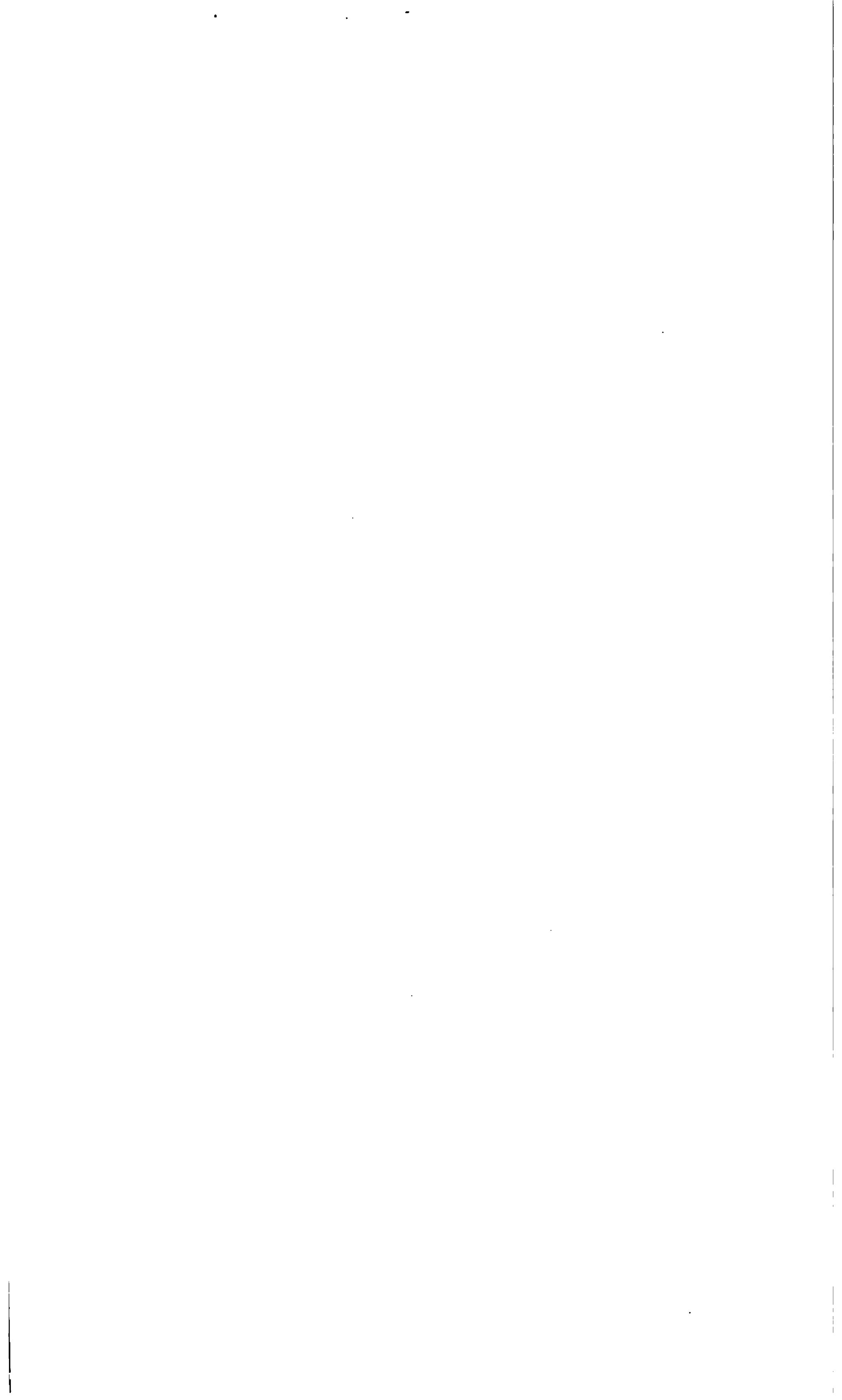
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXX. Band.

DRITTE ABTHEILUNG.

10.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.



XXVII. SITZUNG VOM 3. DECEMBER 1874.

In Verhinderung des Präsidenten führt Herr Hofrath Freiherr von Burg den Vorsitz.

Der Secretär liest eine Zuschrift des k. & k. Ministeriums des Äussern vom 26. November, womit das von der Akademie am 25. November an dasselbe gestellte Ansuchen, den zur Beobachtung des Venus-Durchganges nach Jassy reisenden Professoren Dr. Edm. Weiss und Dr. Th. v. Oppolzer die möglichste Unterstützung seitens der rumänischen Behörden, und namentlich den anstandlosen und zollfreien Aus- und Eingang der von denselben mitgeführten Instrumente erwirken zu wollen, dahin beantwortet wird, dass das genannte Ministerium sofort das General-Consulat in Bukarest, sowie das Consulat in Jassy von der Reise der beiden Gelehrten verständigt und das erstgenannte Amt zugleich angewiesen habe, sich in der gewünschten Richtung bei der rumänischen Regierung mit aller Beschleunigung zu verwenden.

Die physikalisch-medicinische Gesellschaft zu Würzburg ladet die Akademie mit Circular-Schreiben vom November 1874 zu ihrem am 8. December zu begehenden 25jährigen Stiftungsfeste ein.

Die Classe beschliesst, der Gesellschaft aus diesem Anlasse ein Beglückwünschungs-Telegramm zugehen zu lassen.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Jährliche Periode der Insecten - Fauna von Österreich-Ungarn. I. Die Fliegen *(Diptera)*", vom Herrn Vice-Director K. Fritsch in Salzburg. Diese Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

„Das Wasser des k. k. Artillerie-Arsenals in Wien. Als Beitrag zur Kenntniss der Beschaffenheit des Wassers von Wien“, von dem k. k. Artillerie-Hauptmann Ottomar Volkmer.

„Über Strömungen eigener Art und die merkwürdigen Eigenschaften des Pendels in menschlicher Hand“, von Herrn Dr. Ferd. Daubrawa in Mährisch-Neustadt.

Der Assistent der k. k. Gradmessung, Herr Ludwig Gruber, überreicht eine Abhandlung: „Über einen Apparat zu Coïncidenzbeobachtungen bei Schwerebestimmungen mit Hilfe des Reversionspendels“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia Pontificia de' nuovi Lincei: Atti. Anno XXVII, Sess. 6ª. Roma, 1874; 4°.

Astronomische Nachrichten. Nr. 2010—2016 (Bd. 84. 18—24.) Kiel, 1874; 4°.

Basel, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1873/4. 4° & 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX. Nrs. 19—20. Paris, 1874; 4°.

Czyrniański, Emil, Chemija nieörganiczna. Widanie trzecie. Kraków, 1874; 8°.

Gesellschaft, k. k., der Ärzte: Medizinische Jahrbücher. Redigirt von S. Stricker. Jahrgang 1874. II., III. & IV. Heft. Wien; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 22. Wien, 1874; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 43—48. Wien, 1874; 4°.

Journal für praktische Chemie, von H. Kolbe. N. F. Band VIII, 10. Heft.; Band X, 7. & 8. Heft. Leipzig, 1874; 8°.

Landbote, Der steirische. 7. Jahrgang, Nr. 24. Graz, 1874; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1874, Nr. 16—17. Wien; 4°.

Mittheilungen aus J. Perthes' geographischer Anstalt. 20. Band, 1874. XI. Heft. Gotha; 4°.

Nature. Nr. 261, Vol. X. Nrs. 264 & 265, Vol. XI. London, 1874; 4°.

Observatorio de Marina de la ciudad de San Fernando: Almanaque náutico para 1875. Barcelona, 1874; 4°.

Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino meteorologico. Vol. VII, Nr. 6 (1872); Vol. VIII, Nr. 12 (1873); Vol. IX, Nr. 1 (1874). Torino; 4°.

Packard, A. S., Third Annual Report on the Injurious and Beneficial Insects of Massachusetts. Salem, 1873; 8°. — Catalogue of the Phalaenidae of California. Nr. II. Boston, 1874; 8°. — Catalogue of the Pyralidae of California, with descriptions of new Californian Pterophoridae. Salem, 1873; 8°.

„Revue politique et littéraire" et „Revue scientifique de la France et de l'étranger". IV° Année, 2° Série, Nrs. 21—22. Paris, 1874; 4°.

Smithsonian Institution: Annual Report. For the Year 1872. Washington, 1873; 8°.

Societät, physikal.-medicin., zu Erlangen: Sitzungsberichte. 6. Heft. Nov. 1873 bis Aug. 1874. Erlangen, 1874; 8°.

Société Impériale des Naturalistes de Moscou: Nouveaux Mémoires. Tome XIII, Livraison IV. Moscou, 1874; 4°.

— Botanique de France: Bulletin. Tome XX°. 1873. Session extraordinaire, Juillet 1873; Tome XXI° 1874. Revue bibliographique B—C. Paris; 8°.

— Géologique de France: Bulletin. 3° Série. Tome II°. 1874. Nr. 5. Paris; 8°.

Strassburg, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1873/4. 8°.

Verein, naturwissenschaftl., von Neu-Pommern und Rügen: Mittheilungen. V. & VI. Jahrgang. Berlin, 1873 u. 74; 8°.

— siebenbürgischer, für Naturwissenschaften: Verhandlungen und Mittheilungen. XXIII. & XXIV. Jahrgang. Hermannstadt, 1873 & 1874; 8°.

Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg: Württembergische naturwissenschaftliche Jahreshefte. XXX. Jahrgang. 1., 2. & 3. Heft. Stuttgart, 1874; 8°.

— für Erdkunde zu Dresden: XI. Jahresbericht. Dresden, 1874; 8°.

Vierteljahresschrift, österr., für wissenschaftliche Veterinärkunde. XLII. Band, 1.—2. Heft. Wien, 1874; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 47—48. Wien, 1874; 4°.

Entwickelungsvorgänge im Eichen von Serpula nach der künstlichen Befruchtung.

Von Prof. **S. L. Schenk** in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. November 1874.)

Beobachtungen, die ich an passenden Objecten anzustellen in der Lage war, und die mir Aufschluss gaben über eine Reihe von ungekannten Erscheinungen, veranlassen mich, einige Vorgänge im Eichen, unmittelbar nach der Besamung, einer erneuerten Schilderung zu unterziehen.

Die Veränderungen, welche man bisher an befruchteten Eiern, kurze Zeit nach der Befruchtung, kennt, sind kurzgefasst folgende: Man schildert das Eindringen der Spermatozoën, das Schwinden des Keimbläschens und den bald darauf vor sich gehenden Process der Zerklüftung des Zooplasma's, welchen Vorgang man mit dem Namen des Fruchtungsprocesses bezeichnet.

Manche Andeutungen lagen mir aus den Untersuchungen an Eiern von Wirbelthieren vor, die hinreichend waren, anzunehmen, dass die erwähnten und beschriebenen Vorgänge an den besamten Eiern noch nicht sämmtliche Glieder in der Kette der Erscheinungen der ersten Entwicklungsvorgänge enthalten. Es sind noch einige Erscheinungen einzufügen, welche ich beobachten konnte und deren Zusammenstellung den wesentlichen Inhalt der vorliegenden Zeilen ausmacht.

Als Beobachtungsobject dienten mir die Eichen von *Serpula uncinata* (Grube) oder *Serpula eupomat. uncinat.* (Philippi); ferner waren die Eier der *Phallusia intestinalis* erwünschte Untersuchungsobjecte. Bei beiden Thieren wurde die künstliche Befruchtung eingeleitet und die Eichen während ihrer Entwicklung im Meerwasser beobachtet. Die künstliche Befruch-

tung von *Serpula* kann in der einfachsten Weise vorgenommen werden. Es werden die harten Schalen eröffnet und das in denselben befindliche und der Schale bare Thier krümmt sich gegen die Rückenfläche zusammen, wobei ein Erguss von Samen beim Männchen und von Eiern beim Weibchen stattfindet.

Es scheint hiebei das Thier seiner Hülle entblösst, einem eigenthümlichen Hautreize auf der Körperoberfläche ausgesetzt zu sein, wodurch vielleicht auf reflectorischem Wege die in der Leibeshöhle des Thieres enthaltenen Producte des Genitalsystems, welche bei der Contraction des Körpers einem höheren Drucke ausgesetzt sind, aus der Leibeshöhle entfernt werden.

Man beobachtet alsdann, dass auf einem grösseren Theile der Bauchfläche, näher zu beiden Seiten des Thierleibes, die Eichen oder das Sperma den Körper verlassen.

Die Öffnungen liegen zwischen den einzelnen Segmenten und sind nur dadurch wahrnehmbar, dass man an Schiefschnitten auf die Längsachse des Körpers die Eichen oder das Sperma bis an die Oberfläche des Thieres reichen sieht, so dass man durch diese kleinen Spalträume bis in die Leibeshöhle *(Coelom)* des Thieres gelangen kann.

Die erwähnten Angaben über die Entleerung der Zeugungsstoffe stehen bei *Serpula* nicht isolirt da.

Ebrard[1] sah unter Anderen bei dem Blutegel, wenn der Letztere Eier in feuchte Erde legte, Bewegungen, die sich als Krümmungen des Körpers manifestirten. Ferner zeigte Leukart und Pagenstecher[2] bei einigen Anneliden, dass selbe ihre Eier durch spaltförmige Öffnungen aus dem Körper entfernen. Nur ist bei der *Serpula uncinata* hervorzuheben, dass sie unter den Chaetopoden als ein mit getrenntem Geschlechte versehenes Individuum anzusehen ist, während die meisten Thiere dieser Species Zwitter[3] sind.

---

[1] Ebrard, Nouvelle Monographie des sangsues medic. etc. Paris 1861.

[2] Henle und Meissner's Jahresber. 1861, p. 171.

[3] Supplementband. Les Annélides chaetopodes du Golfe de Naples, par Ed. Claparède. Genève et Bâle. 1870.

Mecznikoff stellte Untersuchungen an den rabdocoelen Turbellarien an und theilt mit, dass bei dem von Oscar Schmidt und M. Schulze beschriebenen *Prostomum lineare* die weiblichen und männlichen Organe verschieden stark in verschiedenen Individuen entwickelt sind. Es waren zwei Geschlechtsöffnungen vorhanden, eine männliche und eine weibliche. Nur bei einer Rabdocoele von Schmarda *(Acmostomum)* beobachtete Mecznikoff ein vollständiges männliches Exemplar.

Die Producte der Genitaldrüsen finden sich bei *Serpula uncinata* in der Leibeshöhle und erstrecken sich vom Schwanzende angefangen bis ungefähr zum sechsten Segmentalring oder bis zum Kragen, der ein Product der Horngebilde ist.

Um im Allgemeinen eine Übersicht über die Lage der Genitaldrüsen zu gewinnen, versuche ich hier ein naturgetreues Bild vom Querschnitte aus der Mitte des Körpers eines männlichen (Fig. 1) und eines weiblichen Thieres (Fig. 2) zu bringen.

An den umgebenden Horngebilden (*a*) beobachtet man in den Figuren 1 und 2 kleine stachelförmige Erhabenheiten (*st*) von homogener Structur, die von Carmin nicht gefärbt erscheinen, während die anderen Gebilde vollständig bei Carminbehandlung gefärbt sind. Sie liegen an Gebilden der eigentlichen Cutis (*b*), in welcher die Muskelzüge (*M*) sich inseriren. In der Hautschichte sieht man zuweilen zerstreut liegende, grössere, von Carmin gefärbte, rundliche Körper (*P*), die aus einem körnigen Protoplasma bestehen. Der Cutisschichte schliesst sich eine Lage von Fasern (*M*) an, welche der Muskellage bei den Würmern entspricht und deren Anordnung bei *Serpula uncinata* derart ist, wie bei den doppeltgefiederten Muskeln der höheren Thiere. Nur konnte ich an den Fasern dieser der Muskelschichte entsprechenden Lage bei *Serpula uncinata* keine Querstreifung wahrnehmen.

Die Vertheilung der Muskelfasern ist mit Rücksicht auf die Bauch- (*B*) und Rückenfläche (*R*) des Thieres eine verschieden starke. Am Rückentheile (*R*), vom Schwanze bis zur Höhe des Kragens ist die Muskelschichte (*M*) sowohl beim männlichen (Fig. 1), als auch beim weiblichen Geschlechte eine stark ausgebildete, während an der Bauchfläche (*B*) nur zu beiden Seiten der Mittellinie eine spärlich vertheilte Muskulatur ($M_{,}$) zu sehen ist.

An den seitlichen Stellen (*S*), wo keine Muskulatur an der Haut liegt, findet man die Eichen (*E* Fig. 2) oder das Sperma (*Sp*. Fig. 1) der Hautbedeckung anliegen. An diesen Stellen begegnet man an Schiefschnitten Öffnungen, durch welche die Spermatozoën oder die Eichen aus der Leibeshöhle treten. Man trifft nicht selten die Eichen an den Durchschnitten auf der Oberfläche des Thieres liegen und im Zusammenhange mit jenen, welche in der Leibeshöhle des Thieres liegen.

Die beschriebene Vertheilung der Muskulatur bedingt es, dass die *Serpula* nach der Entfernung der Schale sich derart krümmt, dass die Concavität der gekrümmten *Serpula* stets nach der Rückenfläche, als jenem Theile des Thieres gewendet ist, an dem wir die Muskulatur massenhafter vertreten finden. In der Mitte des Querschnittes ist der Darmkanal ($D_{,}$) mit einer Menge von Vorsprüngen versehen (*v*), die als Durchschnitte von Längsleisten[1] im Darme angesehen werden können. Die innere Auskleidung des Darmrohres bildet ein Cylinderepithel (*C*).

Um das Darmrohr ($D_{,}$) trifft man auf dem Querschnitte eigene Röhrenverzweigungen (*G*) von Blutbahnen, die einerseits dem Darme anliegen, anderseits ein Netzwerk von Verzweigungen bilden, die im Raume zwischen dem Darme ($D_{,}$) und der Muskellage (*M*) sich befinden. Dieses Netzwerk von Gefässen ist zum guten Theile der Träger der Eichen (Fig. 1 *E*) oder des Sperma (Fig. 1 *S*), je nach dem vorhandenen Geschlechte des Thieres.

Nachdem wir Einiges über die Anatomie des Thieres mittheilten, wollen wir zum künstlichen Befruchtungsversuche bei *Serpula uncinata* zurückkehren.

Bringt man ein männliches und weibliches Individuum ohne Kalkröhre in eine mit Meerwasser gefüllte Uhrschale, so entleeren beide Thiere unter Krümmungen des Körpers den Inhalt ihres Genitalraumes.

Nach kurzer Zeit treten die Veränderungen auf, welche in Folge der stattgehabten Befruchtung am Eichen sich zeigen.

Ihre Beschreibung bildet den Hauptinhalt des Folgenden.

---

[1] Im oberen Viertel des Thieres bekommt man nur ein ovales Lumen auf dem Querschnitte des Darmes, ohne Andeutungen von Leisten.

Bevor wir aber zur Ausführung des Letzteren schreiten, ist eine Beschreibung des unbefruchteten reifen Eichens von *Serpula uncinata* vorauszuschicken. Das frisch gelegte Eichen ist rund und misst im Durchmesser ungefähr 0·08 — 0·06 Mm.

Man beobachtet an demselben (Fig. 3) eine umhüllende Membran (*Z*), ferner einen feinkörnigen Dotter (*D*), welcher, wie die Ergebnisse der Entwickelung lehren, nur aus einem Bildungsdotter besteht. Innerhalb desselben ist das Keimbläschen (*K*) zu sehen, welches rund ist und ohngefähr den halben Radius des Eikreises im optischen Querschnitte einnimmt. Im Keimbläschen liegt seitlich das Keimkörperchen, der Keimfleck (*Kf*), Seine Lage ist gewöhnlich excentrisch.

Wird an solchen Eichen die Besamung vorgenommen, so beobachtet man zunächst ein Anhaften der Spermatozoën in einer solchen Weise, dass dieselben nur durch mechanische Eingriffe, die das Eichen zerstören, von dem letzten entfernt werden können.

Alsbald tritt die erste Veränderung in der Gestalt und Form des Keimbläschens auf (Fig. 4).[1] Während dieser Veränderungen am Keimbläschen hören die Bewegungen jener Spermatozoën, welche dem Eichen anliegen, auf.

Das runde bläschenförmige Gebilde (*K*) wird zunächst zackig. Die Änderung seiner Form ist durch die Bewegung der Körnchenmassen die den Dotter bilden, bedingt, indem kleinere und grössere radiär gestellte Vorsprünge der Dottermasse gegen das Centrum des Keimbläschens gestellt werden.

Der Übergang der Form des Keimbläschens von reifen Eichen (Fig. 3) bis zum Schwunde des Keimbläschens kann man an einem und demselben Eichen unter dem Mikroskope beobachten, da der Übergang des einen Zustandes in den zweiten kurze Zeit nach der Besamung und nachdem die Eichen den Mutterboden verlassen haben, stattfindet. Gleichzeitig wird das Areal des Keimbläschens kleiner und es rückt unter mehrfacher passiver Gestaltänderung, die durch die Bewegung und Ortsveränderung der Körnchenmasse des Dotters innerhalb des Eichens bedingt

[1] Zu vergleichen mit Fig. 3.

ist, mehr excentrisch, bis es ganz am Rande des Dotters liegt, (Fig. 5). Während die Körnchen des Dotters gegen den centralen Theil des Eichens vorrücken, wird der Randtheil des Dotters lichter (Fig. 4), da an dieser Stelle die Körnchen des Dotters weniger dicht aneinanderstehen, als dies früher der Fall war, solange das Keimbläschen unverändert in der Mitte des Eichens lag. Hierauf wird die hellere Partie im Eichen, welche am Rande liegt und dem Keimbläschen entspricht, immer kleiner, bis man im Eichen keine Stelle mehr beobachten kann, die durch ihre Helligkeit als ein bemerkbarer Überrest des Keimbläschens zu betrachten wäre. Während die Stelle des Keimbläschens durch einen Theil der Dottermasse ausgefüllt wird, sieht man den Keimfleck (*Kf*) aus der Dottermasse treten, bis derselbe zwischen dem Dotter (*D* Fig. 5) und der selben umgebenden Hülle (*Z*) liegt. Die Veränderungen des Keimbläschens kann man auch zuweilen an Eiern beobachten, an denen keine Besamung vorgenommen wurde. Ein Austreten des Keimfleckes zu beobachten gelang mir an unbefruchteten Eiern nicht. Bei besamten Eiern dagegen, liegt der Keimfleck einige Zeit zwischen der Dotterhaut und dem Dotter, als rundes Gebilde. Bald verflacht es sich, so dass die aus der Kreislinie des Eichens (Fig. 5), durch den Keimfleck hervorgetriebene Dotterhaut in ihre frühere Lage zurücktritt (Fig. 6). Die Verflachung des Keimfleckes geht so weit, bis sich dasselbe der Oberfläche des Dotters anlegt, um bald darauf dem Beobachter keine bemerkbare Spur von seiner Existenz sehen zu lassen.

Das Ei in diesem Zustande stellt eine feinkörnige Masse dar, welche in der Eihülle eingeschlossen ist, und besteht nur aus dem Dotter, der in toto in den Furchungsprocess einbezogen wird.

Wir ersehen nun hieraus, dass das Keimbläschen durch die sich verschiebende körnige Masse des Dotters aus dem Letzteren gegen den Rand des Eichens gedrängt und aus dem Dotter gänzlich eliminirt wird. Hiebei gelangt das kleine Gebilde im Keimbläschen, welches wir als Keimfleck bezeichnen, an die Oberfläche des Dotters. Es erscheint deutlich mit Carmin gefärbt, wenn man eine solche Tinction am Eichen vornimmt.

Es scheint das Austreten des Keimbläschens aus dem Dotter an befruchteten und unbefruchteten Fisch- und Vogeleiern (Oellacher[1] ähnlich dem Vorgange bei *Serpula uncinata* zu sein. Nur ist bei letzterem Thiere der Vorgang des Eliminirens des Keimbläschens leicht zu beobachten, und lässt sich der ganze Process, so wie bei den Wirbelthieren, mit den Bewegungserscheinungen im Dotter, respective der Bewegung der Körnchenmassen in denselben, in Verbindung bringen.

Man kann sich nicht leicht verleitet sehen, dem Gebilde, welches wir als den aus dem Dotter ausgestossenen Keimfleck[2] betrachten, eine solche Rolle zu vindiciren, wie Robin seinen „*Globules polaires de l'ovule*" sie zuschreibt, da wir die Schicksale des Keimfleckes im diesem Falle nicht weiter verfolgen können. Wir wissen nur aus directer Beobachtung, dass derselbe sich flach dem Dotter anlegt und endlich von dem Letzteren nicht zu unterscheiden ist. Ein Auftreten der *Globules polaires* an den Eichen von *Serpula uncinata* oder *Phallusia intest.* zu beobachten war ich nicht in der Lage.

Der Zustand des befruchteten Eichens ohne Kern und Kernkörperchen bleibt nur eine verhältnissmässig kurze Zeit. Bald sind an demselben die weiteren Entwickelungsvorgänge wahrzunehmen. Zu diesen ist zunächst die Retraction des Dotters zu zählen (Fig. 7). Diese manifestirt sich dadurch, dass man innerhalb der Eihülle einen Raum beobachtet (Fig. 7, *r*), der zwischen der Eihülle (*z*) und dem Dotter (*D*) liegt. Man kann nicht leicht die Vorgänge schildern, welche im Eichen während der Retraction des Dotters stattfinden, da die Retraction mit einem Male auftritt, ohne, dass man irgend welche Übergänge aus dem früheren Stadium in das der Retraction des Dotters beobachten kann. Die Retraction des Dotters wurde auch an den Eichen anderer Thiere beobachtet. Reichert hat selbe an den Eiern von Säugethieren beobachtet. Er bezeichnet den retrahirten Dotter als die erste unpaare Furchungskugel, die ein Ausgangsstück für die

---

[1] Oellacher, Beiträge zur Geschichte des Keimbläschens im Wirbelthiere. — Arch. f. mikroskop. Anat. VIII. Bd.

[2] Er liegt an derselben Stelle, an welcher die *Globules polaires* gezeichnet werden.

weiteren Furchungsproducte wäre. Kovalevsky[1] beschreibt Contractionen an Dotter von Eiern der Rippenquallen. Stricker[2] und Oellacher[3] sahen solche an den Eiern der Fische. Ich[4] beobachtete Contractionserscheinungen an dem Bildungsdotter von *Raja quadrimaculata*. Ferner beschreibt Robin[5], dass der Dotter bei *Nephelis* vor der Furchung sich auffällig retrahirt.

Es scheint, dass die Retraction des Dotters von der Eimembran bei Serpulaeiern nur ein Ausdruck der Contractionserscheinungen wäre, welche bei diesem Eidotter sich vielleicht in einer anderen Weise präsentirt, als bei den Eiern anderer Thiere. Bei diesen beobachtet man eine Wiederholung der Contraction in Form der Aussendung rundlicher, buckelförmiger Fortsätze über die Oberfläche des Dotters, welche bald eingezogen werden. Die Retraction schwindet aber im Eichen bald, indem der Dotter gleichmässig den ganzen Raum innerhalb der Eihülle ausfüllt.

Hierauf treten die zwei ersten Stücke des Dotters als die ersten Furchungskugeln auf. Jedoch gehen mit dieser ersten Zerklüftung Vorgänge einher, welche bisher die Aufmerksamkeit der Fachmänner nur im geringen Masse auf sich lenkten. Es sind dies abermals Localveränderungen der Körnchenmasse, die den Hauptbestandtheil des Dotters ausmacht. Diese Bewegung der Körnchenmasse führt zur Bildung des Kernes. Das Eichen, welches die Körnchenmasse gleichmässig vertheilt enthält, zeigt bald in der Mitte des Dotters eine hellere Partie, ähnlich einem Kerne. Sein Entstehen ist unter dem Mikroskope zu beobachten. Der entstandene Kern liegt nicht an der Stelle

---

[1] Kovalevski, Entwicklungsgeschichte der Rippenquallen. Mém. de l'Acad. des sc. St. Pétersbourg, X, Nr. 4, 1866.

[2] Stricker, Untersuchungen über d. Entwicklung der Bachforelle. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien 1865.

[3] Oellacher, Beitr. z. Entwicklung der Knochenfische. Leipzig 1872. Zeitschr. f. wissensch. Zool. XXII. u. XXIV. Bd. 1. Heft.

[4] Schenk, Die Eier von *Raja quadrimaculata* innerhalb der Eileiter. Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wiss. Wien 1873.

[5] Robin, Mémoires sur les phénomènes, qui se passent dans l'ovule, avant la ségmentation du vitellus. Journal de la Physiol. 1872.

des aus dem Dotter geschwundenen Keimbläschens, noch besitzt er gleich dem Keimbläschen eine genau umschriebene Grenzcontour, sondern er verliert sich unregelmässig in radiärer Richtung und steht mit dem Protoplasma des Eichens in continuirlichem Zusammenhange. Untersucht man diesen Kern näher, so überzeugt man sich, dass derselbe kein isolirtes Gebilde innerhalb des Leibes eines Eichens darstellt, welches von der Beschaffenheit des übrigen Theiles des Dotters wesentlich verschieden wäre. Der Kern ist heller, er stellt als solcher einen undeutlich contourirten, central gelegenen Abschnitt vom Protoplasma des Eichens dar, in welchem die Körnchen des Dotters weniger dicht an einander stehen. Sein Auftreten hängt mit dem Vorgehen des Retractionszustandes des Dotters zusammen. In dem Maasse, als der entstandene Raum zwischen der Dotterhaut und dem Dotter schwindet, entsteht und vergrössert sich der centrale helle Theil des Dotters, welcher sich als Kern präsentirt. Solche entstandene Kerne sind mir mit ihren strahligen Ausläufern aus den Untersuchungen an Wirbelthiereiern bekannt. Nur fand ich selbe nicht im ganzen, unzerklüfteten Dotter entstanden, sondern an den Furchungskugeln des zerklüfteten Dotters. So begegnet man nicht selten Kernen mit strahligen Ausläufern an den sogenannten Furchungskugeln des Fischkeimes *(salmo)*, ferner an den Furchungsstücken im Drüsenkeime bei den schwanzlosen Batrachiern. In allen eben erwähnten Fällen fand ich, selbst nachdem die Eichen mit verdünnter Chromsäure behandelt wurden, im gefurchten Dotter mehrere Furchungskugeln, die einen radiär auslaufenden Kern enthielten. Allerdings waren auch daneben Furchungselemente mit rundem Kerne.

Zuweilen sieht man den ersten Kern mit radiärer Streifung an den Eiern von *Serpula* anscheinend in zwei Theile getheilt, welche Theilung meist nur zu einer Zeit zu beobachten war, während welcher die erste Trennung des Keimes in zwei Furchungsstücke vorbereitet wurde.

Man konnte in diesem Falle bei einer Einstellung des Mikroskopes, bei welcher man die Schichte des Kernes im deutlichen Sehen hatte, nur einen Kern mit seinen zugehörigen radiären Ausläufern beobachten. Hingegen sah man bei einer Einstellung der über dem Kerne gelegenen Schichte den Kern

anscheinend in zwei Theile getheilt, bedingt durch das Auftreten der Trennungslinie, welche zwischen den zwei ersten Furchungskugeln liegt, die sich über dem Kerne im Zooplasma befanden. Die Trennungslinie der zwei ersten Furchungskugeln charakterisirt sich dadurch, dass die einzelnen Körnchen an der Furche dichter an einander liegen, was sowohl für *Serpula* als auch für *Phallusia intest.* gilt. Ja ich war sogar in der Lage, an Durchschnitten von in Chromsäure gehärteten Eiern von *Bufo cin.* dieselbe Beobachtung constatiren zu können. Die dichter an einander gelegene Körnchenmasse zwischen den beiden ersten künftigen Theilungsstücken gibt bei undeutlicher Einstellung des Kernes eine anscheinend beginnende oder bereits stattgehabte Theilung des Kernes.

In seinen Studien über die Entwicklungserscheinungen an dem Eichen der Teichmuschl beobachtete Flemming[1] sowohl an dem ungefurchten Eichen, als auch in den Furchungskugeln radiär gestreifte helle Kerne.

Flemming bildet solche vollständig getheilte Kerne ab, welche Beobachtung man an den Furchungskugeln der Forellenkeime, und am ungefurchten Dotter von *Serpula* oder *Phallusia* bestätigen kann. Ich sah öfter, wenn eine Theilung am Eichen unter dem Mikroskope während meiner Beobachtung vor sich ging, dass eines von den entstandenen Furchungsstücken den ganzen Kern enthielt, während das andere Stück kernlos blieb. In diesem entstand erst später der Kern, und zwar in derselben Weise, wie ich es am ganzen Eichen zur Beobachtung bekam. Die Körnchenmasse häufte sich im peripheren Theile des Furchungsstückes dichter an, dass es dabei central zur Bildung einer lichteren Stelle kam, welche sich ähnlich dem Kerne mit seinen radiären Ausläufern im ganzen Eichen gestaltete. Man sah in ihm die Körnchen weniger dicht an einander liegen, als im übrigen Protoplasma des Furchungsstückes, wesshalb er im durchfallenden Lichte heller erscheint. Man ersieht hieraus, dass sowohl an den Theilungsproducten als auch am ganzen Eichen die Kernbildung durch eine ungleichmässige Vertheilung der Körnchenmasse zu Stande kam, wobei im Protoplasma cen-

---

[1] Flemming, Archiv f. mikroskop. Anatomie. Bd. X, Heft 3, 1874.

tralwärts eine lichte Stelle zu beobachten ist. Der radiär auslaufende Kern gestaltet sich in den meisten Fällen zu einem kreisförmig umschriebenen Kerne um, wie man ihn in allen bisher bekannten Abbildungen sieht. Allein alle kreisförmig umschriebenen Kerne scheinen vielleicht nicht in allen Fällen in der beschriebenen Weise entstanden zu sein. Es ist möglich und ich gebe es gerne zu, dass es auch andere mir nicht bekannte Entstehungsweisen von Kernen im ganzen Dotter und den Furchungsstücken der sich entwickelnden Eier gibt. Jedoch ist die eben beschriebene Weise nach meinen Beobachtungen sowohl an *Serpula-* und *Ascidien*-Eiern, als auch an den Eiern einiger Vertebraten als festgestellt zu betrachten. **Der Kern ist in den Furchungsstücken** nach seiner Entstehungsweise als ein centraler Theil **des Protoplasma's aufzufassen**, mit weniger dicht an einander stehenden Körnchen, welcher **aus dem Protoplasma entstanden ist.** Protoplasma und Kern sind mit einander innig vereinigt.

Hieran knüpfe ich noch einige Beobachtungen über den Furchungsprocess an, die ich an den Eiern der *Serpula* und der einfachen *Ascidien* gemacht habe. Sie scheinen im Wesentlichen nicht von den Vorgängen, welche an anderen Thieren beobachtet wurden, abzuweichen. Sowohl im Rythmus der Furchung, als auch in der Anordnung der Elemente um eine frühzeitig angelegte Höhle, stimmen die Eichen dieser Thiere mit den übrigen überein. Bald nachdem das Eichen central einen hellen Kern besitzt, beginnt die regelmässige Theilung des Dotters. Ihr geht eine dichtere Anhäufung der Körnchenmasse im Protoplasma voraus. Man sieht anfangs bloss dunkle Streifen, die den späteren Furchen entsprechen. Bald sieht man an der Stelle der dunklen Streifen vom Rande her eine Furche entstehen, die anfangs gleich einem kleinen Einschnitte erscheint, später aber tiefer wird. Von beiden Seiten kommen die Furchen im Centrum zusammen und treten in directen Zusammenhang.

Durch die Untersuchungen Brücke's[1] über den Bau der kernhaltigen Blutkörperchen wurden wir belehrt, dass jenes

[1] E. Brücke. Über den Bau der rothen Blutkörperchen. Sitzungsb. d. k. Akad. d. Wiss. Wien. 56. Bd. 2. Abth. p. 79.

Stück, welches wir gemeinhin als Kern in den Blutkörperchen bezeichneten, kein isolirtes Gebilde darstellt, sondern dass derselbe noch mit einem Theile des übrigen Zellenleibes, den fortsatzähnlichen Trägern des Hämoglobins [1], in continuirlichem Zusammenhange steht. Ferner zeigte Fleischl [2], dass der Kern in den Ganglienzellen nicht das kugelige, ringsum begrenzte Gebilde ist, sondern zu ihm gehören noch eine Reihe von Fortsätzen, durch welche er mit dem Zellenleibe in continuirlichem Zusammenhange steht. Man ersieht hieraus, dass der Kern sowohl genetisch, als auch nach den Beobachtungen an einzelnen ausgebildeten Elementen nicht als ein vom übrigen Protoplasma anatomisch Trennbares anzusehen ist. So haben wir aus dem ersten unpaaren Stücke zwei erhalten, deren Rand eine dichtere Anhäufung der Körnchen zeigt. In ähnlicher Weise treten die Furchen in späteren Stadien auf. Nur ist zu beobachten, dass bei der beginnenden Vertheilung des Dotters sowohl von innen, d. i. von jener Stelle, die centralwärts an einer der zwei ersten Furchungskugeln liegt, als auch von aussen, d. i. vom Eiumfange der ersteren Stelle entgegengesetzt, mit einander zusammentreffen und sich vereinigen. Die Kerne an den einzelnen Furchungsstücken entstehen zumeist in der beschriebenen Weise. Abweichungen von der geschilderten Beobachtung beschränken sich zumeist nur darauf, dass die einzelnen, entstandenen Stücke nicht gleich gross sind. Ferner besitzen nicht alle Furchungsstücke, die zu gleicher Zeit zu sehen sind, Kerne und wenn sie solche besitzen, so sind sie bei dem einen circumscript, bei den anderen laufen sie radiär aus. Endlich beobachtet man nicht selten eine unpaare Anzahl von Furchungsstücken. Drei oder fünf Stücke sind oft zu sehen.

Bald tritt die weitere Zerklüftung des Dotters auf, so dass man eine grössere Anzahl von Furchungsstücken sieht. Dabei ist eine Furche zu beobachten, die als die grösste gilt, welche

---

[1] Kern, Fortsätze sammt Haemoglobin zusammen werden als Zooid bezeichnet.

[2] Fleischl E. Über die Wirkung von Borsäure auf frische Ganglienzellen. Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien. LXI. Bd. 2. Abth. 1870.

mit der ersten Äquatorialfurche bei den Eiern der Wirbelthiere zu vergleichen ist. Sie wird von mit einander parallel laufenden Furchen gekreuzt, die mit den Meridionalfurchen bei den Wirbelthieren zu vergleichen sind. Beim Weiterschreiten des Furchungsprocesses ordnen sich die Furchungskugeln um eine central gelegene Höhle (Fig. 9, *h*) an. Man sieht alsdann zwei concentrische Lagen von Furchungsstücken, wie sie Kovalevsky[1] an sich entwickelnden Eiern von Arthropoden und Würmern zeichnet und beschreibt. Die centrale Höhle ist der Furchungshöhle der Säugethiere gleichzustellen. Bei beiden findet man anfangs die grossen Furchungskugeln als die die Höhle umgebenden Gebilde.

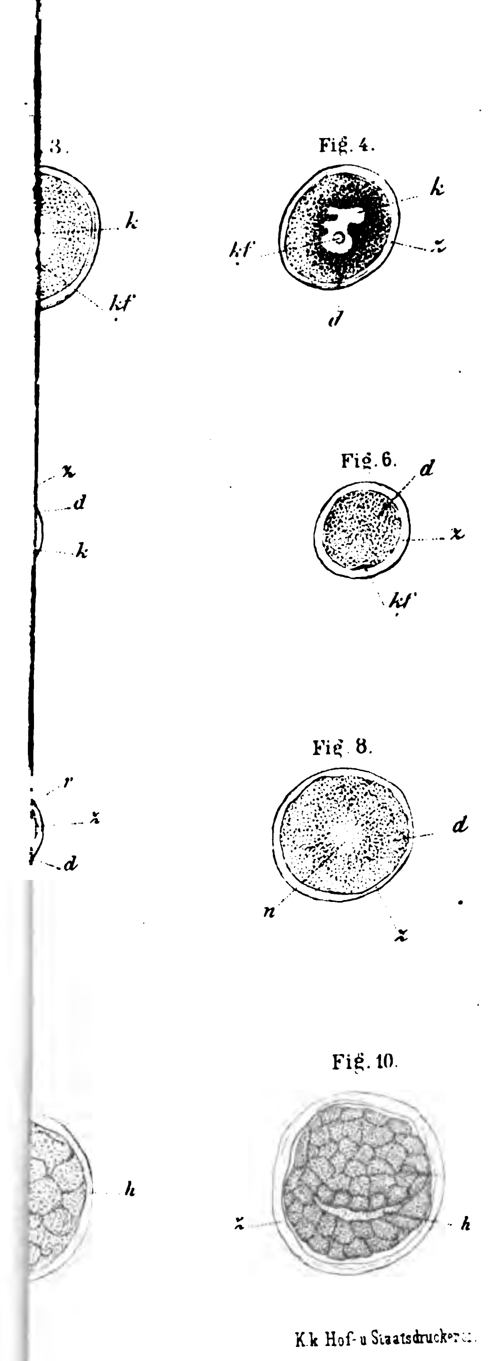
In diesem Zustande macht das Ei rasche Drehbewegungen, bedingt durch die Bewegung sehr feiner Cilien, deren Entstehungsweise mir vollständig unbekannt ist. Es scheint, als wenn es die Reste der am Eichen haftenden Spermatozoën wären, deren Kopftheile vollkommen unsichtbar sind, deren Schwanztheile aber als sich bewegende Flimmerhärchen die drehende Bewegung veranlassen. Bald verändert die Höhle ihre Form, sie wird dreieckig und kommt ausserhalb des Centrums des Eichens zu liegen. Sie befindet sich alsbald in einer Eihälfte, deren grössten Theil sie ausmacht. Die Furchungsstücke sind alsdann in einer anderen Weise angeordnet, als wir dies in Fig. 9 abbildeten. Die Höhle wird in einem Theile, ungefähr der halben Circumferenz des Eichens, nur von zwei Reihen von Zellen begrenzt, während in der anderen Hälfte die gefurchten Stücke massenhafter angeordnet sind. Wir kommen hier jenem Stadium der Entwickelung im Batrachiereie näher, in dem wir eine Furchungshöhle, über selber eine dünne Decke und unter ihr einen dicken Boden der Höhle sehen. Bald daranf wird die Höhle in der Richtung des Querdurchmessers länger, so dass selbe endlich ein spaltförmiges Aussehen gewinnt (Fig. 10, *h*). Die umgebenden Elemente dieser Höhle sind deutlich contourirte Furchungskugeln. Von ihnen ist zu bemerken, dass selbe sowohl an der Decke, als auch im Boden

---

[1] Entwicklungsgeschichte der Arthropoden und Würmer. Petersb. Akad. d. Wiss. 1873.

der Höhle von gleicher Grösse sind, was mit den Verhältnissen am Batrachiereichen bezüglich der Ausbildung der Dotterhöhle nicht übereinstimmt, da bei diesem die Elemente an der Decke der Furchungshöhle kleiner, als am Boden derselben sind, wo man sogar noch grösseren, ungefurchten Massen begegnet.

Zum Schlusse spreche ich dem Herrn Dr. v. Syrski, Director des Museums in Triest, für sein freundliches Entgegenkommen bei meinen Arbeiten am Meere, meinen herzlichen Dank aus.



K.k. Hof- u Staatsdruckerei.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1 und 2 stellen Querschnitte aus der Mitte des Thierleibes von *Serpula uncinata* (Grube) dar.
„ 3. Ein unbefruchtes Ei der *Serpula.*
„ 4. Befruchtetes Eichen desselben Thieres mit der veränderten Gestalt des Keimbläschens.
„ 5. Ausgetretener Keimfleck an demselben Ei.
„ 6. Verflachung des Keimfleckes.
„ 7. Retraction des Dotters.
„ 8. Der Dotter nach der Retraction, Auftreten des Kernes.
„ 9 und 10. Eichen von *Serpula* mit der Furchungshöhle.

a. Epidermis.
B. Bauchfläche des Thieres.
b. Cutis und subcutanes Gewebe.
D. Dotter *D*, Darm.
E. Eichen.
G. Gefässe.
H. Furchungshöhle.
K. Keimbläschen.
Kf. Keimfleck.
M. Musculatur am Rücken.
M. Musculatur am Bauche.
N. radiär auslaufender Kern.
P. Grössere Körperchen in der Cutis.
R. Rückenfläche des Thieres.
r. Lücke durch Retraction des Dotters entstanden.
s. Sperma.
St. Horngebilde, (Stacheln).
V. Vorsprünge in dem Darm.
Z. Eikapsel.

XXVIII. SITZUNG VOM 10. DECEMBER 1874.

Der Secretär theilt drei Schreiben, von den Herren Dr. F. Steindachner, Prof. Dr. Camil Heller und Dr. E. v. Marenzeller, mit, worin diese ihre Bereitwilligkeit aussprechen, die von der österr.-ungar. Polarexpedition mitgebrachten Thiere zu bearbeiten, und zwar wird Steindachner die Fische, Heller die Crustaceen und Ascidien und v. Marenzeller die übrigen niederen Thiere übernehmen.

Der akademische Verein der Mathematiker und Physiker in Wien dankt, mit Zuschrift vom 3. November, für die Betheilung mit dem „Anzeiger" der Classe.

Se. Excellenz Herr Vice-Admiral B. Freiherr von Wüllerstorf-Urbair übersendet eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung, betitelt: „Die meteorologischen Beobachtungen und die Analyse des Schiffcurses während der Polarexpedition unter Weyprecht und Payer 1872—1874."

Herr Dr. F. Steindachner übermittelt eine Abhandlung: „Die Süsswasserfische des südöstlichen Brasiliens."

Herr Regierungsrath Dr. K. v. Littrow berichtet über den Erfolg der österr. Expedition zur Beobachtung des Venus-Durchganges in Jassy.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Accademia fisio-medico-statistica di Milano: Atti. Anno accademico 1874. Milano; 8°.

Annalen (Justus Liebig's) der Chemie. Band 174, Heft 3. Leipzig & Heidelberg, 1874; 8°.

— der k. k. Sternwarte in Wien. Dritte Folge. XXII. Band. Jahrgang 1872. Wien, 1874; 8°.

Antoine, Charles. Du roulis par calme. Brest, 1874; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 33—34. Wien, 1874; 8°.

Bertelli, P. D. Timoteo, Tromosismometro. Roma, 1874; 4°. — Appunti storici intorno alle ricerche sui piccoli e spontanei moti dei pendoli fatte dal secolo XVII in poi. Roma, 1873; 4°. — Sull' aurora boreale del 4 febbrajo 1872. Roma, 1873; 4°.

Bertin, L. E., Données théoriques et expérimentales sur les vagues et le roulis. Paris, 1874; 8°. — Étude sur la ventilation d'un transport-écurie, (et Rapport sur ce Mémoire). 4°. — Note sur la résistance des carènes dans le roulis des navires et sur les qualités nautiques, (et Rapport sur ce Mémoire). 4°.

Bibliothèque Universelle et Revue Suisse: Archives des sciences physiques et naturelles. N.P. Tome LIe. Nr. 203. Genève, Lausanne, Paris, 1874; 8°.

Brusina, Spiridion, Fossile Binnen-Mollusken aus Dalmatien, Kroatien und Slavonien. Agram, 1874; 8°.

Comitato, R., geologico d'Italia: Bollettino. Anno 1874, Nr. 7 e 8. Roma; gr. 8°.

Commission de météorologie de Lyon: Observations météorologiques faites à l'Observatoire de Lyon du 1er Déc. 1871 au 1er Déc. 1872. gr. 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 21. Paris, 1874; 4°.

Gesellschaft, k. k. geographische, in Wien: Mittheilungen. Band XVII (neuer Folge VII) Nr. 11. Wien, 1874; 8°.

— österr., für Meteorologie: Zeitschrift. IX. Band, Nr. 23. Wien, 1874; 4°.

— Wetterauische, für die gesammte Naturkunde: Bericht über den Zeitraum vom 1. Jänner 1868 bis 31. December 1873. Hanau, 1874; 8°.

— Deutsche, für Natur- und Völkerkunde Ostasiens: Mittheilungen. 5. Heft. Juli 1874. Yokohama; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 49. Wien, 1874; 4°.

Hamburg, Stadtbibliothek: Gelegenheitsschriften für d. J. 1873/4. 4°.

Jahresberichte: Siehe Programme.

Kiel, Universität: Academische Gelegenheitsschriften vom Jahre 1873. Band XX. Kiel, 1874; 4°.

Lanzillo, Vincent, L'électro-vigile ou moyen d'aviser les tentatives de vol et le commencement d'incendie. Turin, 1874; 8°.

Nachrichten über Industrie, Handel und Verkehr aus dem statistischen Departement im k. k. Handels-Ministerium. IV. Band, 3. Heft. Wien, 1874; 4°.

Nature. Nr. 266, Vol. XI. London, 1874; 4°.

Programme und Jahresberichte der Gymnasien zu Arnau, Brixen, Brünn, Eger, Feldkirch, Hermannstadt, Kaschau, Kremsmünster, Kronstadt, B.-Leipa, Leoben, Marburg, Pisek, Pressburg, Radautz, Roveredo, Saaz, Schässburg, Trient, des akademischen Gymnasiums, des Gymnasiums der k. k. Theresianischen Akademie und zu den Schotten in Wien, des Gymnasiums zu Zara, der k. k. technischen Hochschule in Wien und der Landes-Unterreal- u. Gewerbe-Schule zu Waidhofen an der Ybbs. 4° & 8°.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger.“ IVe Année, 2me Série, Nr. 23. Paris, 1874; 4°.

Schmidt, C., Hydrologische Untersuchungen. III—VI. 8° & 4°. — Essbare Erden aus Lappland und Süd-Persien. 8°.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Anno 1874, Disp. 10a. Palermo; 4°.

Société Linnéenne du Nord de la France: Bulletin mensuel. 3e Année. 1874. Nrs. 29—30. Amiens; 8°.

— de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux: Mémoires et Bulletins. 1er et 2e fascicules 1874. Paris & Bordeaux; 8°.

Toner, J. M., Contributions to the Study of Yellow Fever. Washington; 8°. — Dictionary of Elevations and Climatic Register of the United States. New-York, 1874; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang, Nr. 49. Wien, 1874; 4°.

XXIX. SITZUNG VOM 17. DECEMBER 1874.

Die Direction der k. k. geologischen Reichsanstalt ladet, mit Circular-Schreiben vom December l. J., zu dem am 5. Jänner 1875 zu begehenden Feste ihres 25jährigen Bestandes ein.

Die k. k. Gymnasial-Direction zu Saaz dankt, mit Zuschrift vom 19. November, für die Betheilung mit Separatabdrücken und dem Anzeiger.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

„Die genetische Gliederung der Flora Australiens", von Herrn Prof. Dr. Const. Freih. v. Ettingshausen in Graz. Diese Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

„Über eine neue Art von Variationstönen", von Herrn Dr. V. Dvořák, eingesendet von Herrn Regrth. E. Mach in Prag.

„Analyse des Poschitzer Sauerbrunnens" und Notiz für den Anzeiger: „Zur Kenntniss der Oxydationsproducte des Camphers", von Herrn J. Kachler in Prag, eingesendet durch Herrn Prof. Dr. A. Lieben.

„Über das Verhalten gesättigter Dämpfe", von Herrn Prof. K. Puschl in Seitenstetten.

Herr Director Dr. J. Stefan überreicht eine Abhandlung: „Über die Gesetze der magnetischen und elektrischen Kräfte in magnetischen und dielektrischen Medien und ihre Beziehung zur Theorie des Lichtes."

Herr Oberlieutenant Jul. Payer hält einen Vortrag über die während seiner Schlittenreise auf Franz-Josephs-Land gesammelten Erfahrungen.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

American Chemist. Vol. V, Nrs. 2 & 3. New York. 1874; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr. Zeitschrift (nebst Anzeigen-Blatt). 12. Jahrgang, Nr. 35. Wien, 1874; 8°.

Bericht über die Weltausstellung zu Wien im Jahre 1873. Herausgegeben durch die küstenländische Ausstellungs-Commission in Triest. Redigirt von Friedr. Bömches. Triest, 1874; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome LXXIX, Nr. 22. Paris, 1874; 4°.

Freiburg i. Br., Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1873/4. 4° & 8°.

Friesach, Karl, Theorie der Planetenvorübergänge vor der Sonnenscheibe. Leipzig, 1874; 4°.

Gewerbe-Verein, n.-ö.: Wochenschrift. XXXV. Jahrgang, Nr. 50. Wien, 1874; 4°.

Giessen, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1874. 4°.

Halle, Universität: Akademische Gelegenheitsschriften aus d. J. 1874. 4°.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. IV. Band. Jahrgang 1872, Heft 2. Berlin, 1874; 8°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie, von A. Naumann und A. Laubenheimer. Für 1872. I. & II. Heft. Giessen, 1874; 8°.

Landbote, Der steierische. 7. Jahrgang, Nr. 25. Graz, 1874; 4°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k., in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1874, Nr. 18. Wien; 4°.

Lese-Verein, akademischer, an der k. k. Universität und k. k. technischen Hochschule in Graz: VII. Jahresbericht. 1874. Graz; 8°.

Lotos. XXIV. Jahrgang. October—November 1874. Prag; 8°.

Mittheilungen des k. k. techn. & administr. Militär-Comité. Jahrgang 1874, 11. Heft. Wien; 8°.

Museo, civico, Ferdinando Massimiliano in Trieste. Trieste, 1874; 4°.

Nature. Nr. 267, Vol. XI. London, 1874; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Jahrgang 1874, Nr. 14. Wien; 4°.

Reichsforstverein, österr.: Österr. Monatsschrift für Forstwesen. XXIV. Band, Jahrg. 1874, November-Heft. Wien; 8°.

„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger.“ IVe Année, 2me Série, Nr. 24. Paris, 1874; 4°.

Riccardi, P., Biblioteca matematica Italiana. Fasc. 2° (Vol. II). Modena, 1874; 4°.

Societas Entomologica Rossica: Horae. T. X. Nr. 1—3. Petropoli, 1873 et 1874; 8°. — Iroudy, T. VII, Nr. 4. St. Petersburg, 1874; 8°. — Beiträge zur näheren Kenntniss der in dem Baikal-See vorkommenden niederen Krebse aus der Gruppe der Gammariden. Von B. N. Dybowsky. St. Petersburg, 1874; 4°.

Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg: Jahreshefte. XXVIII. Jahrgang, 1.—3. Heft. Stuttgart, 1872; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang. Nr. 50. Wien, 1874; 4°.

Woldřich, J., Verschlackte Steinwälle und andere urgeschichtliche Bauten in der Gegend von Strakonic. — Durchforschung des Tumulus von Zegersdorf. Schreiben des Grafen H. v. Mannsfeld an J. Woldřich. — Urgeschichtliche Studien in der Wiener Weltausstellung 1873. Wien, 1874; 8°. (Aus Bd. IV der Mittheil. der anthropologischen Gesellschaft in Wien.)

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang. 16. Heft. Wien, 1874; 4°.

Bericht über die Weltausstellu
Herausgegeben durch die
Commission in Triest. Re
Triest, 1874; 8°.

Comptes rendus des séances d
LXXIX, Nr. 22. Paris, 187

Freiburg i. Br., Universität:
ten aus d. J. 1873/4. 4° &

Friesach, Karl, Theorie d
Sonnenscheibe. Leipzig,

Gewerbe-Verein, n.-ö.:
Nr. 50. Wien, 1874; 4°

Giessen, Universität: Ak
d. J. 1874. 4°.

Halle, Universität: Ak
J. 1874. 4°.

Jahrbuch über die
Jahrgang 1872, H

Jahresbericht übe
mann und A.
Giessen, 1874

Landbote, Der st

Landwirthsch
lungen und M

Lese-Verein
k. k. tech
1874. Gr

Lotos. XXI

Mittheilu
Jahrg

Museo,
187

Nature

Reich
1

Rei

„Revue politique et littéraire“ et „Revue scientifique de la France et de l'étranger.“ IV[e] Année, 2[me] Série, Nr. 24. Paris, 1874; 4°.

Riccardi, P., Biblioteca matematica Italiana. Fasc. 2° (Vol. II). Modena, 1874; 4°.

Societas Entomologica Rossica: Horae. T. X. Nr. 1—3. Petropoli, 1873 et 1874; 8°. — Iroudy, T. VII, Nr. 4. St. Petersburg, 1874; 8°. — Beiträge zur näheren Kenntniss der in dem Baikal-See vorkommenden niederen Krebse aus der Gruppe der Gammariden. Von B. N. Dybowsky. St. Petersburg, 1874; 4°.

Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg: Jahreshefte. XXVIII. Jahrgang, 1.—3. Heft. Stuttgart, 1872; 8°.

Wiener Medizin. Wochenschrift. XXIV. Jahrgang. Nr. 50. Wien, 1874; 4°.

Woldřich, J., Verschlackte Steinwälle und andere urgeschichtliche Bauten in der Gegend von Strakonic. — Durchforschung des Tumulus von Zegersdorf. Schreiben des Grafen H. v. Mannsfeld an J. Woldřich. — Urgeschichtliche Studien in der Wiener Weltausstellung 1873. Wien, 1874; 8°. (Aus Bd. IV der Mittheil. der anthropologischen Gesellschaft in Wien.)

Zeitschrift des österr. Ingenieur- & Architekten-Vereins. XXVI. Jahrgang. 16. Heft. Wien, 1874; 4°.





